

高等数学

同步训练

主 编 宋介珠 郑维英
副主编 邢 军 黄胜绢 于君凤



東北大學出版社
Northeastern University Press

1199169

高等数学同步训练

主 编 宋介珠 郑维英

副主编 邢 军 黄胜娟 于君凤



准阴师院图书馆1199169

东北大学出版社

• 沈 阳 •

© 宋介珠 郑维英 2008

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学同步训练 / 宋介珠, 郑维英主编. —沈阳: 东北大学出版社, 2008.6

ISBN 978-7-81102-554-5

I. 高… II. ①宋… ②郑… III. 高等数学—高等学校—习题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 086467 号

出 版 者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编: 110004

电话: 024—83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024—83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph @ neupress.com

http: // www. neupress. com

印 刷 者: 沈阳市第六印刷厂书画彩印中心

发 行 者: 东北大学出版社

幅面尺寸: 260mm×184mm

印 张: 10.125

字 数: 253 千字

出版时间: 2008 年 6 月第 1 版

印刷时间: 2008 年 6 月第 1 次印刷

责任编辑: 孟 颖 刘宗玉

责任校对: 王 晓

封面设计: 唐敏智

责任出版: 杨华宁

ISBN 978-7-81102-554-5

定 价: 14.00 元

前 言

本书是与同济大学《高等数学》第五版相配套的同步训练习题. 内容包括一元函数微积分、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线与曲面积分、无穷级数和微分方程.

本书以同济大学《高等数学》第五版的章节为顺序, 结合本校实际情况, 与现行教学计划同步, 按教学大纲的要求配备习题, 并且为各章都配备了一套自测题, 书中还配备了四套期末模拟试题, 旨在帮助学生迅速而全面地掌握所学内容. 同时, 本书采取作业本形式, 比较规范, 既便于学生书写、保留, 又便于教师批改. 书后不配备解答, 有利于培养学生独立思考和解决问题的能力.

本书适用于工科本科生.

本书的主编为宋介珠、郑维英, 副主编为邢军、黄胜绢和于君凤.

由于编者水平有限, 书中难免有不妥之处, 恳请专家、同仁不吝赐教.

作 者

2008 年 1 月

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 映射与函数	1
第二节 数列的极限	2
第三节 函数的极限	2
第四节 无穷小与无穷大	3
第五节 极限运算法则	4
第六节 极限存在准则 两个重要极限	5
第七节 无穷小的比较	6
第八节 函数的连续性与间断点	7
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	8
第十节 闭区间上连续函数的性质	8
第二章 导数与微分	9
第一节 导数概念	9
第二节 函数的求导法则	10
第三节 高阶导数	12
第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数	13
第五节 函数的微分	15
第三章 中值定理与导数的应用	17
第一节 微分中值定理	17

录

第二节 洛必达法则	19
第三节 泰勒公式	20
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性	21
第五节 函数的极值与最大值、最小值	23
第六节 函数图形的描绘	25
第七节 曲 率	26
第四章 不定积分	27
第一节 不定积分的概念与性质	27
第二节 换元积分法	29
第三节 分部积分法	33
第四节 有理函数积分	35
第五章 定积分	37
第一节 定积分的概念与性质	37
第二节 微积分的基本公式	39
第三节 定积分的换元法和分部积分法	41
第四节 反常积分	45
第六章 定积分的应用	47
第一节 定积分的元素法	47
第二节 定积分在几何学上的应用	47

第三节 定积分在物理学上的应用	51	第二节 偏导数	80
第七章 空间解析几何与向量代数	53	第三节 全微分	82
第一节 向量及其线性运算	53	第四节 多元复合函数的求导法则	83
第二节 数量积 向量积	55	第五节 隐函数的求导公式	85
第三节 曲面及其方程	57	第六节 多元函数微分学的几何应用	87
第四节 空间曲线及其方程	59	第七节 方向导数与梯度	89
第五节 平面及其方程	60	第八节 多元函数的极值及其求法	90
第六节 空间直线及其方程	61	第九章 重积分	93
习题课与自测题一	63	第一节 二重积分的概念与性质	93
习题课与自测题 (第一章)	63	第二节 二重积分的计算法	94
习题课与自测题 (第二章)	65	第三节 三重积分	97
习题课与自测题 (第三章)	67	第四节 重积分的应用	101
习题课与自测题 (第四章)	69	第十章 曲线积分与曲面积分	103
习题课与自测题 (第五章)	70	第一节 对弧长的曲线积分	103
习题课与自测题 (第六章)	72	第二节 对坐标的曲线积分	105
习题课与自测题 (第七章)	73	第三节 格林公式及其应用	107
模拟试题一	75	第四节 对面积的曲面积分	109
第一套	75	第五节 对坐标的曲面积分	111
第二套	76	第六节 高斯公式 通量与散度	113
第三套	77	第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度	114
第四套	78	第十一章 无穷级数	115
第八章 多元函数微分法及其应用	79	第一节 常数项级数的概念和性质	115
第一节 多元函数的基本概念	79	第二节 常数项级数的审敛法	116

第三节	幂级数	119
第四节	函数展开成幂级数	121
第五节	傅立叶级数	123
第六节	一般周期函数的傅立叶级数	126
第十二章	微分方程	127
第一节	微分方程的基本概念	127
第二节	可分离变量的微分方程	128
第三节	齐次方程	129
第四节	一阶线性微分方程	129
第五节	全微分方程	131
第六节	可降阶的高阶微分方程	132
第七节	高阶线性微分方程	133
第八节	常系数齐次线性微分方程	134
第九节	常系数非齐次线性微分方程	135
习题课与自测题二	137	
习题课与自测题 (第八章)	137	
习题课与自测题 (第九章)	139	
习题课与自测题 (第十章)	142	
习题课与自测题 (第十一章)	144	
习题课与自测题 (第十二章)	147	
模拟试题二	150	
第一套	150	
第二套	151	

第三套	152
第四套	153

第一章 函数与极限

重点: 函数的概念、极限的概念、连续性概念和极限的求法.

难点: 复合函数、极限定义的理解, 分段函数的极限与连续.

第一节 映射与函数

1. 选择题.

(1) 函数 $y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$ 的定义域为[].

- (A) (0, 5); (B) [1, 4];
(C) (1, 4]; (D) [1, 4].

(2) 函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2}, & |x| \leq 3, \\ x^2-9, & 3 < |x| < 4 \end{cases}$ 的定义域是[].

- (A) [-3, 4]; (B) (-3, 4);
(C) [-4, 4]; (D) (-4, 4).

(3) 设函数 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$ ($a > 0, a \neq 1$), 则函数是

[].

- (A) 奇函数; (B) 偶函数;

(C) 非奇非偶函数; (D) 既奇又偶函数.

(4) 下列函数中为初等函数的是[].

(A) $y = \sqrt{\cos x - 2}$;

(B) $y = \sqrt{\sin x - 1}$;

(C) $y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1; \end{cases}$

(D) $y = \begin{cases} 1+x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$

2. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y = e^{x^2}$;

(2) $y = \arccos \sqrt{\ln(x^2-1)}$.

第二节 数列的极限

1. 观察下列各数列变化趋势, 写出它们的极限.

(1) $x_n = 1 + \frac{1}{n}$.

(2) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

(3) $x_n = \frac{n^2 + 1}{n}$.

(4) $x_n = \sin \frac{n\pi}{2}$.

第三节 函数的极限

1. $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的
_____ 条件; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界的
_____ 条件.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 的值为 [].
(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 不存在.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ -x + 3, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ 求当 $x \rightarrow 1$ 时, $f(x)$ 的左、右
极限, 并说明 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 是否存在, 同时画出 $f(x)$ 的图形.

第四节 无穷小与无穷大

(3) 当 $x \rightarrow 2$ 时, $y = 3x + 2$.

1. $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 的_____

条件; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界的_____

条件.

2. 下列函数在给定的变化过程中哪些是无穷小, 哪些是无穷大?

(1) 当 $x \rightarrow -2$ 时, $y = x^3 + 8$.

(4) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $y = 2^{10000}$.

(2) 当 $x \rightarrow -3$ 时, $y = \frac{x-3}{x+3}$.

3. $y = \frac{x+1}{x-1}$ 在什么过程是无穷小, 什么过程是无穷大?

第五节 极限运算法则

1. 下述运算过程正确的是[].

(A) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x}{\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)} = \infty$;

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0$;

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$;

(D) 已知 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{x + \Delta x} = \sqrt{x}$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

2. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{1 - x} = 5$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

3. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 1}{x + 1} - (ax + b) \right] = 0$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

4. 计算下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 5^n}{(-2)^{n+1} + 5^{n+1}}$;

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} \sin n}{n+1}$.

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$.

6. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^k} + \frac{2}{n^k} + \cdots + \frac{n}{n^k} \right)$ (k 为常数).

第六节 极限存在准则 两个重要极限

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x. \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{x+1}.$$

1. 选择题.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{\pi}{x} = [\quad].$$

(A) 0; (B) 1; (C) π ; (D) 不存在.

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = [\quad].$$

(A) 1; (B) 0; (C) ∞ ; (D) 不存在.

$$(3) \text{ 设 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{kn} = e^{-3}, \text{ 则 } k = [\quad].$$

(A) $\frac{3}{2}$; (B) $\frac{2}{3}$; (C) $-\frac{3}{2}$; (D) $-\frac{2}{3}$.

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{2-\frac{1}{x}} = [\quad].$$

(A) 1; (B) e ; (C) e^{-1} ; (D) e^2 .

2. 计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{x}{n}.$$

$$3. \text{ 利用极限存在准则计算 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + \pi} + \frac{n}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n\pi} \right).$$

第七节 无穷小的比较

1. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 无穷小 $1-x$ 与 $A(1-x^3)$ 等价, 则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. $x \rightarrow 0$ 时, x^2+x 与 x^3+x^2 哪一个是高阶无穷小.

3. $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x^2}$ 与 $\frac{1}{x^3}$ 哪一个是低阶无穷小.

4. 利用等价无穷小的性质, 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \tan^3 x}{\sin 2x^3 \cdot \tan \sqrt{x}}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\tan(\tan x)}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{\sin^2 x}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

第八节 函数的连续性与间断点

1. 填空题.

(1) 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义是它在该点处连续的一个_____条件.

(2) 如果 x_0 是 $f(x)$ 的间断点,

(i) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ _____, 则 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点;

(ii) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ _____, 则 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点;

(iii) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ _____, 则 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(3) 函数 $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x-3}$ 的间断点为_____.

(4) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ a, & x = 0, \\ b + x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$

则 (i) $a =$ _____, $b =$ _____ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在;

(ii) $a =$ _____, $b =$ _____ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2. 研究下列函数在指定点处的连续性, 若是间断点, 确定其类型.

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan 2x}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处.

(2) $y = \frac{|x|}{x}$, 在 $x=0$ 处.

(3) $y = x \sin \frac{1}{x}$, 在 $x=0$ 处.

3. 指出 $f(x) = \frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点及类型.

第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性

1. 选择题.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sin \frac{1}{1+x}} = [\quad]$.

(A) 0; (B) 1; (C) e; (D) 不存在.

(2) 下列各式不正确的是[].

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = \infty$; (B) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 0$;

(C) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$; (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

2. 求函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的连续区间, 并求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

3. 求下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1-x}{1+x}$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$.

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2x}$.

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3\sin^2 x)^{\csc^2 x}$.

第十节 闭区间上连续函数的性质

1. 证明 $x \cdot 5^x = 1$ 至少有一个小于 1 的正根.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且无零点, 证明 $f(x) > 0$ 或 $f(x) < 0$.

第二章 导数与微分

重点：导数和微分的概念，导数的四则运算法则和复合函数求导法则，隐函数和参数方程所确定的函数的一阶、二阶导数，初等函数的一阶、二阶导数。

难点：导数的概念与几何意义，高阶导数，隐函数和参数方程所确定的函数的导数，微分的定义。

第一节 导数概念

1. 填空题.

(1) 抛物线 $y = x^2$ 在点_____切线斜率等于2，写出曲线在该点处切线方程_____和法线方程_____.

(2) 若 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 $f(0) = 0$ ，且 $f'(0) = A$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 选择题.

(1) 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处是[].

- (A) 没有极限; (B) 有极限但不连续;
(C) 连续但不可导; (D) 可导.

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \end{cases}$ 则 $f'(0) = [\quad]$.

- (A) 0; (B) k (非零常数);
(C) ∞ ; (D) 不存在，也非 ∞ .

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ 2x-1, & x > 1, \end{cases}$ 试求 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的导数.

4. 讨论函数 $y = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

$$(2) y = 5^x \cdot 2^x.$$

第二节 函数的求导法则

练习一

1. 填空题.

(1) 反函数的导数等于直接函数导数的_____.

(2) 以初速度 v_0 竖直上抛的物体, 其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, 则该物体的速度 $v(t) =$ _____, 该物体达到最高点的时刻 $t =$ _____.

2. 选择题.

(1) 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x$, 则 $f'(x) = [\quad]$.

(A) $\frac{1}{x}$; (B) $-\frac{1}{x}$; (C) $\frac{1}{x^2}$; (D) $-\frac{1}{x^2}$.

(2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 1$ 在 $(0, 1)$ 处的切线与 x 轴交点坐标是 $[\quad]$.

(A) $\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$; (B) $(-1, 0)$;

(C) $\left(\frac{1}{6}, 0\right)$; (D) $(1, 0)$.

3. 求下列函数的导数.

$$(1) y = x^2 + \sqrt{x} - \cos x + e^x + \tan \frac{\pi}{4}.$$

$$(3) y = \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x}}.$$

$$(4) y = \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}.$$

$$(5) y = \arcsin x + 2\arccos x.$$