高等数学

同步训练

主　编　宋介珠　郑维英
副主编　邢　军　黄胜绢　于君凤

東北大學出版社
Northeastern University Press

高等数学同步训练

主　编　宋介珠　郑维英

副主编　邢　军　黄胜绢　于君凤

东北大学出版社

·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学同步训练 / 宋介珠，郑维英主编．—沈阳：东北大学出版社，2008.6
ISBN 978-7-81102-554-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.①宋…　②郑…　Ⅲ.高等数学—高等学校—习题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 086467 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂书画彩印中心
发 行 者：东北大学出版社

幅面尺寸：260mm×184mm
印　　张：10.125
字　　数：253 千字
出版时间：2008 年 6 月第 1 版
印刷时间：2008 年 6 月第 1 次印刷
责任编辑：孟　颖　刘宗玉
责任校对：王　晓
封面设计：唐敏智
责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-554-5　　定　价：14.00 元

前　　言

本书是与同济大学《高等数学》第五版相配套的同步训练习题. 内容包括一元函数微积分、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线与曲面积分、无穷级数和微分方程.

本书以同济大学《高等数学》第五版的章节为顺序, 结合本校实际情况, 与现行教学计划同步, 按教学大纲的要求配备习题, 并且为各章都配备了一套自测题, 书中还配备了四套期末模拟试题, 旨在帮助学生迅速而全面地掌握所学内容. 同时, 本书采取作业本形式, 比较规范, 既便于学生书写、保留, 又便于教师批改. 书后不配备解答, 有利于培养学生独立思考和解决问题的能力.

本书适用于工科本科生.

本书的主编为宋介珠、郑维英, 副主编为邢军、黄胜绢和于君凤.

由于编者水平有限, 书中难免有不妥之处, 恳请专家、同仁不吝赐教.

作　　者

2008 年 1 月

目　录

第一章　函数与极限

重点：函数的概念、极限的概念、连续性概念和极限的求法.

难点：复合函数、极限定义的理解，分段函数的极限与连续.

第一节　映射与函数

1. 选择题.

(1) 函数 $y=\sqrt{\lg\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)}$ 的定义域为[　].

(A) $(0,5)$;　　(B) $[1,4)$;

(C) $(1,4]$;　　(D) $[1,4]$.

(2) 函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2}, & |x|\leqslant 3,\\ x^2-9, & 3<|x|<4\end{cases}$ 的定义域是[　].

(A) $[-3,4)$;　　(B) $(-3,4)$;

(C) $[-4,4)$;　　(D) $(-4,4)$.

(3) 设函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ $(a>0,\ a\neq 1)$，则函数是[　].

(A) 奇函数;　　(B) 偶函数;

(C) 非奇非偶函数;　　(D) 既奇又偶函数.

(4) 下列函数中为初等函数的是[　].

(A) $y=\sqrt{\cos x-2}$;

(B) $y=\sqrt{\sin x-1}$;

(C) $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1;\end{cases}$

(D) $y=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

2. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=\mathrm{e}^{x^2}$;

(2) $y=\arccos\sqrt{\ln(x^2-1)}$.

第二节　数列的极限

1. 观察下列各数列变化趋势，写出它们的极限.

(1) $x_n = 1 + \frac{1}{n}$.　　(2) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

(3) $x_n = \frac{n^2+1}{n}$.　　(4) $x_n = \sin\frac{n\pi}{2}$.

第三节　函数的极限

1. $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的______条件；$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界的______条件.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} |x|+1, & x\neq 0, \\ 2, & x=0, \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 的值为[　].

(A) 0;　　(B) 1;　　(C) 2;　　(D) 不存在.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} -x+1, & 0\leqslant x<1, \\ 1, & x=1, \\ -x+3, & 1<x\leqslant 2, \end{cases}$ 求当 $x\to 1$ 时，$f(x)$ 的左、右极限，并说明 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在，同时画出 $f(x)$ 的图形.

第四节 无穷小与无穷大

1. $f(x)$在x_0的某一去心邻域内无界是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$的________条件；$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$是$f(x)$在$x_0$的某一去心邻域内无界的________条件.

2. 下列函数在给定的变化过程中哪些是无穷小，哪些是无穷大？

(1) 当$x\to-2$时，$y=x^3+8$.

(2) 当$x\to-3$时，$y=\dfrac{x-3}{x+3}$.

(3) 当$x\to2$时，$y=3x+2$.

(4) 当$x\to0$时，$y=2^{10000}$.

3. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$在什么过程是无穷小，什么过程是无穷大？

第五节 极限运算法则

1．下述运算过程正确的是[ ]．

(A) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2}x}{\lim\limits_{x\to2}(x-2)}=\infty$；

(B) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}=0$；

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n}+\cdots+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$；

(D) 已知$\lim\limits_{\Delta x\to0}\sqrt{x+\Delta x}=\sqrt{x}$，则

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2．已知$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，则 $a=$________，$b=$________．

3．已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)\right]=0$，则 $a=$________，$b=$________．

4．计算下列极限．

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})$．

(2) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$．

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+5^n}{(-2)^{n+1}+5^{n+1}}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}\sin n}{n+1}$．

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$．

6．计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\cdots+\dfrac{n}{n^k}\right)$ （k 为常数）．

第六节 极限存在准则 两个重要极限

1. 选择题.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{\pi}{x}=[\quad]$.

(A) 0; (B) 1; (C) π; (D) 不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=[\quad]$.

(A) 1; (B) 0; (C) ∞; (D) 不存在.

(3) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{kn}=\mathrm{e}^{-3}$, 则 $k=[\quad]$.

(A) $\dfrac{3}{2}$; (B) $\dfrac{2}{3}$; (C) $-\dfrac{3}{2}$; (D) $-\dfrac{2}{3}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{2-\frac{1}{x}}=[\quad]$.

(A) 1; (B) e; (C) e^{-1}; (D) e^{2}.

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sin\dfrac{x}{n}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x+1}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{x}$.

3. 利用极限存在准则计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+\pi}+\dfrac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n\pi}\right)$.

第七节　无穷小的比较

1. 当 $x\to 1$ 时，无穷小 $1-x$ 与 $A(1-x^3)$ 等价，则 $A=$______.

2. $x\to 0$ 时，x^2+x 与 x^3+x^2 哪一个是高阶无穷小.

3. $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x^2}$ 与 $\frac{1}{x^3}$ 哪一个是低阶无穷小.

4. 利用等价无穷小的性质，求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}\tan^3 x}{\sin 2x^3\cdot\tan\sqrt{x}}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\tan(\tan x)}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{\sin^2 x}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

第八节 函数的连续性与间断点

1. 填空题.

(1) 函数 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 处有定义是它在该点处连续的一个________条件.

(2) 如果 x_0 是 $f(x)$的间断点,

(ⅰ) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$________, 则 x_0 是 $f(x)$的第一类间断点;

(ⅱ) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$________, 则 x_0 是 $f(x)$的可去间断点;

(ⅲ)若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$________, 则 x_0 是 $f(x)$的第二类间断点.

(3) 函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x-3}$的间断点为________.

(4) 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x<0, \\ a, & x=0, \\ b+x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \end{cases}$

则(ⅰ) $a=$________, $b=$________时, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在;

(ⅱ) $a=$________, $b=$________时, $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

2. 研究下列函数在指定点处的连续性, 若是间断点, 确定其类型.

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan 2x}{x}, & x\neq 0, \\ 2, & x=0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处.

(2) $y=\dfrac{|x|}{x}$, 在 $x=0$ 处.

(3) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$, 在 $x=0$ 处.

3. 指出 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$的间断点及类型.

第九节　连续函数的运算与初等函数的连续性

1. 选择题.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\sin\frac{1}{1+x}} =$ [　].

(A) 0;　(B) 1;　(C) e;　(D) 不存在.

(2) 下列各式不正确的是[　].

(A) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$;　(B) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$;

(C) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$;　(D) $\lim\limits_{x\to \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

2. 求函数 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的连续区间，并求极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos\dfrac{1-x}{1+x}$.　(2) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{2x}$.　(4) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3\sin^2 x)^{\csc^2 x}$.

第十节　闭区间上连续函数的性质

1. 证明 $x\cdot 5^x = 1$ 至少有一个小于 1 的正根.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且无零点，证明 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$.

班级________　姓名________　学号________

第二章　导数与微分

重点：导数和微分的概念，导数的四则运算法则和复合函数求导法则，隐函数和参数方程所确定的函数的一阶、二阶导数，初等函数的一阶、二阶导数.

难点：导数的概念与几何意义，高阶导数，隐函数和参数方程所确定的函数的导数，微分的定义.

第一节　导数概念

1. 填空题.

(1) 抛物线 $y=x^2$ 在点________切线斜率等于 2，写出曲线在该点处切线方程________和法线方程________.

(2) 若 $f'(x_0)$存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=$________.

(3) 设 $f(0)=0$，且 $f'(0)=A$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=$________.

2. 选择题.

(1) 函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处是[　].

(A) 没有极限；　(B) 有极限但不连续；

(C) 连续但不可导；　(D) 可导.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\end{cases}$ 则 $f'(0)=$[　].

(A) 0；　(B) k(非零常数)；

(C) ∞；　(D) 不存在，也非∞.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 2x-1, & x>1,\end{cases}$ 试求 $f(x)$在点 $x=1$ 处的导数.

4. 讨论函数 $y=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

第二节　函数的求导法则

练习一

1．填空题.

(1) 反函数的导数等于直接函数导数的________.

(2) 以初速度 v_0 竖直上抛的物体，其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$，则该物体的速度 $v(t)=$________，该物体达到最高点的时刻 $t=$________.

2．选择题.

(1) 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x$，则 $f'(x)=$[　].

(A) $\frac{1}{x}$;　(B) $-\frac{1}{x}$;　(C) $\frac{1}{x^2}$;　(D) $-\frac{1}{x^2}$.

(2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x+1$ 在(0, 1)处的切线与 x 轴交点坐标是[　].

(A) $\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$;　(B) $(-1, 0)$;

(C) $\left(\frac{1}{6}, 0\right)$;　(D) $(1, 0)$.

3．求下列函数的导数.

(1) $y=x^2+\sqrt{x}-\cos x+\mathrm{e}^x+\tan\frac{\pi}{4}$.

(2) $y=5^x\cdot 2^x$.

(3) $y=\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}}$.

(4) $y=\frac{\ln x-1}{\ln x+1}$.

(5) $y=\arcsin x+2\arccos x$.