〔美〕H．Minc M．Marcus 著
张福振 杜吉佩 译
陈玉福 高晓凌 校

矩阵理论与矩阵不等式概要

大连理工大学出版社

矩阵理论和矩阵不等式概要

〔美〕 H.Minc M.Marcus 著
张福振 杜吉佩 译
陈玉福 高晓凌 校

大连理工大学出版社

内 容 提 要

本书主要系统地介绍了矩阵理论这个研究领域的重要结果，其中包括：矩阵理论的概述、凸性与矩阵、以及特征根的局部化。理论叙述详略得当，推理严谨，学习引用时可选性强，可作为大专院校数学专业高年级学生的选修课教材，也可供数学工作者、工程技术人员参考。

H.MINC and M.MARCUS
A SURVEY OF MATRIX THEORY AND
MATRIX INEQUALITIES

本书根据 PRINDLE, WEBER & SCHMIDT 1964 年版译出

矩阵理论和矩阵不等式概要

〔美〕H.Minc M.Marcus 著
张福振 杜吉佩 译
陈玉福 高晓凌 校

大连理工大学出版社出版发行 (大连市甘井子区凌水河)
大连通力技术开发应用服务部计算机排版
大连理工大学印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：7 1/2 字数：160 千字
1990 年 2 月第 1 版 1990 年 2 月第 1 次印刷
印数：0001—1000 册

责任编辑：凌 子 封面设计：羊 戈

ISBN 7-5611-0273-9/O·49 定 价：3.20 元

中 文 版 序

M.Marcus 和 H.Minc 合著的《矩阵理论与矩阵不等式概要》是一本很有特色的好书。两位著者都是美国当今著名的数学家，在线性代数和矩阵理论领域中有很多建树。

这本书的篇幅不大，但内容十分丰富。它由浅入深地概括了矩阵不等式方面的基本理论和大量重要的结果。书中各部分内容既有联系又有很大的独立性，这样就使得本书能够适应多方面读者的需要。它既可以作为教材，也可以供广大科技工作者参考。

这本书出版以来颇具影响，在很多著作中被广泛地引用。但在我国还很少见到这本书，前几年有人从国外带回该书的复制件。现由张福振和杜吉佩把它译成中文，相信对广大读者将会有所裨益。

北京师范大学数学系
王伯英　教授
1989 年 7 月

原　序

现代矩阵理论作为本科生的选修课和数学的一个有趣研究领域，近年来已被广泛地重视起来。追朔其缘由，除美学的原因外，还由于矩阵在纯粹数学以及自然和社会科学中得到了普遍的使用。

这本书尽量用较少的篇幅总结这个领域的主要结果。第一章用了很短的篇幅，从假定读者没有接触过矩阵开始到现在人们感兴趣的一些问题作了叙述。为此，某些可以在其他书上找到的证明这里略去了。但是对于许多经典定理和现行文献中大量的结果，我们还是给出了证明。根据经验，第一章的部分内容可以作为大学三、四年级一门课程的教材。教师可根据实际情况有选择地给出定理的证明，没必要一律依照书本中的“定义—定理—证明”讲授。第一章中有些内容比较偏，如 Kronecker 乘积，复合矩阵，诱导矩阵，二次关系，积和式，关联矩阵，(v,k,λ)—构形，交换性的广义化，L 性质等。把它们写出来只是我们自己的偏爱。

第二章先概述凸集和多面体的基本性质，然后证明 Birkhoff 关于双随机矩阵定理，再讨论凸函数的性质和一系列经典不等式，最后综合这些结果得到 Weyl，Fan，Kantorovich 等人的许多有趣的矩阵不等式。这部分材料是根据上述作者以及后来一些人的工作整理的，许多证明也包括进去了。这一章还包括经典的 Perron—Frobenius—Wielandt 不可解非负矩阵理论，最后还介绍了随机矩阵方面的最新结果。

第三章我们根据一个矩阵的元素或与其相关的矩阵的简单函数来讨论这个矩阵特征值的局部化问题。这一部分基本上按照资料的时间顺序来写的。在这个领域许许多多的结果中，我们力图选择一些有趣的并且看来会有用的结果。

总地来说，我们希望这本书有益于任何一位对矩阵或矩阵不等式有问题的人。

Marvin Marcus

Henryk Minc

新版除了对少量的印刷错误作了修改外没有别的改动。

M.M.

H.M.

1969 年 8 月

特殊符号

第一章

$\mathbf{R}$—— 实数域。

$\mathbf{C}$—— 复数域。

$\mathbf{I}$—— 整数集。

$\mathbf{P}$—— 非负实数集。

$\mathbf{F}[\lambda]$ —— 系数在数域 $\mathbf{F}$ 中 λ 的多项式的全体。

$M_{m,n}(\mathbf{F})$—— $\mathbf{F}$ 中 $m\times n$ 阶矩阵的全体。

$M_n(\mathbf{F})$—— $\mathbf{F}$ 中 n 阶方阵的全体。

$A_{(i)}$—— A 的第 i 行。

$A^{(j)}$—— A 的第 j 列。

$\mathbf{F}^k$—— 取自 F 中的 k 元数组的集合。

$O_{m,n}$—— $m\times n$ 阶零阵。

I_n—— n 阶单位方阵。

O_n—— n 元零数组。

A^T—— A 的转置阵。

A^*—— A 的共轭转置阵。

$\overline{A}$ —— A 的共轭阵。

$A\dot{+}B$ 或 $\dot{\sum\limits_{i=1}^{k}} A_i$ —— 矩阵的直和。

$A\otimes B$—— Kronecher 积。

$Q_{k,n}$—— 从 $1,\cdots,n$ 中选取 k 个整数的严格递增序列的全

体。

$G_{k,n}$—— 从 $1,\cdots,n$ 中选取 k 个整数的非减序列的全体。

$D_{k,n}$—— 从 $1,\cdots,n$ 中选取 k 个相异整数序列的全体。

$S_{k,n}$—— 从 $1,\cdots,n$ 中选取 k 个整数序列的全体。

$E_k(a)$—— 数 $a=(a_1,\cdots,a_n)$的第 k 次初等对称函数。

$A〔\alpha|\beta〕],A[\alpha|\beta),A(\alpha|\beta],A(\alpha|\beta)$—— 分别表示取 α 限定的行、β 限定的列所构成的子矩阵；取 α 所限定的行去掉 β 所限定的列所构成的子阵；等等。其中 α 和 β 是整数序列。

S_n—— n 次对称群。

$\mathrm{d}(A)$—— A 的行列式。

$C_r(A)$—— A 的 r 阶复合阵。

$\mathbf{u}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{u}_r$—— 向量 $\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r$ 的斜对称积。

$E_k(A)$—— A 的所有 k 阶主子式的和。

$\mathrm{tr}(A)$—— A 的迹。

$p(A)$—— A 的积和式。

$P_r(A)$—— r 阶诱导矩阵。

$\mathbf{u}_1\cdots\mathbf{u}_r$—— 向量 $\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r$ 的对称积。

$\lambda_i(A)$—— A 的特征根。

$\rho(A)$—— A 的秩。

e_i—— 第 i 个坐标为 1,而其余坐标为 0 的 n 元数组。

$\langle\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_k\rangle$ —— 由 $\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_k$ 生成的空间。

$\eta(A)$—— A 的零维。

$\mathrm{I}_{(i),(j)}$—— 交换 i 行和 j 行。

$\mathrm{II}_{(i)+c(j)}$—— j 行乘以 c 加到 i 行上。

$\mathrm{III}_{c(i)}$—— i 行乘以 c。

$\left.\begin{array}{l}\mathrm{E}_{(i),(j)}\\ \mathrm{E}_{(i)+c(j)}\\ \mathrm{E}_{c(j)}\end{array}\right\}$ 初等矩阵(行)

$\mathrm{I}^{(i,(j)}$—— 交换 i 列和 j 列。

$\mathrm{II}^{(i)+c(j)}$—— j 列乘以 c 加到 i 列上。

$\mathrm{III}^{c(i)}$—— i 列乘以 c。

$\left.\begin{array}{l}\mathrm{E}^{(i),(j)}\\ \mathrm{E}^{(i)+c(j)}\\ \mathrm{E}^{c(j)}\end{array}\right\}$ 初等矩阵(列)

$a|b$—— a 整除 b

$C(p(\lambda))$—— $p(\lambda)$的友矩阵。

$H(p(\lambda))$—— $p(\lambda)$的超友矩阵。

$\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)$—— 在主对角线上含有 $a_1,\cdots,a_n$ 的对角矩阵。

第二章

U—— (第二章中)或者是集合 $\mathbf{R}^n$ 或者是集合 $M_{m,n}(\mathbf{R})$。

$\langle \mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_k\rangle^{\perp}$—— 由 $\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_k$ 生成的向量空间的正交补。

D_n—— 由行和与列和都等于 1 的所有 n 阶实方阵组成的集合。

Ω_n—— 所有 n 阶双随机方阵组成的集合。

$H(X)$—— X 的凸包。

$A*B$—— Hadamard 积(位于 i,j 处的元素为 $a_{ij}b_{ij}$)。

第三章

在第 **1.2,1.3,1.4** 和 **1.6** 节中,使用过下列特殊符号:对于 $A\in M_n(C)$,设 $B=(A+A^*)/2$,$C=(A-A^*)/2\mathrm{i}$; 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n(|\lambda_1|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|)$,$\mu_1\geqslant\cdots\geqslant\mu_n$,$\nu_1\geqslant\cdots\geqslant\nu_n$ 分别是 A,B 和 C

的特征根;设$g = \max\limits_{ij}|a_{ij}|, g' = \max\limits_{i,j}|b_{ij}|, g'' = \max\limits_{i,j}|c_{ij}|$。

在第 **1.6,2.1,2.2,2.4** 和 **2.5** 节中,若 $A \in M_n(\mathbf{C})$,则 R_i 表示 i 行元素的绝对值之和,T_i 表示 i 列元素的绝对值之和;R 是 R_i 的最大值;T 是 T_i 的最大值;$P_i = R_i - |a_{ii}|, Q_i = T_i - |a_{ii}|$。

$s(A)$—— A 的展形。

$\|A\|$ —— A 的欧几里得范数, $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$,

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^{m,n} |a_{ij}|^2$$

编 号 系 列

在某章的正文内引用该章的某节内容时,将仅给出节的编号。在其他章内引用某节内容时,将在其节号前加上相应章的编号。于是,如果在第二章的正文内要参考第一章 **2.12** 节的内容时,我们写作“(参见第一章中 **2.12**)”。所展示的公式常用其所在节的节号后跟括在圆括号里的公式号来引用。这样,若在第三章的正文内,要引用第一章 **3.4** 的公式(2)时,我们写作“[参见第一章 **3.4**(2)]”。

目　录

第一章　矩阵理论概述

§1　概念介绍

1.1 矩阵与向量

在本书中我们将论及如下集合:

(Ⅰ)实数域 **R**;

(Ⅱ)复数域 **C**;

(Ⅲ)整数环(正整数、负整数和零)**I**;

(Ⅳ)非负实数集 **P**;

(Ⅴ)未定元("变量")λ 的实系数(复系数)多项式环 $\mathbf{R}[\lambda]$ ($\mathbf{C}[\lambda]$)。

令 **F** 是上述集合中的任意一个，假定 a_{11}，a_{12}，a_{13}，…，a_{mn} 是 **F** 中的 mn 个元素，由这些元素组成的 m 行 n 列矩形数组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{I}$$

叫做 $m\times n$ 矩阵。简记为 $A=(a_{ij})$。A 的一种更正式但不太形象的定义是这样的。一个矩阵 A 是一个定义在整数对集 $(i,\ j)$，$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$ 上、取值于 F 的函数。数组 1.1(Ⅰ)列出 A 的全部值，恰是函数 A 的一种简便表达方式。元素 a_{ij} 称为 A 的$(i,\ j)$位置上元素。A 的第 i 行是序列 a_{i1}，

a_{i2}, …, a_{in}, 它的第 j 列是序列 a_{1j}, a_{2j}, …, a_{mj}。因为 a_{ij} $\in F$, 我们说 A 是 F 上的 $m\times n$ 矩阵。上述矩阵的全体记为 $M_{m,n}(F)$。当 $n=m$ 时, 我们称 A 是一个 n 阶方阵, F 上的所有 n 阶方阵的集合记为 $M_n(F)$。F 上的矩阵 A 的行(列)向量刚好是 $M_{1,n}(F)$或($M_{m1}(F)$)的元素。

如果 $A\in M_{m,n}(F)$, 则 $A_{(i)}=(a_{i1}$, a_{i2}, …, $a_{in})\in M_{1n}(F)$ ($i=1$, …, m)表示 A 的第 i 行向量, 类似地, 它的列向量为 $A^{(j)}\in M_{m,1}(F)$, 是 $m\times 1$ 矩阵, 它的(i, j)元素是 $a_{ij}(i=1$, …, $m)$。矩阵 A 的(i, j)元素有时也写作 A_{ij}。一般地, F 上的一个 k 维向量 $\mathbf{v}$ 刚好是一个 F 上的 k—元序列 (a_1, a_2, …, a_k), a_i 称为向量 $\mathbf{v}$ 的第 i 个坐标。每一个坐标都是零的 k 维向量记作 O, 当有必要指维数时, 我们记作 O_k, F 上的 k 维向量的全体记作 F^k。当 $F=\mathbf{C}$ 时, $\mathbf{v}=(a_1$, a_2, …, $a_k)\in C^k$, 用$\bar{\mathbf{v}}$记向量($\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …, $\bar{a}_k$), n 阶单位矩阵 $I_n\in M_n(F)$和 $m\times n$ 阶 O 矩阵 $O_{m,n}\in M_{mn}(F)$是两个特殊矩阵。I_n 的(i, j)元素除非当 $i=j$ 时是 1 余者是 0。即 I_n 的 (i,j)元素是 kronecker 符号: 当 $i\neq j$ 时, $\delta_{ij}=0$, 当 $i=j$ 时, $\delta_{ij}=1$。对于每一个 i 和 j, O_{mn} 的(i,j)元素是 0。

1.2 矩阵的运算

对于 F 上的矩阵, 其 3 种规范运算定义如下。

1.2.1 用数 $c\in F$ 乘以矩阵 $A=(a_{ij})\in M_{mn}(F)$。其积定义为 $M_{mn}(F)$中的矩阵, 其(i, j)元素为 ca_{ij}, 并记作 cA。

1.2.2 在 $M_{mn}(F)$中, 两个矩阵 $A=(a_{ij})$和 $B=(b_{ij})$的和是矩阵 $C=(c_{ij})\in M_{mn}(F)$, 它的(i,j)元素是 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$。注意: 为了使 A 和 B 的和有定义, 它们必须是同行同列的。

1.2.3 两个矩阵 $A=(a_{ij})\in M_{mk}(F)$和 $B=(b_{ij})\in M_{kn}(F)$的积是矩阵 $C=(c_{ij})\in M_{mn}(F)$, 它的(i,j)元素是

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{k} a_{it} b_{tj} \quad (1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n) \tag{1}$$

我们记 $C=AB$，类似于通常的乘积记法。注意：为了使矩阵的积 $C=AB$ 有定义，必须使矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相同。如果 $A \in M_n(F)$，我们用记号 A^2 表示乘积 $A \times A$；$A^3 = A \cdot A^2$，一般地，对任意的正整数 r 有 $A^r = A \times A^{r-1}$。显然，矩阵 A^r 叫做 A 的 r 次乘方。

1.2.4 这些运算有关的法则是：

(Ⅰ)交换律：$A+B=B+A$；但，一般的 $AB \neq BA$，如果 $AB=BA$，则说 A 和 B 是可交换的。

(Ⅱ)结合律：$A+(B+C)=(A+B)+C$；$A(BC)=(AB)C$ 等式两端和(积)的公共值记作 $A+B+C$ (ABC)，不再加括孤。

(Ⅲ)分配律：$A(B+C)=AB+AC$；$(B+C)A=BA+CA$。当然，在(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)中为使运算有意义，这些矩阵必须具有适当的行数和列数。

1.3 矩阵的逆

对于 $A \in M_n(F)$，如果存在一个矩阵 $B \in M_n(F)$，使得 $BA=AB=I_n$，则称 A 是非奇异的。如果不存在 B 使上式成立，则称 A 是奇异的。

如果 A 是非奇异的，则 B 是由方程 $AB=I_n$ 或 $BA=I_n$ 唯一确定的。这个矩阵 B 叫做矩阵 A 的逆。用符号 A^{-1} 表示 B。如果 r 是正整数，则 A^{-r} 表示为矩阵$(A^{-1})^r$；$A^0=I_n$。对任意的 A，如果 p、q 为正整数，指数运算规律 $A^{p+q}=A^pA^q$；$(A^p)^q=A^{p \cdot q}$ 成立。如果 A 是非奇异的，这些法则对于任何正整数，零和负整数的指数 p 和 q 也适用。

1.4 矩阵和向量的运算

给 F 上的矩阵和 k 维向量定义运算。

1.4.1 两个向量 $\mathbf{u}=(a_1, \cdots, a_k)$和 $\mathbf{v}=(b_1, \cdots, b_k)$的和是向量 $\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_k+b_k)$。

1.4.2 如果 $c\in F$ 和 $\mathbf{u}=(c_1, \cdots, c_k)$则矩阵−向量积 $A\mathbf{u}$ 定义为向量 $\mathbf{v}=(b_1, \cdots, b_m)$其中

$$b_j=\sum_{t=1}^{k} a_{jt}c_t \qquad (j=1,\cdots,m) \tag{1}$$

显然 $A(\mathbf{u}+\mathbf{v})=A\mathbf{u}+A\mathbf{v}$ 和$(A+B)\mathbf{u}=A\mathbf{u}+B\mathbf{u}$ 对于向量 $\mathbf{u}$，$\mathbf{v}\in \mathrm{F}^k$ 和矩阵 A，$B\in M_{mk}(F)$都成立。

1.4.4 根据列向量展开，我们可用另一种方法表示方程 1.4(1)。如果 $A\in M_{mk}(F)$和 $\mathbf{u}=(c_1, \cdots, c_k)$，则

$$\mathbf{V}=\sum_{t=1}^{k} c_t A^{(t)}$$

在等式右边，向量的第 j 个坐标是$\sum_{t=1}^{k} a_{jt}c_t$。同样地，如果 $\omega=(d_1, \cdots, d_m)\in M_{1m}(F)$和 $A=(a_{ij})\in M_{mk}(F)$，则

$$\omega A=\sum_{s=1}^{m} d_s A_{(s)}$$

对于两个矩阵的积，根据研究的矩阵的列向量和行向量，我们也可以表示定义 **1.2.3**。对于 **1.2.3** 的符号中，如果 $C=AB$，则

$$C^{(j)}=\sum_{i=1}^{k} b_{ij}A^{(t)} \qquad (j=1, \cdots, n)$$

$$\text{和} \qquad C_{(i)}=\sum_{i=1}^{K} a_{it}B_{(t)} \qquad (i=1, \cdots, m) \tag{2}$$

这个公式也可以认为是矩阵−向量积，即

$$C^{(j)}=AB^{(j)} \qquad (j=1, \cdots, n) \tag{3}$$