高等学校教材

# 概率论与数理统计

主　编　田　琳
副主编　张建亮　熊良鹏　冯向东

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

# 概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

主　编　田　琳

副主编　张建亮　熊良鹏　冯向东



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书由概率论与数理统计教学中有多年教学经验的教师编写而成，主要内容包括概率论的基本概念、一维和二维随机变量及其分布、数字特征和极限分布、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析，以及概率统计中 Excel 的应用。 书中例题和习题在编排上由浅入深，循序渐进，层次分明，题型较为丰富，习题量适度。

本书可以作为高等学校概率论与数理统计课程教材，也可以作为教学参考书或学生自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 田琳主编. --北京:高等教育出版社,2013.8

ISBN 978-7-04-038201-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①田… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 174113 号

策划编辑 兰莹莹　责任编辑 杨 波　封面设计 李小璐　版式设计 马敬茹
插图绘制 黄建英　责任校对 殷 然　责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 三河市华润印刷有限公司
开 本 787 mm×960 mm 1/16
印 张 20.5
字 数 360 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2013 年 8 月第 1 版
印 次 2013 年 8 月第 1 次印刷
定 价 30.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 38201-00

# 前 言

本书主要面向独立学院、民办本科、专科院校非数学类专业的学生，具有一定数学知识（初等微积分与少量矩阵知识）的读者，也可以作为自修读本。

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门学科，也是数学中与现实世界联系最紧密、应用最广泛的学科之一，在金融、保险、经济与企业管理、工农业生产、军事、医学、地质学、空间技术、气象与自然灾害预报等方面有着重要的应用。数理统计学与其他学科相结合形成了许多边缘学科，如统计物理学、数量经济学、医学统计学、生物统计学、数量遗传学等，这些都说明了数理统计学的重要性。

由于学时的限制，我校原有的概率论与数理统计教材，在数理统计部分主要讲述了参数估计和假设检验，对方差分析和回归分析并没有介绍。这些实用性较强的基本内容如果教材完全不涉及，不能不说是一个缺憾。在本书的编写过程中，我们除了力求做到结构严谨，知识体系相对完整，例题丰富，通俗易懂外，还增加了数理统计部分实用性内容的比重，以及利用 Excel 中的一些命令来解决实际问题的案例。为了适应不同专业学生的教学需要，我们对书中的部分内容用“*”标出，教师可以根据实际情况选择讲解，学有余力的学生也可以自学这些内容。同时为了方便学生巩固知识及自学，每章末配有大量习题，并提供了参考答案。

本书共分十章。概率论部分（第一章到第五章）主要介绍概率论的基本概念、一维和二维随机变量及其分布、数字特征和极限分布等，依次由田琳、余世成、熊良鹏、苗嘉庆、杨卓东编写；数理统计部分（第六章到第九章）主要介绍数理统计中的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等，依次由马志民、徐广顺、张建亮、冯向东编写；最后的第十章为概率与统计中 Excel 的简单应用举例，由马致远编写。

熊良鹏、张建亮、冯向东对本书初稿进行了修改和整理，最后由田琳统稿和定稿。罗绍锡教授仔细地审阅了本书的初稿，并给出了许多宝贵的意见，对本书质量的提高起到了重要的作用。另外，詹小平和刘琴两位老师对本书前期准备

工作给予了一些帮助，在此表示感谢。同时也要感谢成都理工大学工程技术学院基础部杨志军、教务处郦仁给予本书的大力支持。

由于本书编者水平有限，加上时间仓促，难免存在疏漏与不足之处，敬请读者不吝赐教。

编者

2013 年 5 月

# 目　录

# 第一章 随机事件及其概率

**【概述】**

概率论是一门研究随机现象数量规律的学科,在自然科学和经济等领域有着重要应用.本章为读者介绍随机事件及其概率基本知识,内容主要包括古典概率的定义、条件概率及事件独立性等的概念及计算,是本门课程的基础.

## 1.1 随 机 事 件

在自然界和现实生活中,我们会碰到各类现象,这些现象按照产生的结果可以分为两类.一类是**确定性现象**,这类现象是在一定条件下,必定会导致某种确定的结果.例如,在标准大气压下,水加热到100℃必然会沸腾,温度降到零摄氏度必然会结冰.而另一类是**不确定性现象**,这类现象是在一定条件下,它们的结果却是不确定的.例如,一天内进入某电影院的观众数;一个国家一年中的新生婴儿数;一台洗衣机从开始使用到发生第一次故障的时间等.尽管第二类现象从单次试验或观察来看具有不确定性,但是在大量的重复性试验或观察中,却有规律可循.把这种在个别试验中其结果呈现出不确定性,在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象,称为**随机现象**.

许多影响事物发展的偶然因素的存在,是产生随机现象中不确定性的原因.例如,股市指数的变化取决于金融政策的变化,上市企业的经济状况,股民的经营行为以及其他国家的股市沉浮等诸多不确定因素.这些因素发展变化的偶然性,决定了股市升跌的随机性.

下面再举一些常见的随机现象的例子.

**例 1** 向空中抛硬币,这就是一个随机现象,首先它有两个结果,因为当硬币落地时,它可能正面朝上,也可能反面朝上,且究竟是哪面朝上,事先是不知道的.

**例 2** 一名大学生在篮球场的罚球线练习投篮,对于每次投篮,他可能投进,也可能投不进.即使他打篮球的技术很好,只能说他投进的可能性很大,并不能保证每次必进,这也是一种随机现象.

**例 3** 在 100 个同类产品中,有 80 个正品,20 个次品.从中任意抽出 2 个检验,那么抽到{2 个正品}、{1 个正品}和{零个正品}三种结果都有可能发生,至于出现哪种结果,由于是任意抽取,抽取前无法预料,这也是一种随机现象.

概率论和数理统计就是研究随机现象的一门数学学科,是数学的一个分支.在该门学科中,通过随机试验对随机现象进行研究,同时还会引入一些相关概念,如样本空间,随机事件等,以下将对这些概念进行专门介绍.

### 1.1.1 随机试验

为了研究随机现象的统计规律,我们需通过试验来观察随机现象.

**定义 1** 将这种以随机现象为观察对象的试验统称为**随机试验**,简称**试验**,通常用字母 E 表示.

试验是一个广泛的术语,它包括各种各样的科学实验,也包括对客观事物进行的调查、观察或测量等.本书以后提到的试验都指随机试验.随机试验应具有如下三个特征:

(1) 可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

下面举一些随机试验的例子.

**例 4** 抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

**例 5** 从一批产品中,依次任选 5 件,记录出现正品与次品的件数.

**例 6** 观察某些地区 8 月份的平均气温.

**例 7** 从一批灯泡中任取一只,测试其寿命.

**例 8** 连续射击 3 次,观察各次中靶与否.

**例 9** 记录某电话站在上午 8 时至10 时接到的电话次数.

上面几个例子,都具备随机试验的三个特征,以例 4 来说,首先这个试验可以在相同的条件下重复地进行,也就是可以多次抛掷;试验的所有可能结果是明确的,可能是 1 点,2 点,3 点,4 点,5 点或 6 点,但进行一次试验之前究竟会掷到几点,却不知道.

### 1.1.2 样本空间

**定义 2** 随机试验 $E$ 的所有可能结果组成的集合称为 $E$ 的**样本空间**,记

为 $\Omega$. 样本空间中的元素,即试验 $E$ 的每一个可能的结果,称为**样本点**. 用 $\omega$ 表示.

现代集合论为表述随机试验提供了一个方便的工具,使我们能更好地刻画随机试验.

**例 10** 将一枚硬币抛掷两次,观察正面 $H$,反面 $T$ 出现的情况,则样本空间为

$$\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\},$$

样本点有 4 个,分别是$(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)$.

若试验是将一枚硬币抛掷两次,观察正面出现的次数,则样本空间是

$$\Omega = \{0,1,2\},$$

样本点有 3 个,分别是 0,1,2.

由例 10 可见,同样的随机试验,但由于试验者的目的不一样,样本空间的元素也会不一样. 所以我们在进行随机试验时,一定要明确试验目的是什么.

**例 11** 从装有三支红笔(记为 1,2,3 号)与两支黑笔(记为 4,5 号)的盒子中任取两支笔.

(1) 观察取出的两支笔的颜色,则样本空间是

$$\Omega = \{\omega_{00},\omega_{11},\omega_{01}\},$$

其中,$\omega_{00}$表示事件"取出两支红笔",$\omega_{11}$表示事件"取出两支黑笔",$\omega_{01}$表示事件"取出一支红笔与一支黑笔".

(2) 观察取出的两支笔的编号,则样本空间是

$$\Omega = \{\omega_{12},\omega_{13},\omega_{14},\omega_{15},\omega_{23},\omega_{24},\omega_{25},\omega_{34},\omega_{35},\omega_{45}\},$$

其中,$\omega_{ij}$表示事件"取出第 $i$ 号与第 $j$ 号笔".

**例 12** 考察一个晶体管的寿命(单位:h),那么样本空间是所有非负实数,即

$$\Omega = \{x \mid 0 \leqslant x < +\infty\}.$$

**例 13** 赛车比赛中一共有 8 辆车参赛,这 8 辆车分别标以序号 1,2,3,4,5,6,7,8,考察比赛结果,所有可能的比赛结果的集合

$$\Omega = \{(1,2,3,4,5,6,7,8) \text{ 的所有 } 8! \text{种排列}\}$$

就是该试验样本空间. 例如,(3,2,4,5,1,6,7,8)就表示 3 号车跑第一,2 号车跑第二,接下来是 4 号车等,这是比赛的一种可能结果.

### 1.1.3 随机事件

在实际中,当我们进行随机试验时,有时可能并不是关心试验的所有结果,而是对满足某些条件的样本点所构成的集合感兴趣. 例如,在前面例 12 中考察

晶体管寿命的试验中,样本空间为 $\Omega=\{x \mid 0 \leqslant x<+\infty\}$,如果我们关心的是晶体管能否正常工作超 1 000 h,那么满足这一条件的样本点组成 $\Omega$ 的一个子集:$A=\{t \mid t>1000\}$. 这里的 $A$ 称为试验 $E$ 的一个随机事件.

**定义 3**　随机试验 $E$ 的样本空间 $\Omega$ 的子集(或某些样本点的子集),称为 $E$ 的**随机事件**,简称**事件**,常用 $A,B,C$ 等表示.

每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生.

以例 9 为例,$A=\{$恰好接到 3 次电话$\}$,$B=\{$没有接到电话$\}$,$C=\{$有电话$\}$,$D=\{$接到至多 4 次电话$\}$等都是这个随机试验的事件,这些事件,有的简单,有的复杂. 复杂事件是由若干简单事件组成的,当且仅当组成它的简单事件之一发生时它才发生. 例如,事件 $C$ 是由$\{$恰好接到 1 次电话$\}$,$\{$恰好接到 2 次电话$\}$,…,这无穷多个简单事件组成. 简单事件是试验的最基本可能结果,是不能再分解的事件. 我们分别称这两类事件为复合事件和基本事件.

**基本事件**:不可能再分解的事件,或者说是由一个样本点组成的单点集.

**复合事件**:由若干个基本事件组合而成的事件.

必须指出,一个事件是否是基本事件,是相对于试验的目的而言的,例如

$E_1$:射击一次,观察命中与否;

$E_2$:射击一次,观察命中的环数.

这两个试验的方式相同,但是目的不同,$\{$命中$\}$这个事件在 $E_1$ 中是基本事件,在 $E_2$ 中则是由$\{$命中 1 环$\}$,$\{$命中 2 环$\}$,…,$\{$命中 10 环$\}$这十个基本事件复合而成的事件.

最后规定两种特殊的随机事件:

必然事件:样本空间 $\Omega$ 包含所有的样本点,它是 $\Omega$ 自身的子集,在每次试验中它总是发生的,$\Omega$ 称为**必然事件**.

不可能事件:空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,它也是样本空间 $\Omega$ 的子集,在每次试验中都不发生,把 $\varnothing$ 称为**不可能事件**.

必然事件在试验中必然发生. 相反地,不可能事件在任何试验中都不可能发生. 必然事件与不可能事件可以说不是随机事件,但为了今后研究方便,我们还是把必然事件与不可能事件作为随机事件的两个极端情形来统一处理.

以例 4 为例,骰子$\{$出现 1 点$\}$,$\{$出现 2 点$\}$,…,$\{$出现 6 点$\}$,$\{$点数不大于 4$\}$,$\{$点数为偶数$\}$,$\{$点数不大于 6$\}$,$\{$点数大于 6$\}$等都是随机事件. 其中,$\{$出现 1 点$\}$,$\{$出现 2 点$\}$,…,$\{$出现 6 点$\}$为基本事件;$\{$点数不大于 6$\}$就是必然事件;$\{$点数大于 6$\}$是不可能事件.

## 1.2 事件间的关系与事件运算

在一个样本空间中定义的事件可以不止一个.在实际生活中,往往要求我们同时考察几个在同样条件下的事件及它们之间的联系.详细地分析事件之间的关系,不仅可帮助我们更深刻地认识事件的本质,而且可以简化一些复杂事件的研究.

下面我们就来讨论事件间的关系与事件的运算.

试验 $E$ 的样本空间为 $\Omega$,而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 $\Omega$ 的子集.

(1) **包含关系**:如果事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生,则称事件 $B$ 包含事件 $A$,记为 $A\subset B$.

例如,$A=\{$球的标号为6$\}$这一事件就导致事件 $B=\{$球的标号是偶数$\}$的发生.因为摸到标号为6的球意味着标号为偶数的球出现了,所以后者包含了前者.

(2) **相等关系**:若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则事件 $A$ 与事件 $B$ 相等,记为 $A=B$.

例如,若 $A=\{$球的标号为不超过10的偶数$\}$,$B=\{$球的标号为2,4,6,8,10$\}$,则显然有 $A=B$.

(3) **和事件**:事件 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的和事件.事件 $A\cup B$ 发生当且仅当事件 $A,B$ 中至少有一个发生.$A\cup B$ 也记作 $A+B$.

例如,$A=\{$球的标号为不超过10的偶数$\}$,$B=\{$球的标号小于等于3$\}$,则

$$A\cup B=\{\text{球的标号为}1,2,3,4,6,8,10\}.$$

类似地,称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件;称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和事件.

(4) **积事件**:事件 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的积事件.事件 $A\cap B$ 发生当且仅当事件 $A,B$ 同时发生.$A\cap B$ 也记作 $AB$.

例如,$A=\{$球的标号为不超过10的偶数$\}$,$B=\{$球的标号小于等于3$\}$,则

$$A\cap B=\{\text{球的标号为}2\}.$$

类似地,称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件;称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的积事件.

(5) **差事件**:事件 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的差事件.事件 $A-B$ 发生当且仅当事件 $A$ 发生且事件 $B$ 不发生.

例如,$A=\{$球的标号为不超过10的偶数$\}$,$B=\{$球的标号小于等于3$\}$,则

$$A - B = \{球的标号为4,6,8,10\}$$

(6) **事件互斥**:若 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 $A$ 与 $B$ 是**互不相容**的,或**互斥**的. 这指的是事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同时发生. 基本事件是两两互不相容的.

例如,$A=\{球的标号为偶数\}$,$B=\{球的标号为3\}$,则显然事件 $A$ 与事件 $B$ 不可能同时发生,即有 $A\cap B=\varnothing$.

(7) **事件对立**:若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 $A$ 与事件 $B$ 互为**逆事件**,又称事件 $A$ 与事件 $B$ 互为**对立事件**. 这指的是对每次试验而言,事件 $A,B$ 中必有一个发生,且仅有一个发生. $A$ 的对立事件记为 $\overline{A}$. $\overline{A}=\Omega-A$.

例如,样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,$A=\{球的标号为不超过10的偶数\}$,则

$$\overline{A}=\{球的标号为不超过10的奇数\}.$$

**例1** 盒子中装有4支红笔和2支黑笔,我们考虑依次从中摸出两支笔时所可能出现的事件. 若对笔进行编号,4支红笔分别编为1,2,3,4号,2支黑笔编为5,6号,如果用数对 $(i,j)$ 表示第一次摸得 $i$ 号笔,第二次摸得 $j$ 号笔,则可能出现的结果是

$$\begin{array}{l}(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5).\end{array}\tag{1-1}$$

事件 $A$:第一次摸出黑笔;

事件 $B$:第二次摸出黑笔;

事件 $C$:第一次及第二次都摸出黑笔.

本例的30种可能结果就是样本点全体,即样本空间 $\Omega$,它们构成必然事件.

事件 $A$ 由(1-1)第5行及第6行的10个样本点构成;这时 $\overline{A}$ 表示事件"第一次摸得红笔",它由第1行至第4行的20个样本点构成. 显然 $A$ 与 $\overline{A}$ 互不相容,而且二者相加构成必然事件.

事件 $B$ 由下列10个样本点构成:

$$\begin{array}{l}(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,5),\\(3,6),(4,5),(4,6),(5,6),(6,5).\end{array}$$

$A\cup B$ 表示事件"第一次或第二次中至少有一次摸得黑笔",它包含下列18个样本点: