# 示范性高中“提前录取”

# 直通车

知识拓展加深　答题思路指导　名校真题精析　高仿题库练习

- 33位命题教师参与联合编写
- 18所重点高中联合推荐的中考自招首选书
- 随书配套价值￥50“学习服务卡”

**数学**

英语/物·化/政·面

3大权威机构联合策划

昂立教育　新课程 newclasses.org / 上海新知文化发展有限公司 Shanghai New Knowledge Culture Development Co.,LTD / 上海交通大学出版社 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

中学生名师辅导领军品牌
畅销书《高校自主招生考试直通车》总策划

“新知杯”数学竞赛协办单位、
“恒源祥全国作文大赛上海赛区”主办方

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

权威

# 示范性高中“提前录取”直通车

# 数　　学

本书编写组　主编

上海交通大学出版社

## 内 容 提 要

本书是针对广大初三考生应对“提前录取”招生测试尤其是各学科的备考要领而编写的。全书共分三个篇，第一篇为基础篇，分13个讲；第二篇为拓展篇，分7讲，第三篇为4套模拟试卷。书末附有参考答案。

本书除作为自荐考用外，也可作为进入高中后的适应从初三到高一过渡使用的书籍。

**图书在版编目(CIP)数据**

示范性高中“提前录取”直通车. 数学/《示范性高中“提前录取”直通车》编写组主编. —上海：上海交通大学出版社，2013

ISBN 978-7-313-09542-8

Ⅰ. 示...　Ⅱ. 示...　Ⅲ. 中学数学课—初中—升学参考资料　Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 057236 号

示范性高中“提前录取”直通车

数　学

《示范性高中“提前录取”直通车》编写组　主编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号　邮政编码 200030)

电话：64071208　出版人：韩建民

常州市武进第三印刷有限公司 印刷　全国新华书店经销

开本：787mm×1092mm 1/16　印张：14.75　字数：360 千字

2013 年 4 月第 1 版　2013 年 4 月第 1 次印刷

印数：1～6 000

ISBN 978-7-313-09542-8/G　定价：32.00 元

---

# 备考“提前录取”招生　不打无准备之仗

（代　序）

熊丙奇

对于上海的示范性高中“提前录取”招生，有一种说法是，不需要作任何准备，拿着一支笔进考场，展现“原生态”的自己即可。

这要看怎么准备。如果是仓促上阵，“临时抱佛脚”，当然没有必要——不要说应对“提前录取”招生不必要，就是对传统的中考也没多大作用。但如果是说所有学生在备考过程中都不需要任何准备，那么，有一个问题就很值得思考：“提前录取”改革的意义究竟何在？

高中“提前录取”招生改革，显然意在引导中学的教和学都能发生根本性的变化。而如果中学老师的教和学生的学，都不为“提前录取”招生“所动”，还是按照传统的方式按部就班进行，那么这项改革的意义和价值就十分有限了——只不过增加了一条新的进入重点示范性高中的途径罢了。

依照《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010～2020 年）》所确定的考试招生制度改革精神，大学的自主招生改革和高中的招生改革是不可逆转的，对此，很有必要以全新的观念正确认识高中“提前录取”招生改革。对于“提前录取”招生，我认为，有必要准备，而且需要认真准备。

首先，是长远的准备。其实，无论是大学的自主招生还是高中的“提前录取”招生，关注的都是学生的六大核心能力，具体包括学习能力、思维能力、观察能力、沟通能力、表达能力、心理能力（素质），只是关注的程度、要求的高低有所不同而已。这些能力，必须在求学过程中通过长期积累才能最终形成。如果学校和学生都能关注以上这六方面能力的培养，那么，高中“提前录取”招生改革也就实现了对初中教和学的引导。

比如，“提前录取”招生考查思维能力，强调的是学生的独立思考，而这，正是我国中学生目前相当缺乏的一项基本素质——在分析某一个问题时，只会按标准答案回答，没有自己独创的看法。这是传统评价体系和灌输教育的结果。要培养独立思考的能力，老师就必须改变传统的教育方式，给学生自由思维的空间，而同学们也不要人云亦云，只会死记硬背标准答案，而要学会独立思考，辩证思维。

其次，是临考前的准备。一个大家十分关心的问题是，“提前录取”招生测试究竟能不能突击准备？这就要分析“提前录取”招生的测试形式和测试内容了。

笔试，是每所“提前录取”招生学校测试的基本环节之一，与中考没有本质差别，都是学科考试。当然，“提前录取”笔试与中考相比也有两方面的不同。一是比中考难度更高。大家知道，中考是一张卷子考全市所有学生，而“提前录取”笔试则针对有希望被这些学校录取的学生。二是考题更灵活，更注重考查学生对知识的运用。如果只会死记硬背，不能活学活用，是很难获得笔试高分的。针对笔试的上述特点，同学们需要了解出题的形式、题型和解题的思路

等,把笔试当作一次难度和灵活性更大的中考模拟考并进行适当的准备。

面试,是“提前录取”招生与传统中考最大的不同点,也是我们中学生最困惑、难把握的地方。面试,顾名思义,就是老师与学生面对面进行交流,通过交流考查学生的能力和素质。“提前录取”面试内容,有两大特点。一是面试基本不再涉及学科知识考查。对于学科知识的考查,已经通过笔试完成,而且每个学生事先也向学校提供了自己的初中学习成绩,因此,“提前录取”面试如果再重点考查学科知识显然没有必要,学校通常会利用这段宝贵的时间考查学科知识之外的推理能力、观察能力、沟通能力和协作能力。二是“提前录取”面试题目大多是开放式的,不是标准化试题,也没有标准答案。

所以说,在“提前录取”面试中真实、自然地表现自己,就是最大的成功。当然这么说,并不意味着对“提前录取”面试不需要作任何准备。可以略作准备的,包括:对“提前录取”招生的形式进行“准备”,了解报考学校招生的大体形式、程序、规定等——你如果连这所学校“提前录取”招生的形式都不了解,就有可能在到达考场后对周围的一切感到非常陌生。有的同学一看面试自己的是几位教师就心中直打鼓,便是缺乏准备的表现之一;而如果你事先了解了这种面试形式,就会有一定的心理准备。对报考学校的情况进行“准备”——选择一所学校,应该有长远的规划,中学生应该根据自己的个性、能力来确定未来发展目标,而参加“提前录取”招生的过程,其实也是实现这一规划的过程。

这套《示范性高中“提前录取”直通车》丛书,为同学们准备“提前录取”招生提供了全方位的指南——从“提前录取”的政策演变到报考策略的最佳选择,丛书每册均由多所示范性高中命题专家参与编写,从面试攻略指津、历年试题回顾到数学、英语、物理、化学学科的详尽点拨,林林总总,包揽无遗,在内容的广度和深度上,针对提前录取考试进行了有效拓展,在深化初中学科知识同时,更注重学生学科素养和能力培养,相信会助大家一臂之力。当然,每个同学的情况各不相同,把握“提前录取”招生机会,还在于找到最适合自己的办法。

祝愿每位同学能抓住“提前录取”招生机会,完美实现自己的学业规划,进入自己理想的高中学校。

(本文作者为21世纪教育研究院副院长,上海交通大学教授,著名教育学者)

# 目　录

## 基　础　篇



## 拓　展　篇



## 模 拟 试 卷

# 第一讲　数及其运算

本讲主要包括实数的概念、性质、法则和运算的方法，对运算能力的要求要关注运算法则的理解，包括有理数和实数的运算、$n$ 次根式和指数式的运算.

## 一、主要知识点

实数及其运算是中学数学的一个重要而又基础的内容，主要是实数的性质。本专题还包括根式、指数式的一些运算. 这会联系到整式的运算法则以及一些数学思想方法.

## 二、典型例题

**例 1**：已知

$$(x+y-1)^2+|2x-y+4|=0.$$

求 $3x+5y$ 的值.

解：由题意得 $\begin{cases}x+y-1=0\\2x-y+4=0\end{cases}$，解此方程组得 $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$，所以 $3x+5y=7$.

点评：在实数中有一些常用的基本性质.

对于任意实数 $a$，则以下不等式恒成立：$a^{2n}\geqslant 0$（$n$ 是正整数），$|a|\geqslant 0$.

如果 $a\geqslant 0$，那么 $\sqrt[n]{a}\geqslant 0$. 如果 $\sqrt[2n]{a}$ 有意义，那么 $a\geqslant 0$.

有限个非负数的和等于零，则每个非负数都为零.

**例 2**：在实数范围内计算下式的值

$$y=\left|\left|\sqrt{-(x-1)^2}\pm 2\right|\pm 3\right|.$$

解：因为 $\sqrt{-(x-1)^2}$ 有意义，所以 $-(x-1)^2\geqslant 0$，即 $(x-1)^2\leqslant 0$，故 $(x-1)^2=0$，所以得到 $y=\left|\left|\sqrt{-(x-1)^2}\pm 2\right|\pm 3\right|=||\pm 2|\pm 3|=|2\pm 3|=5$ 或 $1$.

点评：如果偶次根式有意义，那么被开方数一定是非负数.

**例 3**：若 $a$、$b$、$c$ 为实数，

$$A=a^2-2b+\frac{\pi}{2},B=b^2-2c+\frac{\pi}{3},C=c^2-2a+\frac{\pi}{6}.$$

证明：$A$、$B$、$C$ 中至少有一个的值大于零.

证明：由题设有

$$\begin{aligned}A+B+C&=\left(a^2-2b+\frac{\pi}{2}\right)+\left(b^2-2c+\frac{\pi}{3}\right)+\left(c^2-2a+\frac{\pi}{6}\right)\\&=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(c^2-2c+1)+(\pi-3)\\&=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(\pi-3).\end{aligned}$$

因为 $(a-1)^2\geqslant 0,(b-1)^2\geqslant 0,(c-1)^2\geqslant 0,(\pi-3)>0$，所以 $A+B+C>0$.

所以 $A$、$B$、$C$ 中至少有一个的值大于零.

点评：有限个非负数的和为非负数，有限个非正数的和为非正数，非负数与正数的和为

正数.

**例 4**:计算$\frac{2013^3+2014\times2012-2014\times2013^2}{2013^3-2012\times2014-2012\times2013^2}$.

解:设 $2013=a$,则 $2012=a-1$,$2014=a+1$,得

$$原式=\frac{a^3+(a+1)\times(a-1)-(a+1)\times a^2}{a^3-(a+1)\times(a-1)-(a-1)\times a^2}=\frac{-1}{1}=-1.$$

点评:换元法是数学中一个非常重要而且应用十分广泛的解题方法.从数学上来讲,所谓的换元法,就是在一个比较复杂的数学式子中,用新的变元去代替原式的一个部分或改造原来的式子,使原式简化,从而使问题易于解决.换元法在因式分解、解各类方程、证明不等式等方面应用较多,用换元法解题经常能起到化难为易、以简驭繁的作用.

**例 5**:化简:$\sqrt{11+2\sqrt{18}}$.

解:原式$=\sqrt{9+2\sqrt{18}+2}=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}=3+\sqrt{2}$.

点评:通过观察可以知道,$2\sqrt{18}=6\sqrt{2}$,因此 $11+2\sqrt{18}=9+6\sqrt{2}+2=3^2+6\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=3^2+2\times3\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=(3+\sqrt{2})^2$;

或者也可以这样:$11+2\sqrt{18}=9+2\sqrt{18}+2=9+2\sqrt{9\times2}+2=(\sqrt{9}+\sqrt{2})^2=(3+\sqrt{2})^2$.

一个问题的解决往往可以有多种方法,关键是根据实际需要选择合适的、简便的.本题是一个二次根式化简的常规题型,因为带有两重根号,只要将其配成完全平方形式,就可以非常简便地进行化简.

**例 6**:已知 $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$,$y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,求 $x^2-5xy+y^2$ 的值.

解:原式$=(x+y)^2-7xy=(2\sqrt{3})^2-7\times1=5$.

点评:本题若把 $x$、$y$ 直接代人较为复杂,但因为 $x+y=2\sqrt{3}$,$xy=1$,用配方法将代数式变形成与 $x+y$、$xy$ 有关的式子,则可简化运算.本题由于给出的条件比较特殊,因此计算时需要一定的技巧,如果对配方法解决此类问题比较熟悉,这样的题目就非常好解,否则就需要花费很多时间,运算量非常大.

**例 7**:观察下列分母有理化的计算:

$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}=\sqrt{2}-\sqrt{1}$,$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}$,$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}=\sqrt{5}-\sqrt{4}$,…从计算结果中找出规律,并利用这一规律计算:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2014}+\sqrt{2013}}\right)(\sqrt{2014}+1).$$

解:
$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2014}+\sqrt{2013}}\right)(\sqrt{2014}+1)\\&=(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{2014}-\sqrt{2013})(\sqrt{2014}+1)\\&=(\sqrt{2014}-1)(\sqrt{2014}+1)=2014-1=2013.\end{aligned}$$

点评:“裂项相消法”是数列求和的重要方法之一,又如$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$可用于化简$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}$,等等.

**例 8**:对于任意实数 $x$、$y$,定义新运算“$*$”为 $x*y=x+y+xy$,则运算 $*$(　　).

A. 满足交换律,但不满足结合律　　B. 不满足交换律,但满足结合律

C. 既不满足交换律,也不满足结合律　　D. 既满足交换律,也满足结合律

解:因为定义新运算“$*$”为 $x*y=x+y+xy$,所以 $y*x=x+y+xy$,所以 $x*y=y*x$,所以运算 $*$ 满足交换律;

因为 $x*(y*z)=x*(y+z+yz)=x+y+z+yz+x(y+z+yz)=x+y+z+yz+xy+xz+xyz$,

$(x*y)*z=(x+y+xy)*z=x+y+xy+z+z(x+y+xy)=x+y+z+yz+xy+xz+xyz$,

所以 $x*(y*z)=(x*y)*z$;运算 $*$ 满足结合律. 故选 D.

点评:对于“新定义”类型的问题,关键是要理解“定义”的内涵,并能准确运用.

## 三、自我训练

### A 组

(一) 选择题

1. 化简二次根式 $a\sqrt{-\frac{a+2}{a^2}}$ 的结果是(　　).

A. $\sqrt{-a-2}$　　B. $-\sqrt{-a-2}$　　C. $\sqrt{a-2}$　　D. $-\sqrt{a-2}$

2. 对于正实数 $a$ 与 $b$,定于新运算“$*$”如下:$a*b=\frac{ab}{a+b}$,则 $4*(4*4)$ 等于(　　).

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

3. 某同学设计了一个关于实数运算的程序:输入一个数后,输出的数总是比该数的平方小 1,若按照此程序输入 $\sqrt{2014}$ 后,输出的结果应为(　　).

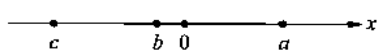
A. 2011　　B. 2012　　C. 2013　　D. 2014

4. $\frac{ab}{|ab|}(ab\neq0)$ 的所有可能的值有(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

(二) 填空题

5. 设实数 $a$、$b$、$c$ 在数轴上的对应点如图所示,




化简 $|b-a|-|a-c|+|c-b|=$________.

6. 若 $a<b$,则 $|x-a|+|x-b|$ 的最小值为________.

7. 计算:$\left(\sqrt{48}-4\sqrt{\frac{1}{8}}\right)-\left(3\sqrt{\frac{1}{3}}-4\sqrt{0.5}\right)=$________.

8. 已知:$a<0$,化简 $\sqrt{4-\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{4+\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=$________.

9. 对于下列判断:

① 坐标平面上的点与全体实数一一对应；

② 横坐标为 0 的点在 $x$ 轴上；

③ 纵坐标小于 0 的点一定在 $x$ 轴下方；

④ 到 $x$ 轴、$y$ 轴距离相等的点一定满足横坐标等于纵坐标；

⑤ 若直线 $l//x$ 轴，则 $l$ 上的点横坐标一定相同.

其中所有错误判断的序号是________.

10. 请你规定一种适合任意非零实数 $a$、$b$ 的新运算“$a\otimes b$”，使得下列算式成立：

$1\otimes2=2\otimes1=3,(-3)\otimes(-4)=(-4)\otimes(-3)=-\frac{7}{6},(-3)\otimes5=5\otimes(-3)=-\frac{4}{15},\cdots$

你规定的新运算 $a\otimes b=$________(用 $a,b$ 的一个代数式表示).

11. 要使等式 $|2x-6|=|x-2|+|x-4|$ 成立，则 $x$ 的取值范围是________.

12. 已知 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$，且 $\sqrt{a}=m+\frac{a-b}{2}$，$\sqrt{b}=n-\frac{a-b}{2}$，其中 $m$、$n$ 均为有理数，则 $m^2+n^2$ 的值为________.

(三) 解答题

13. 已知 $\frac{|a+\sqrt{3}|+\sqrt{b^2-1}}{b-1}=0$，求 $a^3+b^3$ 和 $a^2-ab+b^2$ 的值.

14. 化简：$\sqrt{2a^2-b^2+2a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}}\,(a>\sqrt{2}b>0)$.

15. 已知 $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ 的整数部分为 $x$，小数部分为 $y$，试求 $x+y+\frac{1}{y}$ 的值.

16. 阅读理解题

(1) 判断下列 3 个式子是否正确：

① $\frac{1}{4\times5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$　　　(　　)

② $\frac{1}{5\times6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$　　　(　　)

③ $\frac{1}{6\times7}=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$　　　(　　)

(2) 根据上述结论，计算：

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{90}$;

(3) 计算：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}$.

**B 组**

1. 已知$(p^2+q^2)s^2-2q(p+r)s+q^2+r^2=0$.求证：$q^2=pr$.

2. 已知 $x$、$y$ 为实数，若规定 $x*y=4xy$，

(1)求$\sqrt{2}*4$；

(2)若 $x*x+2*x-2*4=0$，求 $x$ 的值；

(3)若不论 $x$ 是什么实数，总有 $a*x=x$，求 $a$ 的值.

3. 已知对任意给定的正整数 $n$，存在整数 $p$、$q$，$0\leqslant q<p$，使得 $n=\frac{1}{2}p(p-1)+q$，求证：满足条件的数对 $p$、$q$ 是唯一的.

4. 阅读下面材料，并解答下列各题：

在形如 $a^b=N$ 的式子中，我们已经研究过两种情况：

① 已知 $a$ 和 $b$，求 $N$，这是乘方运算；

② 已知 $b$ 和 $N$，求 $a$，这是开方运算；

现在我们研究第三种情况：已知 $a$ 和 $N$，求 $b$，我们把这种运算叫做对数运算.

定义：如果 $a^b=N(a>0,a\neq1,N>0)$，则 $b$ 叫做以 $a$ 为底 $N$ 的对数，记作 $b=\log_a N$.

例如：因为 $2^3=8$，所以 $\log_2 8=3$；因为 $2^{-3}=\frac{1}{8}$，所以 $\log_2\frac{1}{8}=-3$.

(1) 根据定义计算：

① $\log_3 81=$________；② $\log_3 3=$________；③ $\log_3 1=$________；

④ 如果 $\log_x 16=4$，那么 $x=$________.

(2) 设 $a^x=M$，$a^y=N$，则 $\log_a M=x$，$\log_a N=y(a>0,a\neq1,M$、$N$ 均为正数)，

因为 $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$，所以 $a^{x+y}=M\cdot N$　所以 $\log_a MN=x+y$，

即 $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

这是对数运算的重要性质之一，进一步，我们还可以得出：

$\log_a M_1M_2M_3\cdots M_n=$____________________

(其中 $M_1$、$M_2$、$M_3$、…、$M_n$ 均为正数，$a>0$，$a\neq1$)

$\log_a\frac{M}{N}=$________($a>0,a\neq1,M$、$N$ 均为正数).

# 第二讲 整 式

整式的运算是对数的运算的推广和一般化，包括幂的运算如整式的乘方与除法运算，列代数式、合并同类项，会进行整式的计算和因式分解.

## 一、主要知识点

本讲内容包括整式的加、减、乘、除及乘方运算以及因式分解，它既是实数的运算的一般形式，又是数学学习的重要基础，要求掌握运用整式的运算法则对整式进行恒等变形的基本技能，掌握对多项式进行因式分解的基本方法.

## 二、典型例题

**例 1**:已知 $a^2+a-1=0$，求 $a^3+2a^2+2007$ 的值.

解法一(整体代入)：由 $a^2+a-1=0$ 得 $a^3+a^2-a=0$.

所以：$a^3+2a^2+2\,007=a^3+a^2-a+a^2+a+2\,007=a^2+a-1+2\,008=2\,008$.

解法二(降次)：方程作为刻画现实世界相等关系的数学模型，还具有降次的功能.

由 $a^2+a-1=0$，得 $a^2=1-a$，

所以：$a^3+2a^2+2\,007=a^2\cdot a+2a^2+2\,007=(1-a)\cdot a+2a^2+2\,007=a^2+a+2\,007=1-a+a+2\,007=2\,008$.

解法三(降次、消元)：$a^2+a=1$(消元、减项).

$a^3+2a^2+2\,007=a^3+a^2+a^2+2\,007=a(a^2+a)+a^2+2\,007=a+a^2+2\,007=1+2\,007=2\,008$.

点评：本题常用的方法是降次法，通过降次最后使 $a^3+2a^2+2\,007$ 化为一个常数，但是用降次法，变形过程较为复杂且容易出错. 而用零代换只要掌握变形的技巧，计算比较简便.

**例 2**:分解因式：$x^3+2x-3$.

解法一(拆项)：$x^3+2x-3=3x^3-3-2x^3+2x=3(x-1)(x^2+x+1)-2x(x^2-1)=(x-1)(x^2+x+3)$.

解法二(添项)：$x^3+2x-3=x^3-x^2+x^2+2x-3=x^2(x-1)+(x-1)(x+3)=(x-1)(x^2+x+3)$.

点评：此题无法用常规思路分解，需拆添项，观察多项式发现当 $x=1$ 时，它的值为 0，这就意味着 $x-1$ 是 $x^3+2x-3$ 的一个因式，因此变形的目的是凑 $x-1$ 这个因式. 拆添项法也是分解因式的一种常见方法，请同学们试拆一次项和常数项，看看是否可解？

因式分解的常用方法：

(1) 提公因式法：$ab+ac=a(b+c)$.

(2) 运用公式法：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$.

(3) 分组分解法：$ac+ad+bc+bd=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)$.

(4) 十字相乘法：$a^2+(p+q)a+pq=(a+p)(a+q)$.

(5) 拆添项法.

**例 3**：设 $x$ 为自然数数，试判断 $10+5x+x(x+2)$ 是质数还是合数，请说明理由.

解：$10+5x+x(x+2)=5(2+x)+x(x+2)=(x+2)(x+5)$.

因为 $x+2$，$5+x$ 都是大于 1 的自然数，

所以 $(x+2)(5+x)$ 是合数.

点评：在大于 1 的正整数中，除了 1 和这个数本身，还能被其它正整数整除的数叫合数. 只能被 1 和其本身整除的数叫质数.

**例 4**：若 $5a^{2+n}b^{n+m}=5a^3b^5\div a^2b$，求 $m$、$n$ 的值.

解：等式右边化简得 $5a^{2+n}b^{n+m}=5a^3b^5\div a^2b=5ab^4$，因此 $2+n=1$，$n+m=4$，

解得 $n=-1$，$m=5$.

点评：整式的运算法则：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$（$m$，$n$ 为正整数）.

$(a^m)^n=a^{mn}$（$m$，$n$ 为正整数）.

$(ab)^n=a^nb^n$（$m$，$n$ 为正整数）.

$a^m\div a^n=a^{m-n}$（$m$，$n$ 为正整数）.

**例 5**：若整式 $(2x^2+ax-y+6)-(2bx^2-3x+5y-1)$ 的值与字母 $x$ 的取值无关，求整式 $-\frac{3}{4}a^2+2b^2-(\frac{1}{4}a^2-3b^2)$ 的值.

解：对整式进行合并同类项得：

$(2x^2+ax-y+6)-(2bx^2-3x+5y-1)=2(1-b)x^2+(a+3)x-6y+7$，

因为上整式的值与字母 $x$ 的取值无关，所以 $b=1$，$a=-3$，

而整式 $-\frac{3}{4}a^2+2b^2-(\frac{1}{4}a^2-3b^2)=-a^2+5b^2$.

整式 $-\frac{3}{4}a^2+2b^2-(\frac{1}{4}a^2-3b^2)$ 的值为 $-a^2+5b^2=-9+5=-4$.

点评：解与字母系数有关的多项式问题，一般要先合并同类项；求代数式的值，一般应先化简代数式，后求值.

**例 6**：(1) 已知 $a=\sqrt{3}-1$，求 $a^{2013}+2a^{2012}-2a^{2011}$ 的值.

(2) 若 $a=2012x+2012$，$b=2012x+2013$，$c=2012x+2014$，求多项式 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值.

解：(1) 因为 $a^2=(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3}$，所以 $a^2+2a-2=4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2-2=0$.

所以 $a^{2013}+2a^{2012}-2a^{2011}=a^{2011}(a^2+2a-2)=0$.

(2) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=3$.

点评：解此类求整式的值问题，如果直接代入求值，肯定麻烦，有时甚至不能求出值. 一般

是通过寻找已知条件和结论间的联系，分析整式的结构特点，对整式施行变形，运用“整体思想”解决问题.

**例 7**：观察下列等式：$4^2-2^2=12=8\times1+4$；

$6^2-4^2=20=8\times2+4$；

$8^2-6^2=28=8\times3+4$；

$10^2-8^2=36=8\times4+4$；

……

试回答下列问题：

(1) 通过观察，请再写出一个符合上述规律的等式：______________；

(2) 通过观察，你能发现什么规律？请用含 $n$($n$ 是正整数)的等式表示：

____________________________；

(3) 你能否利用上述给出的一系列反映规律的等式，推导出公式：

$$1+2+3+4+5+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

若能，请写出推导过程；若不能，请说明理由.

解：(1) $\underline{12^2-10^2=44=8\times5+4}$ 等；

(2) $\underline{(2n+2)^2-(2n)^2=8n+4}$；

(3) 解：能.

把上述等式相加得

$(2n+2)^2-(2n)^2+(2n)^2-(2n-2)^2+\cdots+4^2-2^2=8n+4+\cdots+4$，

整理得 $4n^2+4n=8(1+2+\cdots+n)$，

所以 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

点评：这是一类探究性问题，也是中考(包括高中“提前录取”考试)试卷常见的题型之一，要求考生能根据一列有限的特殊事例，根据等式的结构特点，归纳出一般性结论，然后根据整式的运算法则给予证明.

**例 8**：已知：$a$、$b$、$c$ 为三角形的三边，比较 $(a^2+b^2-c^2)^2$ 和 $4a^2b^2$ 的大小.

解：因为

$$\begin{aligned}(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2&=(a^2+b^2-c^2+2ab)(a^2+b^2-c^2-2ab)\\&=[(a+b)^2-c^2][(a-b)^2-c^2]\\&=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c).\end{aligned}$$

因为 $a$、$b$、$c$ 为三角形三边，由三角形两边之和大于第三边可知

$a+b+c>0$，$a+b-c>0$，$a-b+c>0$，$a-b-c<0$.

所以 $(a^2+b^2-c^2)-4a^2b^2<0$.

所以 $a^2+b^3-c^2<4a^2b^2$.

点评：比较两整式大小最基本的方法是“作差比较法”，其基本步骤是：

① 作两整式的差，②用化简、分解因式或配方等方法将作出的差进行恒等变形，③将变形后的结果与零比较大小.

## 三、自我训练

**A 组**

(一) 选择题

1. 无论 $x$、$y$ 取什么实数，代数式 $x^2+y^2+2x-4y+7$ 的值(　　).

   A. 总不小于 2　　B. 总不小于 7

   C. 可为任何有理数　　D. 可能为负数

2. 当 $x=-2013$ 时，代数式 $ax^{2013}+bx^{2011}-1$ 的值是 2011，那么当 $x=2013$ 时，代数式 $ax^{2013}+bx^{2011}-1$ 的值是(　　).

   A. 2011　　B. $-2011$　　C. $-2013$　　D. 2013

3. 已知 $a$、$b$、$c$ 为任意实数. 则 $(a-b)^2-4(a-c)(c-b)$ 的值一定(　　).

   A. 大于 0　　B. 等于 0　　C. 小于 0　　D. 大于或等于 0

4. 已知 $F(x)$ 表示关于 $x$ 的一个五次多项式，若 $F(-2)=F(-1)=F(0)=F(1)=0$，$F(2)=24$，$F(3)=360$，则 $F(4)$ 的值为(　　).

   A. 1800　　B. 2013　　C. 4020　　D. 不能确定

(二) 填空题

5. 如果 $4a^{m-n}b$ 与 $-5a^5b^{n-1}$ 是同类项，那么 $m=$________，$n=$________.

6. 分解因式 $1-x^2-y^2-2xy=$________________.

7. 对于 $a$、$b$、$c$、$d$，我们规定一种新运算 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，如 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=1\times(-2)-0\times 2=-2$，那么计算 $\begin{vmatrix} x & -3x \\ 3 & x+6 \end{vmatrix}$ 的结果是________.

8. 观察下列单项式：$0, 3x^2, 8x^3, 15x^4, 24x^5, \cdots$，按此规律写出第 13 个单项式是________.

9. 求 $(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\cdots(2^{32}+1)+1$ 的个位数字为________.

10. 已知 $1+3=4=2^2$，$1+3+5=9=3^2$，$1+3+5+7=16=4^2$，$1+3+5+7+9=25=5^2$，$\cdots$，根据前面各式的规律可猜测：$1+3+5+7+\cdots+(2n+1)=$________.(其中 $n$ 为自然数)

11. 边长分别为 $a$ 和 $2a$ 的两个正方形按如图 2-1 所示的样式摆放，则图中阴影部分的面积为________.

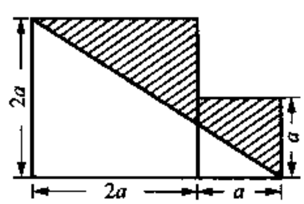



图 2-1

12. 已知 $a=\sqrt{5}-1$，则 $2a^3+7a^2+2a-12$ 的值等于________.

(三) 解答题

13. 已知：$x^2+xy=12$，$xy+y^2=15$，求 $(x+y)^2-(x+y)(x-y)$ 的值.

14. 试求 $x^{128}+x^{110}-x^{32}+x^{8}+x^{2}-x$ 被 $x-1$ 除，所得的余数.

15. 已知：$x^2+bx+c$（$b$、$c$ 为整数）是 $x^4+6x^2+25$ 及 $3x^4+4x^2+28x+5$ 的公因式，求 $b$、$c$ 的值.

16. 有这样一道题"当 $a=2,b=-2$ 时，求多项式 $3a^3b^3-\frac{1}{2}a^2b+b-\left(4a^3b^3-\frac{1}{4}a^2b-b^2\right)+\left(a^3b^3+\frac{1}{4}a^2b\right)-2b^2+3$ 的值"，马小虎做题时把 $a=2$ 错抄成 $a=-2$，王小真没抄错题，但他们做出的结果却都一样，你知道这是怎么回事吗？说明理由.

**B 组**

1. 证明：比 4 个连续正整数的乘积大 1 的数一定是某整数的平方.

2. 阅读下文，寻找规律：

已知 $x\neq1$，观察下列各式：$(1-x)(1+x)=1-x^2$，$(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$，$(1-x)(1+x+x^2+x^3)=1-x^4$.

(1) 填空：$(1-x)(\qquad\qquad\qquad)=1-x^8$；

(2) 观察上式，并猜想：$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n)=$________；

(3) 根据你的猜想，计算：

① $(1-2)(1+2+2^2+\cdots+2^5)=$________.

② $1+2+2^2+\cdots+2^{2013}=$________.