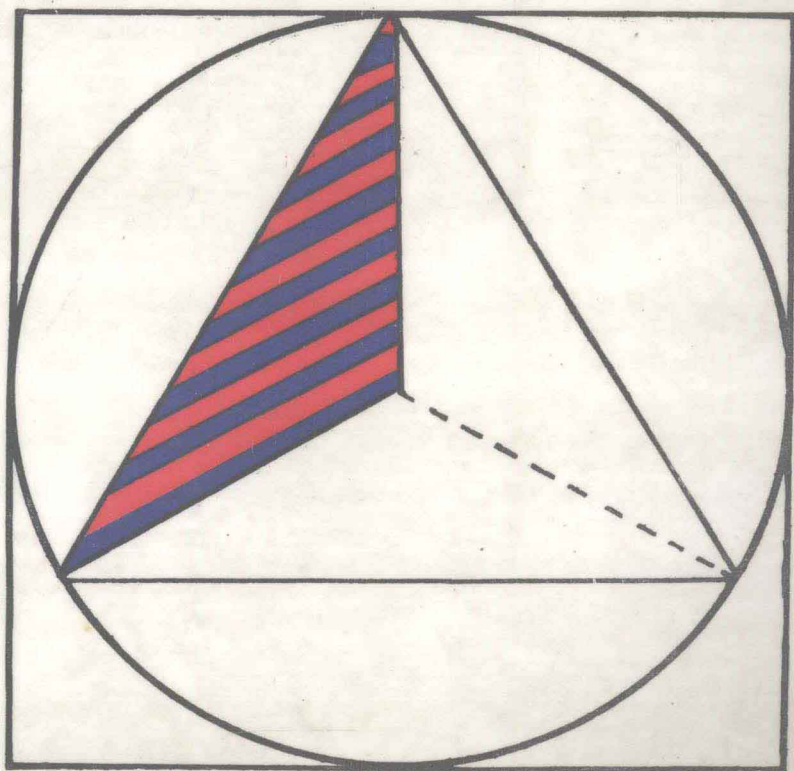


數學方法論

SHUXUE FANGFA LUN

李玉琪 主編

數學教育叢書



南海出版公司

数 学 方 法 论

李 玉 琪 主 编

南海出版公司

1990年·海口

数学教育丛书

数学方法论

作 者：李玉琪 主编

责任编辑：孙 勇

装帧设计：英 华

南海出版公司出版发行
山东东平县印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本 9.75印张 254千字
1991年4月第1版 1991年4月第1次印刷
印数：1—4600

ISBN 7—80570—354—×/G·91

定价：4.80元

序

当今的世界，已进入第三次科学技术革命的新时代。知识激增、信息高度发达，已成为我们这个伟大时代的重要特征。随着科学技术的飞速发展和现代科学的数学化趋势的增强，社会对人才智能提出了更高的要求，也引起了数学教育思想的深刻变革，促进了数学教育的发展。

我国数学教育家曹才翰先生指出：“在国际、国内的教育领域中，数学教育始终是最活跃的一个学科。”国际上，从六十年代的“新数学”、七十年代的“回到基础”，到八十年代的“问题解决”，数学教育的发展一日千里；在国内，学术组织林立、专业会议频繁，数学教育的研究呈现出一派生意盎然的兴旺景象。

数学教育学是研究数学教育规律的科学，是教育学、心理学、逻辑学、数学、哲学、思维学和数学史等科学的交叉学科。近年来，数学教育学已初步形成包括教学论、学习论、课程论、方法论等多个分支学科的庞大学科群。

从1987年起，我们山东省高等师范院校数学教育研究会建立了教学论、方法论、学习论、思维论和数学史等专题组，开展了多种形式的学术研究和学术交流活动，在国内各种刊物上发表了一批论文，并出版了研究会论文集。在深入开展学术研究的同时，我省各高等师范院校相继开设了有关必修和选修课，促进了我省数学教育的发展。

为了适应数学教育的发展，满足高等学校和中学教师继续教育的需要，为了反映数学教育的新思想、新观点，我们研究会组织编写了《数学教育丛书》，这是我省从事数学教育研究和教学

的同志们的一项研究成果。

数学教育学是一门新兴科学，正处于建设和发展阶段，它的理论建构和学科体系还有待于深入研究。因此，编写这套丛书只是对建立数学教育学的一种尝试。我们期望得到读者的批评和建议，以便进一步修改和完善。

山东省高等师范院校

数学教育研究会理事长

汪德营

1990年12月

前 言

随着数学科学和数学教育的蓬勃发展,数学方法论在数学研究和数学教育中的重要作用正日益展现出来,它的发展已受到人们的广泛关注。然而,作为一门新兴学科,数学方法论的理论体系还处在不断的发展和完善中,许多问题还有待于进一步研究和探讨。为了适应现代数学和数学教育发展的新形势,我们编著了这本书,希望能对数学方法论学科的发展和深化数学教育改革起到一定的促进作用。

众所周知,数学方法论是研究数学的思想、方法和数学中的发现、发明与创新法则的学科,它又有宏观与微观之分,内容是十分丰富的。本书不准备对数学方法论的理论作全面论述,而拟在宏观与微观的结合上,对数学方法论的若干基本问题进行讨论。

本书第一章首先阐明数学方法论的学科性质、发生机制、发展历史,然后简要论述它在数学发展和数学教育中的作用。第二、三、四章分别对数学中的科学认识方法、逻辑推理方法以及现代数学研究的常用方法进行讨论。本书第五章介绍了数学中具有普遍意义的化归原则与映射方法。第六章、第七章论述了数学思维、各种数学基本思维方法和综合思维方法。在第八章中对数学科学的辩证性质进行了简要的讨论。

数学方法论是哲学、方法学和数学史等多门科学的交叉学科。在编写中,我们用辩证唯物主义作指导,用丰富的数学史料阐明数学方法论的理论、观点,重在数学与方法学的结合上说明问题,力求形成数学方法论的科学体系。同时,注意反映国内外

数学教育科学研究的新成果，密切联系数学研究和数学教学的实践，实现理论与实践的结合。在文字上，力求言简意明、深入浅出、通俗易懂。本书可作为高等学校和中学教师继续教育（岗位培训）的教材，也可以供广大数学工作者、数学教学研究人员、数学教师和数学爱好者参考。

在本书编写过程中，我们参阅了徐利治、曹才翰、郑毓信、解恩泽、徐本顺、韩民青等许多名家的论著，在此谨向他们表示最诚挚的谢意。

由于水平有限、时间仓促，书中错误与缺点在所难免，恳请广大读者批评指正。

编 者

1990年10月于济南

目 录

第一章	数学方法论引论	1
§ 1 · 1	数学方法论的研究对象.....	1
§ 1 · 2	数学方法的本质与发展机制.....	7
§ 1 · 3	数学方法论的发展简史.....	12
§ 1 · 4	研究数学方法论的意义.....	18
第二章	数学中的科学认识方法	30
§ 2 · 1	分析与综合.....	30
§ 2 · 2	比较与划分.....	41
§ 2 · 3	抽象与概括.....	53
第三章	数学中的逻辑推理方法	65
§ 3 · 1	归纳法.....	65
§ 3 · 2	类比法.....	72
§ 3 · 3	演绎法.....	82
§ 3 · 4	数学归纳法.....	87
第四章	数学中的常用方法	96
§ 4 · 1	公理化方法.....	96
§ 4 · 2	数学模型方法.....	109
§ 4 · 3	构造方法.....	121
第五章	化归原则	132

§ 5 · 1	化归原则概述.....	132
§ 5 · 2	化归策略.....	138
§ 5 · 3	映射方法.....	151
第六章	数学基本思维方法.....	163
§ 6 · 1	数学思维.....	163
§ 6 · 2	数学思维方法概述.....	179
§ 6 · 3	逻辑思维方法.....	182
§ 6 · 4	形象思维方法.....	197
§ 6 · 5	灵感思维方法.....	210
第七章	数学综合思维方法.....	221
§ 7 · 1	经验思维方法.....	221
§ 7 · 2	理论思维方法.....	233
§ 7 · 3	数学创造性思维方法.....	251
第八章	数学的辩证性质.....	268
§ 8 · 1	数学的客观基础.....	268
§ 8 · 2	数学内容的辩证性质.....	277
§ 8 · 3	数学思想方法的辩证演变.....	290

第一章 数学方法论引论

当前，人类历史正由工业时代向信息时代转变，世界性的新的技术革命正在到来。在现代科学技术的飞速发展中，方法学正在迅速崛起，成为一门引人注目的新兴科学。

数学方法论是方法学学科群中一门独立的学科，它在数学研究和教学中的地位与作用日益受到人们的普遍重视。下面，我们将对数学方法论的研究对象、产生机制、发展简史和研究数学方法论的意义进行讨论。

§1·1 数学方法论的研究对象

方法学是关于认识世界和改造世界的根本方法的科学。任何科学都有自己的研究方法，但任何一种具体的研究方法都不是万能的。不过，个别中包含着一般，各种具体方法中包含着一般方法，包含着思想与方法的一般原则。这种从一般方法上研究方法问题的学问，即关于一般方法的理论就是方法学，或称为方法论。

不同的世界观决定了不同的方法论。马克思主义哲学认为，方法的使命是引导思维沿着正确的途径去认识客观世界，只有体现事物发展的客观规律的认识方法才是科学的、行之有效的。在科学发展的进程中，按照辩证唯物主义的认识论，人们逐步总结出其中的固有规律和研究方法，这就是科学的方法论。数学方法论是科学方法论在教学中的具体体现，隶属于科学方法论的范畴。

在这一节里，我们对数学方法论的学科性质及其研究对象作

简要的分析。

一、数学方法论的学科性质

数学方法论是研究数学的发展规律、数学的思想、方法、原则、数学中的发现发明和创新法则的学科。

数学方法论有宏观与微观之分。把数学置于各门科学以至客观世界中来认识，重在数学发展的外部规律及人才成长规律的研究，这是宏观的数学方法论。从数学的内在联系中讨论数学中的一般研究方法，即着眼于数学的思想、观念、数学研究的方法、数学发现发明和创新法则等内部规律的研究，则属于微观方法论的范畴。显然，要达到对数学本质及其规律的全面认识，需要宏观与微观方法论的密切结合。

为了认识数学方法论的学科性质，需要注意它同哲学、逻辑学、思维科学、数学以及数学史等相关学科的关系。

首先，哲学是世界观，也是认识论，马克思主义的世界观与认识论又是认识世界和改造世界的根本方法。因此，马克思主义哲学是世界观、认识论和方法论的统一，是最一般的方法论。数学方法论作为科学方法论的一个特殊领域，是科学认识规律在数学中的反映和总结，它的全部理论都离不开马克思主义哲学思想的指导。

其次，逻辑学源于数学，逻辑规律与逻辑方法作为重要的科学认识方法，在数学中有特殊的地位，因而数学方法论的研究与逻辑学密切相关。

第三，数学方法实质上是数学思维活动的方法，是数学思维活动的步骤、程序和格式，它体现了人的意识的能动作用，因而数学方法论的研究离不开思维科学的规律。

第四，数学方法是与数学同时产生的，数学方法的演变与数学科学的发展紧密相连。因此，探讨数学方法的产生与发展、分析数学家的思维特点与方式、研究数学人才成长的规律等等，都

离不开对丰富的数学史料的分析。也只有在对数学史的研究中，才能充分揭示数学的发展规律，提炼出数学思想和方法的一般原则。所以数学史是数学方法论丰富的源泉和重要的依据。

第五，对数学方法论的研究，一方面要以丰富的数学知识为背景材料，另一方面要在对数学的纵向结构和横向联系的分析中揭示出蕴含的思想、方法、原理与模式，因而数学方法论要以数学科学作为基本素材。

通过以上分析不难看出，数学方法论是数学、哲学、逻辑学、思维科学、方法学和数学史等科学的交叉学科。它以广阔的数学史为背景，重在数学与方法学的结合上，利用哲学、逻辑学和思维科学的理论，探讨数学的精神、观念、思想、方法、规则和模式，从而揭示数学的本质和发展规律。因此，数学方法论有着特定的研究对象和丰富的内容。

二、数学方法论的研究对象

数学方法论的研究对象问题，是一个重要的理论问题。一般认为，作为一门独立的学科，数学方法论的研究范围应包括以下十个方面。

1. 数学的对象

按照法国数学家组织布尔巴基(Bourbaki)学派的观点，关于数学的对象问题，是“半哲学、半数学的棘手问题”。^①

恩格斯指出：“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系。”^②一百多年来，随着现代数学的蓬勃发展，人们对数学的对象问题不断进行探讨，提出了许多新的见解。例如，布尔巴基学派认为，数学“是研究抽象结构的科学”，苏联著名数学家

^①尼古拉·布尔巴基：《数学的建筑》，载于《数学史论文集》第18页，上海科学技术出版社，1985年第1版。

^②恩格斯：《反杜林论》第35页，人民出版社，1970年第1版。

亚历山大洛夫 (А. И. АлексаHкoв 1912—) 认为“数学是以纯粹形态的量的关系和形式作为自己的对象”，我国数学家关肇直先生认为“数学是研究现实世界中量的关系的科学”；我国数理逻辑学家胡世华先生提出，数学“是研究思想事物的抽象的科学”。还有人认为，“只要适当扩充空间形式和数量关系的概念，恩格斯的论述仍然适用于现代数学”；“数学是关于秩序的科学”；“数学是结构及其模型的科学”等等。虽然关于数学对象的不同见解实质上是从不同的角度反映了现代数学的发展，各种观点都丰富了人们对数学的认识，但数学的对象究竟是什么？解决这样一个重大的理论问题，对于深入认识数学的本质、促进数学的发展，无疑是完全必要的。

2. 数学的功能

众所周知，数学有广泛的应用，这来自于它的多重功能。数学的功能主要有三个方面：第一，科学功能，即数学作为一种科学语言和科学方法，它在自然科学、社会科学和哲学等领域中的方法论价值。第二，思维功能，即数学作为一种思维工具，它在日常思维活动中所起的作用，以及它对思维科学发展的意义等。第三，社会功能，即数学作为认识世界和改造世界的工具，它在社会生产、经济、文化和教育等方面的作用与地位等。数学为什么具有多重功能？怎样才能更好地发挥数学的功能？在各门科学的数学化趋势日益增强和数学的应用更加广泛的今天，解决问题具有重要的意义。

3. 数学科学的特点

亚历山大洛夫把数学的特点归结为抽象性、精确性和应用的广泛性，也就是说数学具有高度的抽象性、严谨的逻辑性和广泛的适用性，这是人们的普遍认识。近年来，随着数学的发展，人们的认识不断深化，对数学的特点也有了不同的认识。例如，在西方数学家谈论美是比较多的，他们称“数学是创造性的艺术”，美

精华裔数学家王浩在《从数学到哲学》一书中就明确提出了数学的第四个特征——幽美性，即数学美。还有人提出数学的确切性、严格性等等。根据数学研究的对象和科学发展的实际，就数学的特点进行深入探讨，对于充分发挥数学的功能显然具有积极的作用。

4. 数学内容的辩证性质

唯物辩证法指出，客观世界充满了矛盾。作为现实世界量的侧面的反映，数学中也必然充满矛盾，充满辩证法。深入研究数学内容的辩证性质，对于把握数学的本质和规律是十分有益的。对于数学辩证性质的研究，主要集中在两个方面：第一，关于数学中矛盾的研究，即数学中有哪些重要的矛盾？它们的形成与发展有什么规律？在数学研究与教学中有什么作用？第二，关于数学内容的辩证分析，包括数学内容辩证实质的分析、演进过程的辩证分析等等。

5. 数学思想方法的历史演进

数学在其漫长的发展过程中，不仅建立了严密的知识体系，而且形成了一整套行之有效的思想和方法。总结这些思想方法形成和演进的规律，有助于深化对数学的认识并促进数学的发展。因此，对数学思想方法作历史的考察是数学方法论的重要内容。这里主要包括两个方面：第一，从整体上研究数学思想方法的系统进化，例如从算术到代数、从综合几何到几何代数化、从常量数学到变量数学、从必然数学到或然数学、从明晰数学到模糊数学等几次数学思想方法的重大转折的孕育、产生过程及其规律。第二，数学思想、方法的个体发育，主要是研究每个数学思想、方法的结构、功能和产生、演变、发展的规律，以及在数学发展中的地位、作用等等。

6. 数学的科学认识方法

数学作为人类对世界的一种认识，是客观世界在人脑中能动的反映，人们正是在对数学的研究中更加深刻地认识着客观世

界。按照马克思主义的认识论，对数学科学的认识方法进行系统的研究和总结，对于加强数学研究和指导数学教学都有十分重要的意义。数学的科学认识方法主要包括分析、综合、比较、划分、抽象、概括等等。对各种认识方法的结构、规则和功能的研究是数学方法论的重要内容。

7. 数学中的逻辑推理方法

数学是演绎科学，逻辑推理是最为经常的数学活动，因而掌握数学中归纳、类比、演绎等逻辑推理方法对于数学研究和数学学习都具有重要价值。对逻辑推理方法的研究，主要是探讨各种方法的原理、规则、结构和程序，并分析它们在数学发展、数学教学中的地位和作用。

8. 数学中的常用方法

数学是一门方法科学和工具科学，它源于科学、高于科学、又服务于科学。正因为如此，数学方法在数学中有着特殊重要的地位。在众多的数学方法中，作为数学研究、表述和问题解决的基本的、常用的方法主要是公理化方法、数学模型方法、构造方法、化归原则、映射方法等等。就这些方法的科学性、程序性、结构、作用等方面进行研究，对于进一步发挥数学的功能是十分必要的。

9. 数学思维方法

数学活动的核心是数学思维活动，成功的思维活动离不开正确的思维方法，因此思维方法的重要性并不亚于思维的内容和形式。那么数学思维的结构、特征是什么？数学思维方法的一般模式是什么？从思维科学和方法学的结合上深入探讨数学思维及其方法的规律，对于促进数学研究、发展数学能力和改善人才素质无疑是十分重要的。这里，主要研究数学思维及其特征、数学基本思维方法、综合思维方法和数学创造性思维等等。

10. 数学方法论与数学教育

近年来,随着国内外数学教育的发展,数学方法论的地位及作用越来越受到人们的普遍重视,已成为我国数学教育学科群中一个十分重要的学科。进一步发挥数学方法论的教育功能,对于改善人才的知识结构和提高数学素养,对于大面积提高数学教学质量显然具有积极意义。对于数学方法论与数学教育的研究主要集中在两个方面:第一,数学方法论在数学教育中的作用,即数学方法论在数学课程、数学教学、数学学习和人才成长中的作用;第二,加强数学方法论的学习、研究和普及的途径等。

上面介绍了数学方法论的主要研究对象。作为本节的结束,我们还要指出下列两点:第一,数学方法论是一门新兴学科,具有开放性的学科体系。伴随着数学和其它科学的发展,数学方法论的内容必然要得到不断的调整和充实。第二,数学是一门历史悠久、分支繁多、层次鲜明的基础科学,数学方法论相应地也有不同的层次。不仅初等数学与高等数学的方法论有着不同的内容,就是近代数学与现代数学也有着不同的方法论对象。本书将以初等数学的方法论为重点,在初等数学与高等数学的结合上对数学方法论的若干基本问题展开讨论。

§1·2 数学方法的本质与发展机制

数学发展的真正动力,无疑来自于人类的生产实践活动。但数学内部的矛盾运动,特别是数学思想与方法的重大变革,也是推动数学发展的重要因素。因此,数学及其发展与数学方法的演进有着十分密切的关系。那么,数学思想与方法的本质是什么?数学方法发生与发展的机制是什么?在这一节里,我们将对这些问题进行简要的分析。

一、数学方法的本质

方法，一般理解为人们活动的步骤、程序和格式。数学方法就是人们在数学研究、数学学习和问题解决等数学活动中的步骤、程序和格式。而数学思想，则是贯穿于一类数学方法中的普遍的方法原则、策策和规律。科学方法论是马克思主义认识论的重要组成部分，因此必须从认识论的角度去认识数学方法的本质。

德国著名数学家希尔伯特（Hilbert·Darid 1862—1943）指出：“数学，……它的生命力在于各部分之间的联系。”数学同其它科学一样，不仅是客观世界在人们头脑中的反映，而且以客观世界的存在为其发展的基础，客观事物的各种联系必然地要在数学中反映出来。

数学反映客观世界的联系主要有两种方式：第一，数学知识（概念、原理、命题等）反映了客观事物间局部的、具体的联系，数学知识系统是客观事物的纵向联系系统。事实上，数学中的任何概念、符号、模型、公式、原理和法则，都直接地反映着客观事物在某一侧面或局部上的具体的联系。例如，正弦定理与余弦定理反映了三角形中边角联系的数量规律；三角形全等和相似的概念反映了三角形在形态方面的联系；函数 $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 反映了客观事物在发展变化中数量方面的相互联系等等。第二，数学的思想和方法是客观事物间更为普遍的内在联系的反映，数学思想与方法体系是客观事物的横向联系系统。例如，分析方法与综合方法是客观事物的整体与部分的相互联系的反映，比较方法与分类方法是客观事物的统一性与多样性的反映，而化归思想则反映了客观事物在一定条件下的相互转化等等。显然，上述整体与部分、统一性与多样性、事物的相互转化等都是客观事物间普遍存在的内在联系的表现。

综上所述，数学方法本质上是人们对客观世界的普遍联系的