

代
数
学

教育部審定

中學教師範學校用

民國新代數學教科書

日本理科學校畢業生秦沅
美國哈佛學校天算碩士秦汾
合編 上編

上海商務印書館出版

編 輯 大 意

是書依據教育部令編輯。專爲中學校，女子中學校，及師範學校，女子師範學校之用。說理務求淺顯。俾能解普通算術者。學時均能領會。教授是書者。宜注意以下數端。

一。本書緒論。爲算術代數之過渡。故佔篇幅甚多。提揭綱領。喚起興味。胥在於是。幸勿以冗長責之。

二。「減」「除」定義及「形式不易」之原則。乃數學之筋節。本書再三申說。不厭重複。教者學者。均宜注意。

三。自然數以外之數。其意義及法則。均出於一種人爲的規約。近世數學家。已有定論。故本書不取姑息之說明。以期學者不至誤入歧途。

四。本書中定理數則。間有不宜於初學者。然同級學生。其思想程度。決非一致。或完全證明。或僅述大要。是在教師斟酌行之。且各校教授時間不同。講解之際。亦宜由教師善爲伸縮。

編輯大意

五. 本書問題選擇頗嚴。不矜豐富。學者務須逐問計算。不可畧去。如以過少爲嫌。可於卷末總習題中擇取適宜之若干題以備應用。

六. 本書所設習題。另刊答案及問題詳解。以備參考之用。

七. 本書於重要名詞之旁。皆註西文。卷末並附索引。以資參考。

編者識

代 數 學 總 目



上 卷

(節)

(頁)

緒 論

第一節	代數學之目的及使用之記號	1—4
第二節	代數學之効力	5—8
第三節	關於代數式之定義及定則	9—17
第四節	簡單之方程式	18—25
第五節	代數學上之數	26—28
第六節	代數學上之數之計算	29—39

第一編 整 式

第一節	關於整式之各定義及整理之方法	41—46
第二節	整式之加減	47—54
第三節	整式之乘除	55—70
第四節	整式之擴張及係數分離之計算	71—75

第二編 一 次 方 程 式

第一節	普通一次方程式	77—81
第二節	應用問題	82—88

第三節	聯立一次方程式	89—90
等四節	聯立方程式解法	91—101
第五節	應用問題	102—105

第三編 整式之讀

第一節	乘算公式	107—110
第二節	因式	111—118
第三節	最高公因式	119—128
第四節	最低公倍式	129—135

第四編 分式

第一節	分式之定義及變易外形	137—139
第二節	分式之加減乘除	140—148
第三節	分方程式	149—158

下 卷

第五編 二次方程式

第一節	無理數	1—1
第二節	普通二次方程式之解法	5—10
第三節	虛數	11—12
第四節	二次方程式之根	13—16
第五節	二次方程式應用問題	17—21
第六節	二次方程式之根與係數之關係	22—28

第六編 特殊根

第一節	平方根.....	29-33
第二節	立方根.....	34-39

第七編 各種方程式

第一節	分方程式.....	41-44
第二節	無理方程式.....	44-49
第三節	高次方程式.....	49-57
第四節	聯立方程式.....	58-71

第八編 二項定理

第一節	順列.....	73-75
第二節	組合.....	75-76
第三節	二項定理.....	77-80

第九編 指數及對數

第一節	指數.....	81-88
第二節	對數.....	88-92
第三節	對數表.....	93-97
第四節	複利及對數雜題.....	97-102

第十編 比例及級數

第一節	比.....	103-107
第二節	比例.....	107-110
第三節	等差級數.....	111-113
第四節	等比級數.....	113-117

總習題

中西名詞索引

中學新教科書

代數學

緒 論

第一節 代數學之目的及使用之記號

1. 代數學主要之目的、在使問題之解法歸於簡明、且使同類之問題、得發現通用之解答。故以**文字**表示通用之數。而以**符號**表示運算之方略。

2. 代表通用之數者、通例爲拉丁字、間有用希臘字者、此等文字所表之數、除有特別限制者外、任爲何數、(所謂數者、在第五節以前、以自然數 Natural number 及分數 Fraction 爲限) 均無不可。惟同一問題中、同文字必表同數。

問題中有時含有假設及所求二種之數者、則名假設之數曰**既知數** Known number。往往以 $a, b, c \cdots$ 等字代之。名所求之數曰**未知數** Unknown number。往往以 $x, y, z \cdots$ 等字代之。

3. 加, 減, 乘, 除, 冪, 根各運算符號、與算術中無異。其略有不同者。說明之如下。

(i) 代數學中除數字與數字相乘外、往往略去二因數間之乘號。

例如 $a \times b$ 或 $a \cdot b$ 可略去乘號而書為 ab 。又 $7 \times a \times x$ 可略去乘號而書為 $7ax$ 。若因數中有數字 3 與 8、則其間仍書乘號、以別於三十八。

(ii) 代數學中、雖未嘗不用除號。然為簡便起見、往往有用分數記法者。

例如 $6 \div 3$ 、往往書為 $\frac{6}{3}$ 。又如 $a \div b$ 、往往書為 $\frac{a}{b}$ 。

在算術中有加減乘除等號連結之若干數、而無括弧以括之。則其計算之順序、恆有「先算乘除後算加減」之規約。在代數學中、既略去乘號、而以分數記法代除號。則此規約已寓於記法之中。

例如 $a \times b + c + d \div e$ 、苟用算術中通行之記法、勢必先有規約、謂先求 a, b 之積、與 d, e 之商、而後行加減。今以代數記法記之、為 $ab + c + \frac{d}{e}$ 。在算式中已明示 a, b 之積、及 d, e 之商、而無俟規約。亦代數學記法勝於算術記法之一種。

例題一

下列各結果、試以代數記法表示之。

1. a, b, c 三數之和。
2. a, b, c 三數之積。
3. 相鄰之三數、其最小者爲 a 。
4. 相鄰之三數、其中間者爲 x 。
5. a 之立方。
6. a, b 之積之 7 倍。
7. 凡 3 能除絕之數。
8. 凡 m 能除絕之數。
9. a 爲 b, c 之積所除。
10. m, a, b 之和、除 b, c 之差。
11. 以 $2m$ 爲一切偶數、凡一切奇數。
12. 凡爲 7 所除、而餘數爲 2 者。

下列各算式、以普通言語表示之。

13. $x^2 + y^2$
15. $\sqrt{a^2 - b^2}$
17. $\frac{b + c + a}{d - e}$
14. $3a^2b^3 - \frac{c}{4}$
16. $13a + 2$
18. $a^3 - b^3 + 2a^2b - \frac{ab^2}{4}$

4. 表兩數關係之符號。

(i) 等爲 $=$ 、不等爲 $\neq$ 。(ii) 大爲 $>$ 、不大爲 $\geq$ 。(iii) 小爲 $<$ 、不小爲 $\leq$ 。例如 $a=b$ 、即 a 等於 b 。 $a \neq b$ 、即 a 不等於 b 。 $a > b$ 、即 a 大於 b 。 $a \geq b$ 、即 a 不大於 b 。 $a < b$ 、即 a 小於 b 。 $a \leq b$ 、即 a 不小於 b 。

例 題 二

下列各結果、試以代數記法表示之。

1. a, b 之和、等於 d, c 之積。2. 自 a 減 x 、其差等於 c 之 8 倍。3. x 平方與 y 平方之和、等於 a 之平方。4. a 爲 b 所除、其商小於 a, b 之積。5. g 之平方、不小於 g 之立方。6. 三角形之面積、等於高乘底之半。(設面積爲 S 、高爲 h 、底爲 a 、)7. 球之面積、爲圓周率乘半徑平方之 4 倍。(設面積爲 S 、圓周率爲 π 、半徑爲 r 、)

下列各算式、以普通言語表示之。

8. $x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2}$

9. $ax^2 + by^2 = c^2$

10. $y^2 = 4px$

14. $\sqrt{(x^2 + 2xy + y^2)} = x + y$

11. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

15. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} < \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$

12. $m^2 < mn$

16. $\sqrt{a^2 - b^2} \neq \sqrt{x^2 - y^2}$

13. $3a + 2b > 4a + 3b$

第二節 代數學之效力

5. 數字文字與符號連結所成者、曰代數式

Expresison。代數式之效用、姑舉一例如下。

問題 設有大小二數、其和爲108、其差爲62、問二數各爲若干。

以算術解之、二數之差爲62、則小者加62、與大者相等。然其和爲108、故小者加62(即大者)再加小者爲108。即兩個小者加62爲108亦即小者之2倍加62爲108。故自108減62、所餘之數、即小者之2倍。故小者之2倍爲 $108 - 62 = 46$ 。以2除46得23、故小者之數爲23。加62於23、則爲85。故大者之數爲85。

以上解法、雖未嘗不明晰。然全用普通言語記述、不免失之煩瑣。今命所求之數、小者爲 x 、大者爲 y 。仍用前解之思想、而以代數式代其言語、則

$$y = x + 62$$

$$x + 62 + x = 108$$

$$2x + 62 = 108$$

$$2x = 108 - 62 = 46$$

$$\therefore x = 46 \div 2 = 23$$

$$y = 23 + 62 = 85$$

此卽代數學能使問題之解法歸於簡明也。

然本題之結果 $x=23$, $y=85$ 、所表示者、僅一最後之結果。苟問題中所設之數如 108 或 62、偶有一數變動、則所求之答數無效。必自始至終、另演一次、是未盡代數學之效力也。所以如是者、因既知數純用數字而不用文字之故。若既知數亦以文字代表之、則凡同類之問題、不拘其所設之數若何、以之代入最後之結果中、卽得各種解答。

例如前問題中設二數之和爲 a 、二數之差 b 、則

$$y = x + b$$

$$x + b + x = a$$

$$2x + b = a$$

$$2x = a - b$$

$$x = \frac{a-b}{2} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{a-b}{2} + b \\ &= \frac{a-b+2b}{2} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

此 (1) 與 (2) 即同類問題通用之解答。

例題三

將下列各數代入結果而求 x, y 為何數。

1. $a=40, b=30$

2. $a=83, b=\frac{2}{12}$

3. $a=\frac{3}{4}, b=\frac{3}{12}$

〔注意〕本節所認為數者、祇有自然數及分數。故 a 與 b 雖為任意之數、必 a 大於 b 、方為合理、即 2 條所謂特別之限制也。

例如 $a=4, b=10$ 、則 $x=\frac{4-10}{2}$ 。即成為無意義之記號而不能認為所求之答數。

6. 以文字及記號計算問題、而以代數式表示其結果、此代數式曰**公式** Formula. 前所謂同類問題通用之解答、即同類問題之公式也。然公式之效力、不僅算出一通用之解答、實能以簡明之法、表示問題中各數之關係。故若將問題中既知數及未知數交換、而另作一新問題、此新問題之公式、可自既得之公式直接推定、而無須逐一計算。試舉一例以明之、如下

問題 元金 a 圓、年利 r 分、 t 年間所生之利息爲 c 圓、此 a, r, t, c 四數中知三數、試求其他一數

解 知 a, r, t 三數而求 c 、其解法如下。

元金一圓、每年所生之息爲 $\frac{r}{100}$ 圓、則元金 a 圓、每年所生之息爲其 a 倍、即 $\frac{ar}{100}$ 圓。而 t 年間所生之息又爲其 t 倍、即 $\frac{art}{100}$ 圓。

$$\text{故 } c = \frac{art}{100} \quad (1)$$

若問題中利息總數爲既知而求利率、則 at 除(1)之兩端、即得

$$\frac{r}{100} = \frac{c}{at} \quad (2)$$

若求元金、則以 rt 除 (1) 式之兩端、更以 100 乘之、即得

$$a = \frac{100c}{rt} \quad (3)$$

若求年數、則以 ar 除 (1) 式之兩端、更以 100 乘之、即得

$$t = \frac{100c}{ar} \quad (4)$$

例題四

1. 元金 300 圓、年利百分之四、求五年間之總利息。
2. 3 年間之利息為 8 圓、元金為 60 圓、求利率。
3. 年利百分之八、10 年之利息為 62 圓、求元金。
4. 年利百分之七、元金 400 圓、問幾年間之利息、為 300 圓。

注意 文字所表之數均為不名數。故本題 a 圓 c 圓之圓字、 r 分之分字、 t 年間之年字、均不可略去。

第三節 關於代數式之各定義及定則

7. 若干文字及數字 (自然數或分數) 之積、曰單項式 Monomial。

例如 $3ab$, $\frac{1}{3}x^2y^2$ 等、皆為單項式。

若干單項式、以加減號連結為一式者、其式曰多項式 Polynomial。

組成此多項式之各單項式、爲多項式之項 Term。

例如 $3x^2y^2 + 2x + a^2$ 爲多項式、而 $3x^2y^2$, $2x$ 及 a^2 各爲此多項式之項。

8. 單項式中數字所表之因數、爲各文字所表各因數之積之**係數** Coefficient。

例如 單項式 $5ab^2$ 之 5 字、爲 ab^2 之係數。 $\frac{2}{3}ab$ 之 $\frac{2}{3}$ 、爲 ab 之係數。

其不見數字因數者、其係數爲 1。

例如 a^2x 可視爲 $1a^2x$ 。

擴張係數之意義、則凡單項式中所含之各因數、任意分爲兩組。此兩組中之任一組、各得互稱爲他組之係數。惟數字因數必歸於係數之一組。

例如 $3ax^2y$ 項中、 $3a$ 得稱爲 x^2y 之係數、 $3ax^2$ 得稱爲 y 之係數、 $3y$ 得稱爲 ax^2 之係數。而數字 3 則恆在係數之一組內。

係數中含有文字者、曰**文字係數** Literal coefficient。不含文字者、曰**數字係數** Numerical coefficient。惟文字係數、恆指明爲某某等積之係數。其不指明者。通常恆指數字係數。