全国八省市

中学数学竞赛题解

（1978）

四川省江油教师进修学校

一九七八年七月

提高整个中华民族的科学文化水平，还有一个十分重要的、应当特别予以重视的方面，这就是青少年的培养。青少年是我们无产阶级革命事业的接班人。青少年要从小健全地发育身体，培养共产主义的情操、风格和集体主义的气概，要从小养成爱科学、学科学、用科学的优良风尚。

华国锋

編　后

为了实現新时期的总任务，响应英明領袖华主席提出的“提高整个中华民族的科学文化水平”的偉大号召，我們应广大教师和中学生的要求，特編輯了这本《中学数学竞賽題解》。由于我們水平有限，时間匆忙，不妥和錯誤之处，在所难免，我們殷切地希望广大讀者提出意見和批評，以便重印时改正。

在此书編輯过程中，我們得到了四川师范学院数学系、省教育局教材編写处、沈阳市十五中、上海师大二附中、西安市八十五中、广州市三十五中、江油县印刷厂等单位的大力支持和邦助，使我們能在短期內順利地完成这一工作，在此一並致謝。

編　者

一九七八年七月

1978年全国部分省市中学
数学竟賽試題解答

目　　录

一九七八年全国部分省市中学数学竞赛题解

第一試試題解答

1. 已知 $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}$，问当 x 为何值时

(i) $y>O$； (ii) $y<O$？

解：$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}$ 的定义域为

$$x+3>O\text{，即}x>-3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $$O<\frac{1}{\sqrt{2}}<1$$

(i) 若 $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}>O$

则 $\frac{1}{x+3}<1$；$x+3>1$；$x>-2$

结合(1)得 $x>-2$

(ii) 若 $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}<O$

则 $\frac{1}{x+3}>1$； $x+3<1$； $x<-2$

结合(1)得 $-3<x<-2$

所以当 $x>-2$ 时 $y>0$；当 $-3<x<-2$ 时 $y<0$。

2. 已知 $\operatorname{tg}x=2\sqrt{2}$ $(180^\circ<x<270^\circ)$

求 $\cos 2x$，$\cos\frac{x}{2}$ 的值。

解：∵ $180^\circ<x<270^\circ$

∴ $\sec x=-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}=-\sqrt{1+8}=-3$

∴ $\cos x=-\frac{1}{3}$

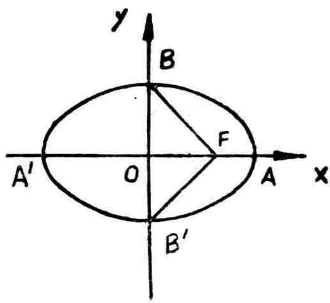
∴ $\cos 2x=2\cos^2 x-1=2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2-1=-\frac{7}{9}$

由 $180^\circ<x<270^\circ$ 得 $90^\circ<\frac{x}{2}<135^\circ$

∴ $\cos\frac{x}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$。

3. 设椭圆的中心为原点，它在 X 轴上的一个焦点与短轴两端连线互相垂直，且此焦点和长轴较近的端点距离是 $\sqrt{10}-\sqrt{5}$，求椭圆方程。解：如图(1)设所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

F 是它的右焦点，



（图 1）

∵ $FB\perp FB'$ ∴ $\triangle BB'F$ 为等腰直角三角形，

∴ $OB=OF=OB'$ 即 $b=c$

但 $a^2=b^2+c^2$，∴ $a^2=2c^2$，　∴ $c=\frac{\sqrt{2}}{2}a$；

又 $FA=a-c=a-\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)a$，

由已知　$FA=\sqrt{10}-\sqrt{5}$．

$$\therefore\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)a=\sqrt{10}-\sqrt{5},$$

$$\therefore\ a=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{10}$$

$$\therefore\ b=c=\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{5}$$

故所求椭圆方程是　$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$．

4．已知方程　$2x^2-9x+8=O$，求作一个二次方程，使它的一个根为原方程两根和的倒数，另一根为原方程两根差的平方。

解：设x_1，x_2为方程$2x^2-9x+8=O$的两个根，

则
$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{9}{2} \\ x_1\cdot x_2=4 \end{cases}$$

设所求方程为$x^2+px+q=0$，它的两个根为x'_1，x'^2

据题意：$x'_1=\frac{1}{x_1+x_2}=\frac{2}{9}$

$$x'_2=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$=\frac{81}{4}-16=\frac{17}{4}$$

$$p=-(x'_1+x'_2)=-\left(\frac{2}{9}+\frac{17}{4}\right)=-\frac{161}{36}$$

$$q=x'_1\cdot x'_2=\frac{2}{9}\times\frac{17}{4}=\frac{34}{36}$$

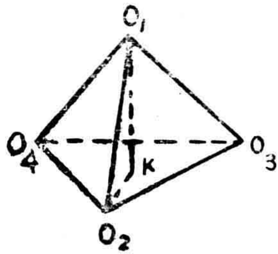
所以求作的方程是：

$$36x^2-161x+34=0.$$

5．把半径为1的四个小球叠成两层放在桌面上：下层三个，上层一个，两两相切，求上层小球最高点离桌面的高度，

解：设上层小球的球心为O_1，下层三个小球球心为O_2,O_3,O_4，连接$O_1O_2,O_1O_3,O_1O_4,O_2O_3$ O_2O_4,O_3O_4，因为这四个球两两相切，所以$O_1O_2=O_1O_3=O_1O_4=O_2O_3=O_2O_4=O_3O_4=2$，因此$O_1-O_2O_3O_4$可以看作一个棱长都是2的三棱锥（如图2），过$O_1$作三棱锥的高$O_1K$，那么$K$应是$\triangle O_2O_3O_4$的中心，连$O_2K$，则

$$O_2K=\frac{2}{3}\sqrt{3}$$



（图2）

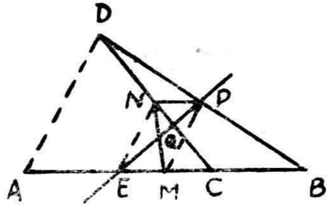
$$\therefore O_1K=\sqrt{O_1O_2^2-O_2K^2}$$

$$=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

因为O_2,O_3,O_4到桌面的距离都等于1．所以面$O_2O_3O_4$平行于桌面，则球O_1上最高点到桌面的距离应是$1+\frac{2\sqrt{6}}{3}+1=2+\frac{2\sqrt{6}}{3}$．

6. 设线段AB的中点为M，从AB上另一点C向直线AB的一侧引线段CD；令CD的中点为N，BD的中点为P，MN的中点为Q，求证：直线PQ平分线段AC

证明：过P，Q作直线交AC于E，连NP，$\because N$，P分别是DC，BD的中点，$\therefore NP \parallel CB$在$\triangle QNP$与$\triangle QME$中，



（图3）

$NP \parallel EM$，$QN=QM$，

$\therefore$ $\triangle QNP \cong \triangle QME$，

$\therefore QP=QE$连PM，

NE则$EMPN$为平行四边形.

$\therefore EN \parallel MP$.连$AD$，在$\triangle BAD$中，$M$、$P$分别为$BA$、$BD$的中点，

$\therefore MP \parallel AD$． 又 $\because$ $EN \parallel MP$．$\therefore$ $EN \parallel AD$，

$\therefore$ 在$\triangle ACD$中，E为AC的中点.所以直线PQ平分线段AC．

7. 证明：当n，k都是给定的正整数，且$n>2$，$k>2$时，$n(n-1)^{k-1}$可以写成n个连续偶数的和，

证：设n个连续偶数为

$$2a,2a+2,2a+4,\cdots\cdots,2a+2(n-1)$$

则 $$S_n=\frac{2a+2a+2(n-1)}{2}\cdot n=[2a+(n-1)]n$$

令 $$[2a+(n-1)]n=n(n-1)^{k-1}$$

$$2a+(n-1)=(n-1)^{k-1}$$

$$\therefore\ a=\frac{(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]}{2}$$

由上式可知，只要n为大于2，k为大于2的整数，那么a

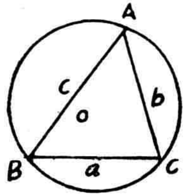
一定是正整数。

$$\therefore a \text{ 取 } \frac{(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]}{2} \text{ 时}$$

$n(n-1)^{k-1}$等于n个连续偶数的和。

8．证明：顶点在单位元上的锐角三角形的三角的余弦的和小于该三角形的周长之半。

证：如图4在单位元O内，任作一锐角三角形ABC，命A、B、C各角所对的边长分别为a, b, c，其和的一半为s。



（图4）

$\because \triangle ABC$为一锐角三角形，

$\therefore A+B>90°$，即$A>90°-B$，

从而$\cos A<\cos(90°-B)$

$=\sin B \cdots\cdots(1)$

同理　$\cos B<\sin C \cdots\cdots(2)$

$\cos C<\sin A \cdots\cdots(3)$

(1)+(2)+(3)：

$\cos A+\cos B+\cos C<\sin A+\sin B+\sin C \cdots\cdots(4)$

又根据正弦定理：有$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2$

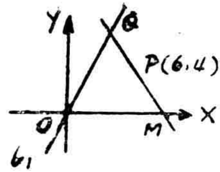
$$\therefore \quad \frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=2$$

即　$\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{a+b+c}{2}=s \cdots\cdots\cdots(5)$

由(4)，(5)可得：$\cos A+\cos B+\cos C<s$。

9．已知直线l_1：$y=4x$和点$P(6,4)$，在直线l_1上求一点Q，使过PQ的直线与直线l_1，以及x轴在第Ⅰ象限内围成的

三角形的面积最小。



解：设Q点坐标为(x_1, y_1)，

则$y_1=4x_1$那末直线PQ的

方程为：$\dfrac{y-4}{4x_1-4}=\dfrac{x-6}{x_1-6}$

又设直线PQ交x轴于$M(x_2, O)$ （图5）

$\therefore \quad \dfrac{-4}{4(x_1-1)}=\dfrac{x_2-6}{x_1-6}. \qquad x_2=\dfrac{5x_1}{x_1-1}$

则点M的坐标为 $\left(\dfrac{5x_1}{x_1-1}, O\right)$

$\triangle OMQ$的面积$S=\dfrac{1}{2}y_1\cdot\dfrac{5x_1}{x_1-1}$，而$y_1=4x_1$

$\therefore \qquad S=\dfrac{1}{2}\cdot 4x_1\dfrac{5x_1}{x_1-1}=\dfrac{10x_1^2}{x_1-1}$

从而得到 $10x_1^2-Sx_1+S=O$ ………………(1)

要使方程(1)式中x_1有实根，则$S^2-40S\geqslant O$

$S(S-40)\geqslant O$，由于$S>O$，$\therefore S-40\geqslant O$即$S\geqslant 40$

把$S=40$代入(1)得，$x_1^2-4x_1+4=O$，$\therefore$ $x_1=2$

这就是说当 $x_1=2$时，S为最小。

由 $y_1=4x_1$得$y_1=8$，故所求点Q的坐标为(2，8)。

10．求方程组$\begin{cases} x+y+z=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x^3+y^3+z^3=-18 \cdots (2) \end{cases}$ 的整数解

解：由(1) $z=-(x+y)\cdots\cdots(3)$

(3)代入(2)：$x^3+y^3-(x+y)^3=-18$

化简： $xy(x+y)=6$ 即： $xyz=-6\cdots(4)$

由(4)可知x，y，z必须是6的约数，且要满足(1)(2)，所以其中有且只有一个取负数，而这个负数的绝对值应该最大。

如令 $x=-3$时，则得 $\begin{cases} y=1, & 2 \\ z=2, & 1; \end{cases}$

同理 如令 $y=-3$时， $\begin{cases} x=1, & 2 \\ z=2, & 1; \end{cases}$

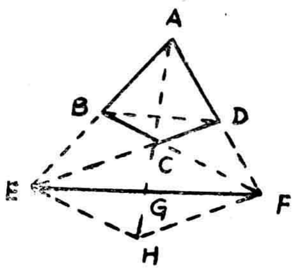
令 $z=-3$时， $\begin{cases} x=1, & 2. \\ y=2, & 1. \end{cases}$

经检验以上六组为原方程组的整数解。

第二試試題解答

1．四边形两组对边延长后分别相交，且交点的连线与四边形的一条对角线平行，证明：另一条对角线的延长线平分对边交点连成的线段。

已知：$ABCD$为四边形，两组对边延长后得交点E、F。对角线$BD \parallel EF$，AC的延长线交EF于G（如图）



（图6）

求证：$EG=GF$.

证明：过E作$EH \parallel BF$，H是它和AG延长线的交点.

$\therefore \dfrac{AC}{AH}=\dfrac{AB}{AE}$. $\because \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AD}{AF}$

$\therefore \dfrac{AC}{AH}=\dfrac{AD}{AF}$.连$HF$，

$\therefore ED \parallel HF$.$\therefore CEHF$是平行四边形，$\therefore EG=GF$

2．(1) 分解因式：$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$

解： $x^{12}+x^9+x^6+x^3+1=\dfrac{x^{15}-1}{x^3-1}$

$$=\frac{x^5-1}{x-1}\cdot\frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}$$

$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1).$$

(2)证明：对于任意角度θ，都有

$$5+8\cos\theta+4\cos 2\theta+\cos 3\theta\geqslant 0$$

证：$5+8\cos\theta+4\cos 2\theta+\cos 3\theta$

$$=5+8\cos\theta+4(2\cos^2\theta-1)+(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$$

$$=1+5\cos\theta+8\cos^2\theta+4\cos^3\theta$$

$$=(1+\cos\theta)(4\cos^2\theta+4\cos\theta+1)$$

$$=(1+\cos\theta)(2\cos\theta+1)^2\geqslant 0.$$

3.设R为平面上以$A(4,1)$、$B(-1,-6)$、$C(-3,2)$三点为顶的三角形区域（包括三角形内部及周界）.试求当(x,y)在R上变动时，函数$4x-3y$的极大值和极小值.（须证明你的论断）

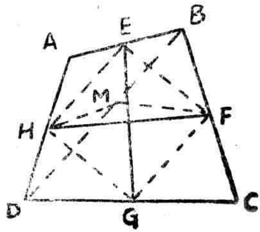
解．令$\lambda=4x-3y$，显而易见，当λ固定，(x,y)变动时，我们即得平面上一条直线。令λ变动，则得一系列相互平行的直线，在其中每一条直线上，$4x-3y$的值皆相同。当直线经过C点时，$\lambda=-18$，此时直线经过$(-4.5,0)$。当直线经过B点时，$\lambda=14$，此时直线经过$(3.5,0)$.当直线经过A点时，$\alpha=13$，此时直线经过$(3.25,0)$由此可知，当由点$(-4.5,0)$沿着x轴向右移动到$(3.5,0)$时，$\lambda=4x-3y$的取值即从-18逐渐增加到14，当λ大于14或小于-18时直线$\lambda=4x-3y$与$\triangle ABC$皆无交点.故知最大的$\lambda=14$，此时R上的$(x,y)=(-1,-6)$；最小的

$\lambda=-18$，此时R上的$(x,y)=(-3,2)$。

4．设$ABCD$为任意给定的四边形。边AB、BC、CD、DA的中点分别为E、F、G、H。证明：

$$\text{四边形}ABCD\text{的面积}\leqslant EG\cdot HF\leqslant\frac{1}{2}(AB+CD)\times\frac{1}{2}(AD+BC)。$$

证明：如图由于$HE\parallel BD\parallel GF$，以及$EF\parallel HG$，故$EFGH$为平行四边形。



（图7）

面积$S_{ABCD}=S_{EFGH}+S_{AEH}+S_{DGH}+S_{CGF}+S_{BFE}$

而 $S_{AEH}+S_{CGF}$

$$=\frac{1}{4}(S_{ABD}+S_{CBD})=\frac{1}{4}S_{ABCD}$$

同理 $S_{DGH}+S_{BFE}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$

故 $S_{ABCD}=S_{EFGH}+\frac{1}{2}S_{ABCD}$

即 $\frac{1}{2}S_{ABCD}=S_{EFGH}$…………（1）

由于$EFGH$是平行四边形。

所以 $S_{EFGH}\leqslant\frac{1}{2}EG\cdot HF$…………（2）

由（1）、（2）可得 $S_{ABCD}\leqslant EG\cdot HF$

设M为BD中点，显然有

$$\frac{1}{2}(AB+DC)=HM+MF\geqslant HF$$

同理有 $\frac{1}{2}(AD+BC)\geqslant EG$

故有 $EG\cdot HF\leqslant\frac{1}{2}(AB+DC)\times\frac{1}{2}(AD+BC)$.

5．设有十人各拿提桶一只同到水龙头前打水，设水龙头注满第 i（$i=1, 2, \cdots\cdots, 10$）个人提桶需时 T_i 分钟，假定这些 T_i 各不相同．

问：（i）当只有一个水龙头可用时，应如何安排这十个人的秩序，使他们的总的花费时间（包括各人自己接水所花的时间）为最少？这时间等于多少？（须证明你的论断）

（ii）当有两个水龙头可用时，应如何安排这十个人的秩序，使他们的总的花费时间为最少？这时间等于多少？（须证明你的论断）．

解：我们不妨假定 $T_1<T_2<\cdots\cdots<T_{10}$．

（i）当只有一个水龙头可用时，只须将这十个人按 T_1，T_2，$\cdots\cdots T_{10}$，从小到大的秩序安排，便可使他们的总的花费时间为最少。在这种安排之下，他们的总的花费时间为：$T_1+(T_1+T_2)+(T_1+T_2+T_3)+\cdots\cdots+(T_1+\cdots\cdots+T_{10})=10T_1+9T_2+\cdots\cdots+T_{10}$

今设有另一种安排次序是 i_1，i_2，$\cdots\cdots i_{10}$（$i_1, i_2\cdots\cdots i_{10}$ 是 1，2，$\cdots\cdots$，10的一个排列），显而易见，在这种安排下，总的花费时间为：

$$T=Ti_1+(Ti_1+Ti_2)+\cdots\cdots+(Ti_1+\cdots\cdots+Ti_{k-1}+Ti_k)+(Ti_1+\cdots\cdots+Ti_{\ell-1}+Ti_\ell$$

$+ T_{i_{k+1}}) + \cdots\cdots + (T_{i_1} + \cdots\cdots + T_{i_{10}})$

既然$(i_1, \cdots\cdots i_{10})$不是按$T_i$从小到大的秩序排列，此时必存在$K$使$T_{i_k} > T_{i_{k+1}}$，我们现在将$i_k$与$i_{k+1}$相交换，得到一个新的排列$(i_1, \cdots\cdots, i_{k+1}, i_k, i_{k+2}, \cdots\cdots, i_{10})$它所对应的总的花费时间为：

$$T' = T_{i_1} + (T_{i_1} + T_{i_2}) + \cdots\cdots + (T_{i_1} + \cdots\cdots + T_{i_{k-1}} + T_{i_{k+1}}) + T_{i_1} + \cdots\cdots + T_{i_{k-1}} + T_{i_{k+1}} + T_{i_k}) + \cdots\cdots + (T_{i_1} + \cdots\cdots + T_{i_{10}})$$

显而易见，$T - T' = T_{i_k} - T_{i_{k+1}} > 0$由此可知，不是按$T_i$从小到大的安排决不是最好的安排。

(ii)现在设有两个水龙头Ⅰ和Ⅱ，这时最好的安排是

$$(1) \quad \begin{cases} \text{Ⅰ}: & T_1 T_3 T_5 T_7 T_9 \\ \text{Ⅱ}: & T_2 T_4 T_6 T_8 T_{10} \end{cases}$$

换句话说，即将$T_1, \cdots\cdots, T_{10}$按从小到大的次序轮流分配到Ⅰ和Ⅱ上去，在这种安排之下，总的花费时间显然为：

$$5(T_1 + T_2) + 4(T_3 + T_4) + 3(T_5 + T_6) + 2(T_7 + T_8) + (T_9 + T_{10})$$

要证明这一排列是最好的排列，我们先注意：当在Ⅰ和Ⅱ接水的名额已经分配定了之后，由(i)所证要使这两行人总的花费时间最少，它们各自必须按他们的T_i从小到大的次序排列。今设已经给定一种排列

$$\begin{cases} \text{Ⅰ}: & T_{i_1} T_{i_2} \cdots\cdots T_{i_l} \\ \text{Ⅱ}: & T_{j_1} T_{j_2} \cdots\cdots T_{j_{10-l}} \end{cases}$$

并且假定$T_{i_1} < T_{i_2} < \cdots\cdots T_{i_l}$，　$T_{j_1} < T_{j_2} < \cdots\cdots < T_{j(10-l)}$

我们先证明：若$l \neq 5$，则经适当整调后，可使$l = 5$而不

致增加总的花费时间.事实上若$l>5$则$10-l\leq4$,我们将i_2放到Ⅱ的第一位，则Ⅰ的总的花费时间减少了$l-1$个Ti_2，而Ⅱ则增加了$10-l+1\leq l-1$个Ti_2，从而总的花费时间不会增加．若$10-l>5$，则也可同样处理．因此，我们就假定$l=5$，于是，我们就只考虑形如下面的排列

$$\begin{cases} \text{Ⅰ}: & Ti_1 Ti_2 \cdots\cdots Ti_5 \\ \text{Ⅱ}: & Tj_1 Tj_2 \cdots\cdots Tj_5 \end{cases}$$

并假定$Ti_1<Ti_2<\cdots\cdots<Ti_5$，　$Tj_1<Tj_2<\cdots\cdots<Tj_5$但不是形如(1)的排列。我们按照$Ti_1\to Tj_1\to Ti_2\to Tj_2\to\cdots\cdots$的次序对它们的大小顺序加以检查，必然会发现小大倒置的情况，第一次遇到的小大倒置情况不外下列几种：

(a)$Ti_k<Tj_k$，这时我们将i_k和j_k相交换，则在Ⅰ的总的花费时间中，共减少了$(5-k+1)$个Ti_k,增加了$(5-k+1)$个Tj_k，在Ⅱ中则减少了$(5-k+1)$个Tj_k.增加了$(5-k+1)$个Ti_k，故这十个人总的花费时间不生变化.

(b)$Tj_{k-1}>Ti_k$，我们将i_K与j_{K-1}相交换，则在Ⅰ中增加的时间为$(5-k+1)(Tj_{k-1}-Ti_k)$,在Ⅱ的则减少$(5-K+2)(Tj_{k-1}-Ti_k)$故经此交换后，总的花费时间共减少了$Tj_{k-1}-Ti_k>0$.总之，若这十人不是按(1)的次序排列，则经过适当的换位后，总可换成(1)，而每次换位时，总的花费时间不会增加，因而(1)是一最好的安排。

6．设有一边长为1的正方形，试在这个正方形的内接正三角形中找出一个面积最大的，和一个面积最小的。并求