图书在版编目(CIP)数据

新无敌高二数学：B 版/金宝铮主编．—北京：海豚出版社，2004(无敌升学应试系列)

ISBN 7－80138－415－6

Ⅰ. 新… Ⅱ. 金… Ⅲ. 数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP数据核字(2004)第 098186 号

新无敌高二数学

2B

2005 年 3 月第 1 版

- **创意设计：** 台湾'SUPER'创意工作室
- **制作总监：** 王华荣
- **撰　　文：** 闻岩　高雪松　胡芳　金宝铮
- **总 审 订：** 金宝铮
- **总 编 辑：** 吴锴鋆
- **行政编辑：** 陈文玮
- **责任编辑：** 储宁　齐海光
- **文字编辑：** 周海蓉　王冬军　王占景　陶　洁
- **封面设计：** 康玫玫　周尚文

- **编　　者：** 海豚出版社编辑部
- **出 版 者：** 海豚出版社
  北京市西城区百万庄大街 24 号　邮编：100037
- **行销策划：** 北京光海文化用品有限公司　邮编：100044
  北京市海淀区车公庄西路乙 19 号
  北塔六层
- **服务电话：** (010)88018838

- **发 行 者：** 新华书店经销
- **印　　刷：** 北京市京津彩印有限公司
- **印　　次：** 2005 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
- **开　　本：** 889 × 1194 mm　1/32　9 印张
- **定　　价：** 28. 00 元
- ISBN　7－80138－415－6
- **法律顾问：** 中伦文德律师事务所 沈恒德律师、符霜叶律师

SUPER'S

$\pi \times 15^2 \times \frac{144}{360} = 90\pi(cm^2)$

无敌®

无敌升学应考系列

无敌高二数学

2B

mathematics

全国重点名校名师根据最新高中教材编写

高中学生应考必备

新

配合新课标教材

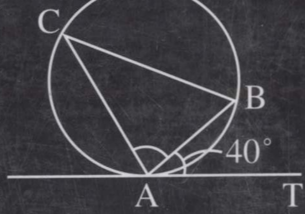
$$\pi \times 15^2 \times \frac{144}{360} = 90\pi(cm^2)$$

SUPER

为维护读者权益，如发现盗版行为，欢迎举报

面目可喜，入门轻松

全国首创彩色教辅书，一改教辅书的枯燥面目，望之既奇，阅之又亲，消除对数学的畏惧心理，轻松学好数学。



应试宝典，省心省力

全书综合性强。名师帮你整理要目，理清经纬，公式定理及结论技法搜罗尽净，扫除学习上的麻烦，一册在手，省心省力。

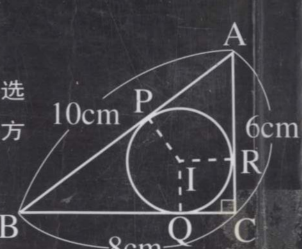
2 B 无敌高二数学

mathematics

举报电话(010) 88018956

广搜博采，探寻佳境

全书内容强大，针对教材罗列代表题型，选题则精；又一一列举解题方法，访寻最佳方案，既开阔思路，又不泥沙俱下。



倾心指导，关怀备至

全书体现浓浓的人文关怀。解题中随处有陷阱随时提醒，"point指导"非但言明解题思路，还辅以应试技巧，可谓用心良苦，关怀备至。

ISBN 7-80138-415

9 787801 384157 >

定价：28元

$$\pi \times 15^2 \times \frac{144}{360} = 90\pi(cm^2)$$

SUPER

无敌高二数学

2B

mathematics

全国首批示范学校资深教师根据最新高中教材编写

新

配合新课标教材

海豚出版社

原版序

学数学原本并不难

在期待中，辛劳中，喜悦中，责任中，我们同读者一起收获了高中数学。从孕育到生产完成的过程中有无数读者给予了鼓励与鞭策。在《无敌初中数学》的基础上，我们再邀名师，吸取经验，提炼精华，倾力编写，完成此书，期望“百尺竿头，更进一步”。

数学在中小学课程设置中相当重要，特别是在高考中常是拉分的关键，但长期以来，它一直扮演着“拦路虎”的角色，学生深知其重要，却又畏惧。我们本着“兴趣是最好的老师”，致力于激发同学们对学习的兴趣及热忱，消除其畏惧心理，设计上先以彩色面目引人，而后以精湛详实内容灌输，做到“华而且实”，如名师在旁，娓娓叙述，既弥补学生课上未及消化的部分，又起到加深巩固的作用。我们的目的是“请君入瓮”，一旦进入必会发现别有洞天，一有收获，自会激起兴趣，增加信心，便会觉得“学数学，原本并不难！”

根据不同年级的特点，我们做了不同的划分。高一数学立足于思路引导、方法指引，并配以详尽的解说，使其“入门有道”；高二数学重于理论与实践的结合，在实际演练中，将思路拓宽；高三数学则紧跟高考，除了历次高考涉及的各种题型、各种解法的详尽指示，尚有针对各层次学生的应试技巧辅导，精彩题库任你遨游。

学习不是死记硬背，不是搞题海战术，而是应掌握良好的思维习惯。基于此，本套三册书均重于典型题的思路分析，题后的概括总结也起到举一反三的作用。“良好的开始，是成功的一半。”高一时播下的良好的种子，经历高二的辛劳耕耘，必会在高三结出累累硕果。

我们在此预祝我们新书的出世能给莘莘学子带来更大的帮助，同时它也期待着与更多新老朋友结识，共创明天的坦途。

2001年7月30日

新大纲、新教材、新无敌

新版序

无敌系列自 1996 年问世以来，受到广大师生的热切关注，至今销售已达 600 万册。

1996 年原国家教委提出修改基础教育教学大纲，1999 年教学计划、教学大纲、教材全面修订。2002 年教育部通知全国使用新大纲。

为使“无敌数学”也能与时俱进，我们的作者依据教育部新大纲、新教材重新编写新版无敌数学。

新大纲中将思维能力的培养从第二位上升到第一位。明确提出：思维能力是指会观察、比较、分析、综合、抽象和概括；会用归纳、演绎和类比进行推理；会合乎逻辑地、准确地阐述自已的思想和观点；能运用数学概念、思想和方法，辨明数学关系，形成良好的思维品质。在能力要求上，新大纲增加了创新意识的培养，并对解决实际问题的能力提出更高的要求。

新教材从教学内容上，增加了以下知识点：逻辑关系词；四种命题；函数的应用举例；向量的加法与减法，平面向量的坐标表示，平面向量的数量积；用二元一次不等式表示平面区域；简单线性规划问题；圆的参数方程；椭圆的参数方程；正多面体；空间向量加法及减法与数乘，空间向量的坐标表示，空间向量的数量积，直线的方向向量，平面的法向量，向量在平面内的射影；随机事件的概率，相互独立事件同时发生的概率，独立重复实验；互斥事件有一发生的概率；研究性课题和实习作业。

新大纲、新教材，实行新的教学探索，我们的无敌数学与教学的改革紧密配合，必将成为同学们学习的好帮手。真诚地祝愿通过无敌数学使我们成为好朋友。也借此向本书作者闻岩、高雪松、胡芳诸位老师的辛勤工作，致上最高的谢意！

总审订：金　宝　铮

2003 年 1 月于北京

Contents

目录

第六章　不等式

内容提示

❶ 掌握不等式的概念.

❷ 掌握不等式的性质，它是证明不等式和解不等式的基础和依据.

❸ 掌握不等式证明的三种常用方法：比较法、分析法、综合法.

❹ 熟练掌握一元一次不等式(组)、一元二次不等式(组)、分式不等式等简单不等式的解法.

❺ 掌握含有绝对值的不等式的性质、证明方法及解法.

第一节　不等式的概念和性质

学习经纬

1 利用实数比较大小的依据，将比较大小的问题转化为两数(或两式)的差的符号问题.

2 不等式的五个性质定理及其推论.

KEY POINT

1 实数比较大小的依据

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$;

$a=b\Leftrightarrow a-b=0$;

$a<b\Leftrightarrow a-b<0$.

2 不等式的性质定理

定理·1 $a>b\Rightarrow b<a$.(反身性)

定理·2 $a>b$，$b>c\Rightarrow a>c$.(传递性)

定理·3 $a>b\Rightarrow a+c>b+c$.(加法性质)

定理·4 $a>b$，$c>0\Rightarrow ac>bc$.(乘法性质)

$a>b, c<0\Rightarrow ac<bc$.

定理·5 $a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ ($n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$).(开方性质)

由以上定理可以推出以下结论：

(1) $a>b$，$c>d\Rightarrow a+c>b+d$;

(2) $a>b>0$，$c>d>0\Rightarrow ac>bd$;

(3) $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$ ($n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$).

解题秘招

举例·1 已知：$a>b$，$c<d$. 求证：$a-c>b-d$.

解法与解答

证法一　$\because a>b$，$c<d$，

$\therefore d>c$.(反身性)

$\therefore a+d>b+c$.(加法性质)

$\therefore a-c>b-d$.

证法二　$\because a>b$，$c<d$，

$\therefore -c>-d$.

$\therefore a-c>b-d$.(推论 1)

注意　在应用中，我们有时由不等式的性质定理及推论可以得到一些新的结论，但是这些结论在作题中是不允许被直接引用的.

举例·2 比较$(a-1)^2$与a^2+1的大小．

解法与解答

$(a-1)^2-(a^2+1)$

$=a^2-2a+1-a^2-1$

$=-2a.$

当$a>0$时，$-2a<0$，$(a-1)^2<a^2+1$；

当$a=0$时，$-2a=0$，$(a-1)^2=a^2+1$；

当$a<0$时，$-2a>0$，$(a-1)^2>a^2+1$.

$$\therefore (a-1)^2\begin{cases}<a^2+1\ (a>0\text{时}),\\=a^2+1\ (a=0\text{时}),\\>a^2+1\ (a<0\text{时}).\end{cases}$$

point 指导 比较两个代数式值的大小，基本的方法就是将两个代数式作差，其差的正、负决定了代数式哪一个大．另外分类讨论的思想在解答中起了很好的作用，应注意掌握应用．

举例·3 若$a<0$，$-1<b<0$，那么a、ab、ab^2之间的大小关系为(　　)

(A) $a>ab>ab^2$.　　(B) $ab^2>ab>a$.

(C) $ab>a>ab^2$.　　(D) $ab>ab^2>a$.

解法与解答

选(D).

解法一　$\because -1<b<0$,

$\therefore 1>-b>0$.

$\therefore 1>b^2>0$.

$\because a<0$,

$\therefore a<ab^2<0$.

$\because ab>0$,

$\therefore ab>0>ab^2>a$.

$\therefore$选择(D).

解法二　令$a=-1$，$b=-\dfrac{1}{2}$.

$\therefore ab=\dfrac{1}{2}$，$ab^2=-\dfrac{1}{4}$，$a=-1$.

$\therefore ab>ab^2>a$.

注意 此类问题我们可以用不等式的性质来解，同时也可以用特殊值代入的方法来解．

举例·4 已知：条件甲：$\begin{cases}2<x+y<4,\\0<xy<3,\end{cases}$

条件乙：$\begin{cases}0<x<1,\\2<y<3.\end{cases}$ 那么条件甲是条件乙的什么条件?

解法与解答

条件甲不一定能推出条件乙，如$x=2$，$y=1.4$.

由条件乙：$\begin{cases}0<x<1,\\2<y<3\end{cases}$ 可知

$2<x+y<4$. (推论 1)

$\therefore 0<xy<3$. (推论 2)

$\therefore$条件甲是条件乙的必要但不充分条件．

point 指导 要论证一个结论正确，必须给予严格的证明．但是要证明一个结论错误，只要举出一个反例即可．

STEP BY STEP

例题·1 $a+b>2c$的一个充分条件是(　　)

(A) $a>c$或$b>c$.　　(B) $a>c$且$b<c$.

(C) $a>c$且$b>c$.　　(D) $a>c$或$b<c$.

答 (C).

解 $\because a>c$ 且 $b>c$,

$\therefore a+b>c+c=2c$. (推论 1)

$\therefore$选择(C).

point 指导

对于某些选择题，如果能确定(经过证明)其中一个是正确的，可以不考虑其余选项.

此题也可用特殊值否定选项(A)、(B)、(D)，从而得出正确结论，不妨一试.

例题·2 已知：a、$b\in \mathbf{R}$，且 $a>b$，则下列各式中成立的是(　　)

(A) $a^2>b^2$.　　(B) $(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$.

(C) $\lg(a-b)>0$.　　(D) $\frac{b}{a}<1$.

答 (B).

解1 当 $a=1$，$b=-2$ 时，(A)不成立；

当 $a=2$，$b=1$ 时，(C)不成立；

当 $a=-1$，$b=-2$ 时，(D)不成立.

$\therefore$选择(B).

解2 由指数函数的单调性，知 $y=(\frac{1}{2})^x$ 是减函数，$a>b$ 则 $f(a)<f(b)$.

$\therefore$选择(B).

注意

用反例否定选项是一个很好的方法，但注意所举反例的数值必须满足题设，如此题中必须满足：$a>b$. 否则会得出错误的判断.

例题·3 若 $a>b>0$，$d<c<0$，则下列各式中正确的是(　　)

(A) $ac>bd$.　　(B) $ad>bc$.

(C) $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.　　(D) $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$.

答 (D).

解 $\because a>b>0$，$d<c<0$,

$\therefore -d>-c>0$.

$\therefore -ad>-bc>0$. (推论 2)

$\therefore ad<bc$. (否定(B))

$\because cd>0$,

$\therefore \frac{ad}{cd}<\frac{bc}{cd}$.

$\therefore \frac{a}{c}<\frac{b}{d}$.

$\therefore$选择(D).

注意

有时可以将证明与举反例相结合来解题. 如此题中可先选特殊值举反例，否定掉部分选项，再从余下的选项中选择证明.

例题·4 $\frac{1}{a}>-1$ 是 $a<-1$ 成立的(　　)

(A)充分但不必要条件.

(B)必要但不充分条件.

(C)充分且必要条件.

(D)既不充分也不必要条件.

答 (B).

解 设 $a=2$，满足条件$\frac{1}{a}>-1$，但不能得出 $a<-1$,

$\therefore \frac{1}{a}>-1$ 不是 $a<-1$ 成立的充分条件.

当 $a<-1$ 时，$a<0$,

$\therefore 1>\frac{-1}{a}$.

$\therefore \frac{1}{a}>-1$.

$\therefore \frac{1}{a} > -1$ 是 $a < -1$ 成立的必要条件.

综合上述，$\frac{1}{a} > -1$ 是 $a < -1$ 成立的必要但不充分条件.

$\therefore$选择(B).

注意 对于充要条件的判断，可分两步完成. 首先是将$\frac{1}{a} > -1$ 当作条件,推导结论：$a<-1$;下一步是将$a<-1$ 当成条件，推导结论：$\frac{1}{a} > -1$.

例题·5 若已知：$a<b<0$，$d<c<0$. 请试求证：$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

证 $\because a<b<0$，$d<c<0$，

$\therefore -a>-b>0$，$-d>-c>0$.

$\therefore (-a)(-d)>(-b)(-c)$，(推论 2)

即 $ad>bc$.

$\because cd>0$,

$\therefore \frac{ad}{cd} > \frac{bc}{cd}$.

$\therefore \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

point 指导 有关不等式的证明，每一步都必须有依据，不可引用习题中证明的定理、性质.

例题·6 请试比较代数式$(a-5)(a-7)$与$(a-6)^2$的大小.

解 $(a-5)(a-7)-(a-6)^2$

$=a^2-12a+35-(a^2-12a+36)$

$=-1<0$.

$\therefore (a-5)(a-7)<(a-6)^2$.

例题·7 已知：数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，且 S_n 是它的前 n 项的和. 试求证：$\log_2\sqrt{2} \leqslant S_n < \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}2$.

证 $\because \log_2\sqrt{2} = \frac{1}{2}\log_2 2 = \frac{1}{2}$,

$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{2} = 1$.

$S_n = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$=1-\frac{1}{n+1}$.

$\therefore \frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}\leqslant 1-\frac{1}{n+1}<1$,

即 $\log_2\sqrt{2} \leqslant S_n < \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}2$.

point 指导 这里用到了不等式的放缩，1 减去一个正数要小于 1. 缩放是不等式变形的一种常用技巧. 另一端考虑 n 取最小值时的极端情况.

例题·8 已知：$f(x)=ax^2+bx$，并且$1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$. 求 $f(-2)$的取值范围.

解 设 $f(-2)=mf(-1)+nf(1)$,

代入得 $4a-2b$

$=m(a-b)+n(a+b)$

$=(m+n)a+(-m+n)b$.

$\therefore \begin{cases} m+n=4, \\ -m+n=-2. \end{cases}$ 解出 $\begin{cases} m=3, \\ n=1. \end{cases}$

$\therefore f(-2)=3f(-1)+f(1).$

$\because 1 \leqslant f(-1) \leqslant 2,$

$\therefore 3 \leqslant 3f(-1) \leqslant 6.$

又 $\because 2 \leqslant f(1) \leqslant 4,$

$\therefore 5 \leqslant 3f(-1)+f(1) \leqslant 10.$

即 $5 \leqslant f(-2) \leqslant 10.$

point 指导

此题可能会有如下错解:

$\begin{cases} 1 \leqslant f(-1) \leqslant 2, \ 1 \leqslant a-b \leqslant 2, & ① \\ 2 \leqslant f(1) \leqslant 4, \ 2 \leqslant a+b \leqslant 4. & ② \end{cases}$

由①、②解得 $\begin{cases} \frac{3}{2} \leqslant a \leqslant 3, \\ \frac{1}{2} \leqslant b \leqslant 1. \end{cases}$

而 $f(-2)=4a-2b$, $\therefore 3 \leqslant f(-2) \leqslant 12$. 错因:由①、②得到 a、b 的范围,但等号不一定能同时取到.

例题·9 运输一批海鲜,可在汽车、火车、飞机三种运输工具中选择.它们的速度分别为 v 千米/小时,$2v$ 千米/小时,$10v$ 千米/小时.每千米的运费分别为 a 元、b 元、c 元,且 $b<a<c$.又知这批海鲜在运输过程中的损耗为 m 元/小时.若使用三种运输工具分别运输时,各自的总费用(运费与损耗之和)互不相等.试确定使用哪种运输工具总费用最省(题中字母均为正的已知量).

解 设使用汽车、火车、飞机这三种运输工具分别运输时,各自的总费用分别为 y_1 元、y_2 元、y_3 元,运输路程为 S 千米.

据题意有 $\begin{cases} y_1=aS+\frac{S}{v}m=S\left(a+\frac{m}{v}\right), \\ y_2=bS+\frac{S}{2v}m=S\left(b+\frac{m}{2v}\right), \\ y_3=cS+\frac{S}{10v}m=S\left(c+\frac{m}{10v}\right). \end{cases}$

$$\therefore y_2-y_1=S\left(b+\frac{m}{2v}\right)-S\left(a+\frac{m}{v}\right)$$

$$=S\left[(b-a)-\frac{m}{2v}\right]<0.$$

$\therefore y_2<y_1.$

$$\text{又} \because y_3-y_2=S\left(c+\frac{m}{10v}\right)-S\left(b+\frac{m}{2v}\right)$$

$$=S\left[(c-b)-\frac{2m}{5v}\right].$$

$\therefore$ 当 $(c-b)-\frac{2m}{5v}>0$ 时,$y_3>y_2$,y_2 最小;

当 $(c-b)-\frac{2m}{5v}<0$ 时,$y_3<y_2$,y_3 最小.

$\therefore$ 当 $c>b+\frac{2m}{5v}$ 时,选择用火车运输;

当 $c<b+\frac{2m}{5v}$ 时,选择用飞机运输.

point 指导

数学应用意识的培养,应渗透到数学的各章内容之中,特别是不等式这章,更是培养数学应用能力的一个很好的载体.

LEARNING TEST · 实力测验

KEY 见附录解答

一、选择题

1. 以下不等式中,对于 $x \in \mathbf{R}$ 的任意值恒成立的是( )

(A) $x+1>0$. (B) $x^2+1>x$. (C) $x^2-1>x$. (D) $|x+1|>0$.

2. 若 $a<b<0$，则下列不等式中，正确的是(　　)

(A) $a^2<b^2$.　　(B) $\frac{a}{b}<1$.　　(C) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.　　(D) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

3. 若 $a-b>a$ 且 $a+b<b$，则以下判断正确的是(　　)

(A) $a>0$ 且 $b>0$.　　(B) $a>0$ 且 $b<0$.　　(C) $a<0$ 且 $b<0$.　　(D) $a<0$ 且 $b>0$.

4. 满足条件：$n^{200}<5^{300}$ 的最大整数 n 是(　　)

(A)9.　　(B)10.　　(C)11.　　(D)12.

5. 若 $a<b<0$，则下列不等关系中，不能成立的是(　　)

(A) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.　　(B) $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$.　　(C) $|a|>|b|$.　　(D) $a^2>b^2$

6. 以下四个命题：

①若 $ab>c$ 且 $b\neq0$，则 $a>\frac{c}{b}$；

②若 $a<b<0$，则 $a^m<b^m$（$m\in\mathbf{N}$）；

③若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$；

④若 $a<b$，则 $|a|<|b|$.

其中正确命题的个数为(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

二、解答题

1. 已知：$a+b>0$，$b<0$. 请试将 a、b、$-a$、$-b$ 按由小到大的顺序排列 .

2. 比较代数式 a^2+b^2 与 $2ab$ 的大小 .

3. $a\in\mathbf{R}$，试比较 $1-a$ 与 $\frac{1}{1+a}$ 的大小 .

4. 已知：$c>a>b>0$. 求证：$\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$.

第二节　不等式的证明

学习经纬

1 不等式证明的三种方法：比较法、分析法、综合法 .

2 “两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数”重要定理 .(学有余力的同学可将定理条件中的两个正数推广至 n 个正数 .)

KEY POINT

1 两个重要定理

定理·1 如果 $a、b\in\mathbf{R}$,那么 $a^2+b^2\geqslant2ab$.

(当且仅当 $a=b$ 时取"="号.)

定理·2 如果 a、b 是正数，那么 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.(当且仅当 $a=b$ 时取"="号.)

两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

2 定理2推论 n 个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.(此部分供学有余力的同学掌握.)

① $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$.(其中 a、b、c 均为正数，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.)

② $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.(其中 $a_i>0$，$i=1$、2、…，n，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立.)

即 n 个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

解题秘招

举例·1 a、$b\in\mathbf{R}_+$. 求证：$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geqslant4$.

解法与解答

$\because a$、$b\in\mathbf{R}_+$,(不可省略)

$\therefore a+b\geqslant2\sqrt{ab}>0$. ①

$\therefore\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}>0$. ②

①×②得

$$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geqslant2\sqrt{ab}\cdot2\sqrt{\frac{1}{ab}}=4.$$

$\therefore(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geqslant4$.

point 指导 使用定理2，必须强调涉及的字母是正数，否则将会导致错误的结论.

举例·2 已知：a、$b\in\mathbf{R}_+$. 求证：$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$.

解法与解答

$(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)$

$=a^3-a^2b+b^3-ab^2$

$=a^2(a-b)+b^2(b-a)$

$=(a-b)(a^2-b^2)$

$=(a-b)^2(a+b)$.

$\because(a-b)^2\geqslant0$，$a$、$b\in\mathbf{R}_+$，

$\therefore a+b>0$.

$\therefore(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)\geqslant0$，

即 $a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$.

其中当且仅当 $a=b$ 时，"="号成立.

point 指导 我们在第一节中已经学习的比差法是证明不等式的基本方法，也是常用方法之一.

举例·3 已知：$a>0$，$b>0$. 求证：$a^{2a}\cdot b^{2b}\geqslant(ab)^{a+b}$.

解法与解答

$\because a>0$，$b>0$，

$\therefore a^{2a}>0$，$b^{2b}>0$，$(ab)^{a+b}>0$，

$\frac{a^{2a}b^{2b}}{(ab)^{a+b}}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=(\frac{a}{b})^{a-b}$.

(1)当 $a>b$ 时，$a-b>0$，$\frac{a}{b}>1$.

$\therefore(\frac{a}{b})^{a-b}>1$.

$\therefore a^{2a}b^{2b}>(ab)^{a+b}$.

(2)当 $0<a<b$ 时，

$a-b<0$，$0<\frac{a}{b}<1$.

$\therefore (\frac{a}{b})^{a-b}>1$.

$\therefore a^{2a}\cdot b^{2b}>(ab)^{a+b}$.

(3)当 $a=b$ 时，$a^{2a}\cdot b^{2b}=(ab)^{a+b}$.

综合(1)、(2)、(3)得 $a^{2a}\cdot b^{2b}\geqslant(ab)^{a+b}$.

point 指导 对于比较两个正数 M、N 的大小，可以构造 $\frac{M}{N}$. 如果 $\frac{M}{N}>1$，则 $M>N$；如果 $\frac{M}{N}<1$，则 $M<N$；如果 $\frac{M}{N}=1$，则 $M=N$. 这种方法叫做比商法．比差法、比商法统称为比较法．

举例·4 求证：$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

解法与解答

$\because$ $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ 与 $\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 都是正数．

要证 $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$，

只需证明 $(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$.

展开得 $2+7+2\sqrt{14}<3+6+2\sqrt{18}$.

即 $\sqrt{14}<\sqrt{18}$，$14<18$.

$\because 14<18$ 成立，

$\therefore (\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$ 成立．

即 $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

point 指导 从求证的不等式出发，分析使这个不等式成立的充分条件，把证明不等式转化为判定这些充分条件是否具备的问题．如果能够肯定这些充分条件都已具备，那么就可以断定原不等式成立．这就是分析法．

举例·5 已知：$-1<a<1$，$-1<b<1$. 试求证：$-1<\frac{a+b}{1+ab}<1$.

解法与解答

$\because a<1$，$b<1$，

$\therefore (1-a)(1-b)>0$，

$\therefore 1-a-b+ab>0$，

$\therefore a+b<1+ab$.

$\because a>-1$，$b>-1$，

$\therefore (1+a)(1+b)>0$，

$\therefore 1+a+b+ab>0$，

$\therefore a+b>-1-ab=-(1+ab)$.

$\because 1+ab>0$，

$\therefore -1<\frac{a+b}{1+ab}<1$.

point 指导 利用某些已经证明的不等式及不等式的性质推导出所要证明的不等式成立，这种方法叫做综合法．通常用分析法探索证明的途径，以综合法的形式呈现解题、证题的过程．

举例·6 用一张钢板制作一个容积为 4m^3 的无盖长方体水箱．可用的长方形钢板有四种不同的规格（长×宽的尺寸如各选项所示，单位均为 m)，若又要够用，又要所剩最少，则应选择钢板的规格是(　　)

(A)2×5.　　(B)2×5.5.

(C)2×6.1.　　(D)3×5.

解法与解答

选(C).

设长方体水箱的长、宽、高依次为 x、y、z，单位均为m. 所用钢板面积为 S，单位 m^2，则有 $S=xy+2xz+2yz\geqslant3\sqrt[3]{4x^2y^2z^2}$.

据题意有 $xyz=4$. ①

$\therefore S\geqslant 3\times 4=12$.

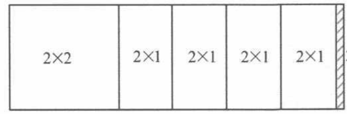
当且仅当 $xy=2xz=2yz$ 时，等号成立，

即 $x=y=2z$ 时等号成立，

代入①得到 $z^3=1$.

$$\therefore \begin{cases} x=2, \\ y=2, \\ z=1. \end{cases}$$

选择(A)、(B)均不够用．选(D)又有浪费，选(C)最省．具体使用方案如下．(阴影部分为剩余．)



STEP BY STEP

例题·1 求函数 $y=3x^2+\dfrac{1}{2x^2}$的最值．

解 $\because y=3x^2+\dfrac{1}{2x^2}\geqslant 2\cdot\sqrt{3x^2\cdot\dfrac{1}{2x^2}}$

$=2\cdot\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\sqrt{6}$,

$\therefore y$ 的最小值是$\sqrt{6}$．

当且仅当 $3x^2=\dfrac{1}{2x^2}$时，等号成立，

即 $x^4=\dfrac{1}{6}$, $x=\sqrt[4]{\dfrac{1}{6}}=6^{-\frac{1}{4}}$时,取“=”号．

当 x 趋向于无穷大时，y 也趋向于无穷大．

因此，函数 $y=3x^2+\dfrac{1}{2x^2}$没有最大值．

point 指导 利用均值定理求函数的最值问题时，应该指明当自变量取何值时，函数取得最值．

例题·2 已知：函数 $y=x+\dfrac{1}{x-3}+1$，其中 $x>3$. 求函数的最小值．

解 $y=x+\dfrac{1}{x-3}+1=x-3+\dfrac{1}{x-3}+4$

$\geqslant 2\sqrt{(x-3)\dfrac{1}{x-3}}+4=2+4=6$.

($\because x>3$, $\therefore x-3>0$, $\dfrac{1}{x-3}>0$.)

当且仅当 $x-3=\dfrac{1}{x-3}$时，取等号，

即$(x-3)^2=1$，$x=4$ 时，取等号．此时，函数的最小值为 6.

注意 利用恒等变形，创造条件．使用平均值定理．

例题·3 a、b、$c\in\mathbf{R}$. 求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

证 $\because a^2+b^2\geqslant 2ab$, ①

$b^2+c^2\geqslant 2bc$, ②

$c^2+a^2\geqslant 2ca$. ③

①+②+③得

$$2a^2+2b^2+2c^2\geqslant 2ab+2bc+2ca.$$

即 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立．

注意 在解此类题型时，我们可以多次使用均值定理，并把多次使用定理的结论依据不等式的性质变形．如本题中将①、②、③式相加，最终可得到结果．

例题·4 已知：a、b、$c\in\mathbf{R}_+$. 请试求证：$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$.

证 $\because a>0,\ b>0,\ c>0$,

$\therefore a+b\geqslant 2\sqrt{ab}>0$, ①

$b+c\geqslant 2\sqrt{bc}>0$, ②

$c+a\geqslant 2\sqrt{ac}>0$, ③

①×②×③得

$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8\sqrt{a^2b^2c^2}=8abc$.

例题·5 已知：a、b、$c\in\mathbf{R}_+$. 求证：

$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geqslant 9$.

证1 $\because a$、b、$c\in\mathbf{R}_+$,

$\therefore \frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$, ①

$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geqslant 2$, ②

$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 2$. ③

①+②+③得

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 6$.

$\therefore \frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}\geqslant 6$,

$\therefore 1+\frac{b+c}{a}+1+\frac{a+c}{b}+1+\frac{a+b}{c}\geqslant 9$,

$\therefore \frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}\geqslant 9$,

即 $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geqslant 9$.

证2 $\because a$、b、$c\in\mathbf{R}_+$,

$\therefore a+b+c\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{abc}>0$, ①

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}>0$. ②

①×②得

$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geqslant 3^2\cdot\sqrt[3]{abc\cdot\frac{1}{abc}}$

$=9$.

注意 证法一使用的知识不超过教科书的一般要求，而使用证法二会令人更感简捷.

例题·6 已知：$a+b=1$，a、$b\in\mathbf{R}_+$. 试求证：$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})\geqslant 9$.

证 $1+\frac{1}{a}=1+\frac{a+b}{a}=2+\frac{b}{a}$,

$1+\frac{1}{b}=1+\frac{a+b}{b}=2+\frac{a}{b}$.

$(2+\frac{b}{a})(2+\frac{a}{b})=4+2(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})+1\geqslant 4+2\cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+1=9$.

$\therefore (1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})\geqslant 9$.

注意 将已知条件 $a+b=1$ 适时代入、变形是解决问题的关键.

例题·7 求函数 $y=\sin x\cdot\cos^2 x$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$的最大值.

解 $\because x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\sin x>0$，$\cos x>0$,

$\therefore y>0$.

$y^2=\sin^2 x\cos^4 x=\frac{2\sin^2 x\cos^2 x\cos^2 x}{2}$

$\leqslant\frac{1}{2}(\frac{2\sin^2 x+\cos^2 x+\cos^2 x}{3})^3=\frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{3})^3$

$=\frac{4}{27}$.

$\therefore y\leqslant\sqrt{\frac{4}{27}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$.