

决胜MBA
www.52mba.com



华慧教育
远程教育服务专家

管理类专业硕士学位入学考试
综合辅导教材

决胜MBA

——中国MBA网校备考笔记·综合

1 数学分册

中国MBA网校
华慧MBA考试研究中心 编著

MBA MPA MPAcc MAud
MEM MTA MLIS

2014
最新版

实效见证

No.1

十一年考前培训辅导经验
100000考生一致推荐
最好用的MBA联考
辅导用书

谙熟数学真谛 破解数学“魔咒”
两步到位深挖概念
多角多层演绎定理 锤炼技巧 以快制胜



法律出版社
LAW PRESS CHINA

决胜MBA

——中国MBA网校备考笔记·综合

① 数学分册

中国MBA网校
华慧MBA考试研究中心 编著


丛书总主编：杨小清

丛书编委会：马振旗 国伟 陈君华 杨小清

凌吟文 丁继勇 陈艳兰 丁小永

邓洁

分册主编：凌吟文 丁小永



法律出版社

图书在版编目(CIP)数据

决胜 MBA:中国 MBA 网校备考笔记:2014 年版. 综合 / 中国 MBA 网校, 华慧 MBA 考试研究中心编著. —2 版. —北京:法律出版社,2013. 4

ISBN 978 - 7 - 5118 - 4723 - 2

I. ①决… II. ①中… ②华… III. ①工商管理—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①F203.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 050921 号

决胜 MBA:中国 MBA 网校备考笔记. 综合

编辑统筹 法律应用出版社
责任编辑 李 群
装帧设计 黄海军 李 瞻

© 法律出版社·中国

出版 法律出版社
总发行 中国法律图书有限公司
经销 新华书店
印刷 世纪千禧印刷(北京)有限公司
责任印制 陶 松

开本 787 毫米×1092 毫米 1/16
印张 48.75
字数 1208 千
版本 2013 年 4 月第 2 版
印次 2013 年 4 月第 1 次印刷

法律出版社/北京市丰台区莲花池西里 7 号(100073)
电子邮件/info@lawpress.com.cn
网址/www.lawpress.com.cn
咨询电话/010-63939796

销售热线/010-63939792/9779
010-80352178

中国法律图书有限公司/北京市丰台区莲花池西里 7 号(100073)
全国各地中法图分、子公司电话:
第一法律书店/010-63939781/9782
重庆公司/023-65382816/2908
北京分公司/010-62534456

西安分公司/029-85388843
上海公司/021-62071010/1636
深圳公司/0755-83072995

书号:ISBN 978 - 7 - 5118 - 4723 - 2
(如有缺页或倒装,中国法律图书有限公司负责退换)

定价(综合全三册):149.80 元

在我们尚未出售这本书之前,我们先开诚布公地谈一谈。

买这本书,根本就是浪费金钱。

不管这本书是关心你的朋友送的,还是你自己买的,钱都白花了。

除非你愿意接受并尝试书中的方式方法,这在许多人身上都试验过,非常有效。

除非你有决心,有毅力,有勇气,坚持到底,按书中的计划实行,否则你花在这本书上的时间和金钱就都白费了。

除非你愿意平均每天花上两小时的时间,并且一直这样坚持二十五个星期,否则钱白花了。

我们不是希腊神话中的先知,但是我们敢打赌,尝试了这本书中的方法,半年后你的信心将会是以前的二十五倍。

“但是我和别人不一样!”你提醒我们。

真的不一样吗?新年伊始时,你制订的计划有几样完成了?你说过要减肥、戒烟、戒酒……结果呢?

你要自欺欺人到何时呢?

或许你真的有一股想要成功的欲望。工作中无形的压力,婚姻带来的责任,为人父母的义务,渴望新居、汽车,还要迈入那神圣的 MBA 殿堂,这一切的实现都要靠你自己的努力才行。

但是只凭一股想要成功的念头并不够。《决胜 MBA——中国 MBA 网校备考笔记》这套丛书致力于帮助考生实现人生的跨越。作为丛书编委,我们很久以前便意识到,对于成功的渴望分为两种,其中有一种是虚假的。怀有这种虚假欲望的人不停地告诉家人、上司、甚至自己,他真的渴望成功。他阅读所有找得到的关于自我帮助一类的书籍,从阅读别人成功的事迹中得到快感。遗憾的是,他们从来不能身临其境,而只是在想像中参与别人的生活和行为,他们像看客一样,只看不做。

对这类幻想家来说,明天才是最伟大的日子。

明天永远不会来临。

……

当你一天天按照本书提供的方法复习时,你会渐渐发现一个重要的真理:你是造物主最伟大的奇迹。要模仿你的大脑,需要纽约帝国大厦的所有内部电子设备。你举世无双,独一无二。你是千百万年进化的结晶。无论智能,还是体能,你都远远超过所罗门、恺撒或是柏拉图。你能使生活更美好,人生更有意义。

MBA 数学,考查范围是中学阶段的数学基础知识,概念不多,难度不大。考查的重点不是会不会,而是快不快。数学成功的关键在于作答速度。

每年 MBA 联考成绩一公布,就有很多考生,尤其是毕业 5 年以上的文科生,在综合科上败阵。大多数人把综合科的失败归咎于数学。有人因此放弃了 MBA,有人心有不甘,还在艰难决断中……这其中就有一定数量的考生考完后都没弄明白 MBA 数学到底考什么,数学应该如何备考,可谓是败得糊涂。

其实,数学并不会决定综合科的成败。想考 MBA,说明你在某些科目上是有优势的。历年考上北大的学生是文理各半的,MBA 联考状元文科生也不比理科生少。

MBA 数学与高考数学区别很大:MBA 数学主要考查运用基础知识分析解决问题的能力。所以复习一定要侧重对概念定理的理解与灵活运用,而非复杂计算或难题偏题。

MBA 数学是考研中难度最低的,比数学(四)简单得多;只要选对教材(适合自己的)、学习方法得当,拿个 45 分以上易如反掌。每次考试,简单的题至少占 50%,把可用的时间(50 分钟左右)全部用来做这 50%的题(12.5 道),4 分钟做对一道简单题难度不大;剩下的 50%能做则做,不会做就猜,只要你运气不太背,猜对 7~10 分是正常的。如此,数学拿个 50 分左右不是问题。

所以,对教材的选择要有清醒的认识,要根据自己的基础和存在的问题去选择。

如果你不是数学天才,就不要跟难题计较;数学底子不好就不要选择重题海战术、有偏题怪题的教材,不要人云亦云,要对适合自己的教材有信心。

《决胜 MBA——中国 MBA 网校备考笔记·数学分册》就是一本特别适合数学基础不太好的考生备战 MBA 数学的教材。它是国内唯一一本主要针对数学基础一般的 MBA、MPA、MPAcc 考生的数学复习用书,是中国 MBA 网校多年以来只供内部学员使用的高效数学备考资料的结晶,它融备考辅导精华与教学心得于一体,将备考战略性元素自然地穿插在每一个考点之上。该书根据最新 MBA 考试大纲的要求,按照新的体例结构编写,涵盖了 MBA 数学考试的必备基础知识、基本内容和基本题型,深入浅出地诠释了各考点的基本解题思路和技巧。

本书具有如下特点:

1. 适度的扩展与深挖——定理、定义、性质和公式逐一吃透;
2. 多层次的例题精解——理论和公式贴心地完美演绎;
3. 难度适宜的习题精练——解题技巧于无声中生动操练;
4. 经典真题的适时回顾——实战底气在思考揣摩中步步厚实。

由于我们的经验和水平有限,本书难免有疏漏和不足之处,欢迎读者朋友们提出批评意见和宝贵建议,以便我们进一步修订和完善。

目 录

绪论 2013 年 MBA 综合能力考试大纲及解析	1
第一章 实数的概念、性质和运算	4
第一节 定理、定义、公式的扩展与深挖	4
第二节 定理演绎——例题	11
第三节 技巧操练——习题	17
第四节 历年真题回顾与思考	25
第二章 整式和分式	29
第一节 定理、定义、公式的扩展与深挖	29
第二节 定理演绎——例题	33
第三节 技巧操练——习题	35
第四节 历年真题回顾与思考	45
第三章 方程式和不等式	47
第一节 定理、定义、公式的扩展与深挖	47
第二节 定理演绎——例题	52
第三节 技巧操练——习题	55
第四节 历年真题回顾与思考	65
第四章 数列	72
第一节 定理、定义、公式的扩展与深挖	72
第二节 定理演绎——例题	74
第三节 技巧操练——习题	78
第四节 历年真题回顾与思考	92
第五章 排列组合与概率初步	96
第一节 定理、定义、公式的扩展与深挖	96
第二节 定理演绎——例题	104
第三节 技巧操练——习题	110
第四节 历年真题回顾与思考	121

第六章 几何与平面解析几何初步	126
第一节 定理、定义、公式的扩展与深挖.....	126
第二节 概念演绎——例题.....	136
第三节 技巧操练——习题.....	143
第四节 历年真题回顾与思考.....	153
第七章 数学综合练习题	159
第一节 问题求解综合练习.....	159
第二节 条件充分性判断综合练习.....	169
第八章 MBA 联考数学真题及答案详解	200
2009年1月MBA联考数学真题及答案详解	200
2010年1月MBA联考数学真题及参考答案详解	206
2011年1月MBA联考数学真题及参考答案详解	213
2012年1月MBA联考数学真题及参考答案详解	219
2013年1月MBA联考数学真题及参考答案详解	225

绪论

2013年MBA综合能力考试大纲及解析

2013年管理类专业学位联考综合能力考试大纲中数学、逻辑、写作部分与2012年相比没有变化。大纲的主要内容如下:

一、考试性质

综合能力考试是为高等院校和科研院所招收管理类专业学位硕士研究生而设置的具有选拔性质的全国联考科目,其目的是科学、公平、有效地测试考生是否具备攻读专业学位所必需的基本素质、一般能力和培养潜能,评价的标准是高等学校本科毕业生所能达到的及格或及格以上水平,以利于各高等院校和科研院所所在专业上择优选拔,确保专业学位硕士研究生的招生质量。

二、考查目标

1. 具有运用数学基础知识、基本方法分析和解决问题的能力。
2. 具有较强的分析、推理、论证等逻辑思维能力。
3. 具有较强的文字材料理解能力、分析能力以及书面表达能力。

三、考试形式和试卷结构

1. 试卷满分及考试时间

试卷满分为200分,考试时间为180分钟。

2. 答题方式

答题方式为闭卷、笔试。不允许使用计算器。

3. 试卷内容与题型结构

数学基础 75分,有以下两种题型:

问题求解 15小题,每小题3分,共45分



条件充分性判断	10 小题,每小题 3 分,共 30 分
逻辑推理	30 小题,每小题 2 分,共 60 分
写作	2 小题,其中论证有效性分析 30 分,论说文 35 分,共 65 分

四、考查内容

(一) 数学基础

综合能力考试中的数学基础部分主要考查考生的运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力和数据处理能力,通过问题求解和条件充分性判断两种形式来测试。

试题涉及的数学知识范围有:

1. 算术

(1) 整数

①整数及其运算 ②整除、公倍数、公约数 ③奇数、偶数 ④质数、合数

(2) 分数、小数、百分数

(3) 比与比例

(4) 数轴与绝对值

2. 代数

(1) 整式

①整式及其运算 ②整式的因式与因式分解

(2) 分式及其运算

(3) 函数

①集合 ②一元二次函数及其图像 ③指数函数、对数函数

(4) 代数方程

①一元一次方程 ②一元二次方程 ③二元一次方程组

(5) 不等式

①不等式的性质 ②均值不等式 ③不等式求解:一元一次不等式(组),一元二次不等式,简单绝对值不等式,简单分式不等式。

(6) 数列、等差数列、等比数列

3. 几何

(1) 平面图形

①三角形 ②四边形(矩形、平行四边形、梯形) ③圆与扇形

(2) 空间几何体

①长方体 ②柱体 ③球体

(3) 平面解析几何

①平面直角坐标系 ②直线方程与圆的方程 ③两点间距离公式与点到直线的距离公式

4. 数据分析

(1) 计数原理

①加法原理、乘法原理 ②排列与排列数 ③组合与组合数

(2) 数据描述

①平均值 ②方差与标准差 ③数据的图表表示:直方图,饼图,数表。

(3) 概率

①事件及其简单运算 ②加法公式 ③乘法公式 ④古典概型 ⑤伯努利概型

(二) 逻辑推理

综合能力考试中的逻辑推理部分主要考查考生对各种信息的理解、分析、判断和综合,以及相应的推理、论证、比较、评价等逻辑思维能力,不考查逻辑学的专业知识。试题内容涉及自然、社会和人文等各个领域,但不考查相关领域的专业知识。

(三) 写作

综合能力考试中的写作部分主要考查考生的分析论证能力和文字表达能力,通过论证有效性分析和论说文两种形式来测试。

1. 论证有效性分析

论证有效性分析试题的题干为一段有缺陷的论证,要求考生分析其中存在的问题,选择若干要点,评论该论证的有效性。

本类试题的分析要点是:论证中的概念是否明确,判断是否准确,推理是否严密,论证是否充分等。

文章要求分析得当,理由充分,结构严谨,语言得体。

2. 论说文

论说文的考试形式有两种:命题作文、基于文字材料的自由命题作文。每次考试为其中一种形式。要求考生在准确、全面地理解题意的基础上,对命题或材料所给观点进行分析,表明自己的观点并加以论证。

第一章

实数的概念、性质和运算

第一节 定理、定义、公式的扩展与深挖

一、充分条件与条件充分性判断

(一) 充分条件

充分条件的定义:由条件 A 成立,就可以推出结论 B 成立(即 A 推出 B 是真命题),则说 A 是 B 的充分条件。

若 A 是 B 的充分条件,也可以说:A 具备了使 B 成立的充分性。若 A 推不出 B,则说 A 不是 B 的充分条件,也可以说:A 不具备使 B 成立的充分性。

(二) 条件充分性判断

条件充分性判断是 MBA 联考数学的一种比较特殊的数学题。这类题型主要围绕高中数学中的充分条件这个知识点设计,对必要条件并不要求。

解题说明:本题要求判断所给出的条件是否支持题干中陈述的结论。阅读每小题中的条件(1)和(2)后选择:

- A. 条件(1)充分,但条件(2)不充分
- B. 条件(2)充分,但条件(1)不充分
- C. 条件(1)和条件(2)单独都不充分,但条件(1)和条件(2)联合起来充分
- D. 条件(1)充分,条件(2)也充分
- E. 条件(1)和条件(2)单独都不充分,条件(1)和条件(2)联合起来也不充分

解题过程:条件充分性判断的求解过程即为以下三个命题中某几个命题真假的判定:

1. 条件(1)成立,则题干结论成立。
2. 条件(2)成立,则题干结论成立。
3. 条件(1)和(2)都成立,则题干命题成立。

真题举例:

【2012年1月真题】在某次考试中,3道题中答对2道题即为及格,假设某人答对各题

的概率相同,则此人及格的概率是 $\frac{20}{27}$ 。

(1) 答对各题的概率均为 $\frac{2}{3}$

(2) 3 道题全部答错的概率为 $\frac{1}{27}$

【答案】D

【解析】由题意知,此人考试及格的概率表达式可以表示为:

$$C_3^2 p^2 (1-p) + C_3^3 p^3 (1-p)^0 = 3p^2(1-p) + p^3 = 3p^2 - 2p^3$$

由条件(1) $p = \frac{2}{3}$, 得 $\frac{20}{27}$, 故条件(1)充分;

由条件(2) $C_3^0 p^0 (1-p)^3 = \frac{1}{27}$ 得出 $p = \frac{2}{3}$ 与条件(1)等价, 故条件(2)也充分。

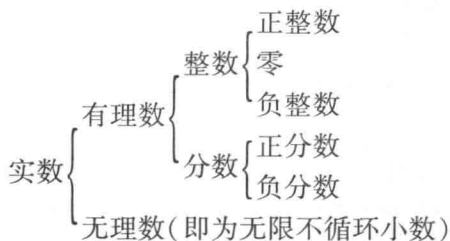
故正确答案选 D。

备注:在本书中,所有条件充分性判断题中的 A、B、C、D、E 5 个选项所规定的含义,均以本节为准,即

- A. 条件(1)充分,但条件(2)不充分
 - B. 条件(2)充分,但条件(1)不充分
 - C. 条件(1)和条件(2)单独都不充分,但条件(1)和条件(2)联合起来充分
 - D. 条件(1)充分,条件(2)也充分
 - E. 条件(1)和条件(2)单独都不充分,联合起来也不充分
- 以后不再重复说明。

二、实数的基本性质及运算法则

(一) 实数的分类



注意:

1. 有理数和无理数

(1) 有理数:有限小数及无限循环小数;有理数能表示为 $\frac{n}{m}$ ($n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+$) 形式的数,这是它与无理数本质的区别。

(2) 无理数:无限不循环小数,常见的有: π 、(根式) $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt[3]{2}$ 、0.010010001...

2. 自然数和整数

(1) 自然数是非负整数集,由正整数和零组成的。

(2) 整数还有以下两种分类方法:

$$\text{整数} \begin{cases} \text{偶数} & 2n \\ \text{奇数} & 2n \pm 1 \quad (n \in Z) \end{cases}$$

$$\text{正整数} \begin{cases} 1 \\ \text{质数(也称为素数,它只有1和自身两个约数)} \\ \text{合数(有除1和自身以外的约数)} \end{cases}$$

两个相邻整数必为一奇一偶。除了最小质数 2 是偶数以外,其余质数均为奇数。任何一个合数都能分解为若干个质因数之积。

(二)概念的扩展

1. 质数与合数

设 n 为正整数, $n \geq 2$, 如 n 除了 1 和 n 以外没有其他的正整数约数, 则称 n 为质数; 否则称 n 为合数。负整数和自然数 0、1 均非质数也非合数。

质数中仅有一个偶数 2, 其他质数均为奇数, 较小的质数依次为 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

判断一个较大的正整数 n 是否为质数, 可用几个质数从小到大依次去除 n , 看能否整除, 如对所有质数 $p \leq \sqrt{n}$ 均不能整除 n , 则 n 为质数, 否则 n 为合数。

【定理】设 n 为正整数, $n \geq 2$, 则 n 必可写成 $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$, 其中 p_1, p_2, \dots, p_s 为质数, k_1, k_2, \dots, k_s 为正整数, 如设 $p_1 < p_2 < \dots < p_s$, 则此种表示法 is 唯一的。

以上 n 的这种表达式称为 n 的质因数分解式, 其中 p_1, p_2, \dots, p_s 均为 n 的质因数。

2. 最大公约数与最小公倍数

设 m, n 均为大于等于 2 的整数, 如 s 既是 m 的约数, 也是 n 的约数, 称 s 为 m, n 的一个公约数。

由于 1 是任何 m, n 的约数, 所以 m, n 的公约数总是存在的, 在 m, n 的所有公约数中最大的一个称为它们的最大公约数。如果 m, n 的最大公约数为 1, 则称 m, n 互质。

设 $t > 0$ 是 m 的倍数, 也是 n 的倍数, 则称 t 为 m, n 的一个公倍数,

由于 mn 总是 m, n 的公倍数, 所以 m, n 的公倍数总是存在的, 在 m, n 的所有公倍数中最小的一个称为它们的最小公倍数,

如 m, n 互质, 则 m, n 的最小公倍数为 mn , 反之最小公倍数为 mn 的两个数互质。

3. 完全平方数

设 a 是一个整数, $n = a^2$ 则称 n 为一个完全平方数, 也叫做平方数。例如: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, ...

n 是完全平方数 $\Leftrightarrow n$ 的质因数分解式中各不同质因数均为偶数个。

完全平方数的末位数只能是 0, 1, 4, 5, 6, 9, 则个位数是 2, 3, 7, 8 的整数一定不是完全平方数;

4. 整数部分和小数部分

设 a 是一个实数, 记 $[a]$ 为不超过 a 的最大整数, 称为 a 的整数部分; 记 $(a) = a - [a]$, 则必然 $0 \leq (a) < 1$, 称为 a 的小数部分, $a = [a] + (a)$

$$\text{对任意实数 } a, \text{ 有} \begin{cases} (a) + (-a) = 0 & [a] + [-a] = 0 & a \text{ 为整数} \\ (a) + (-a) = 1 & [a] + [-a] = -1 & a \text{ 非整数} \end{cases}$$

(三) 实数的基本性质

1. 实数与数轴上的点一一对应;
2. 若 a, b 是任意两个实数, 则在 $a < b, a = b, a > b$ 中有且只有一个关系成立;
3. 若 a 是任意实数, 则 $a^2 \geq 0$ 成立。

(四) 实数的运算

1. 有理数与无理数的运算:

若 a, b 都是有理数, 则它们的和、差、积、商(除数不为0)都是有理数;

若 a 是有理数, b 是无理数, 则 $a \pm b$ 是无理数; 当 $a \neq 0$ 时, $ab, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}$ 也是无理数;

若 a, b 都是无理数, 则 $a \pm b, ab, \frac{a}{b}$ 可以是有理数, 也可以是无理数; 但 $a + b, a - b$ 不能都是有理数。

2. 实数的四则运算

(1) 实数的加、减、乘、除四则运算符合加法和乘法运算的交换律、结合律和分配律。

(2) 四则的运算定律

加法交换律 $a + b = b + a$

加法结合律 $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$

乘法交换律 $a \times b = b \times a$

乘法结合律 $a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

乘法分配律 $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

3. 实数的乘方和开方运算

(1) 乘方运算

① 当实数 $a \neq 0$ 时, $a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 。

② 负实数的奇数次幂为负数, 负实数的偶数次幂为正数。

(2) 开方运算

① 在实数范围内, 负实数无偶次方根; 0 的偶次方根是 0; 正实数的偶次方根有两个, 它们互为相反数, 其中正的偶次方根称为算术根, 如当 $a > 0$ 时, a 的平方根是 $\pm\sqrt{a}$, 其中 \sqrt{a} 是正实数 a 的算术平方根。

② 在运算有意义的前提下, $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ 。

三、绝对值的基本性质及其几何意义

(一) 定义

实数 a 的绝对值记作 $|a|$,

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

当 $a \neq 0$ 时, $\frac{|a|}{a} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$

(二) 几何意义

一个实数在数轴上所对应的点到原点的距离值,就是这个实数的绝对值。

$|a|$ 是数轴上表示 a 的点 A 到原点 O 的距离, $|a-b|$ 是数轴上表示 a 的点 A 到表示 b 的点 B 的距离。

(三) 绝对值的性质

1. $|a| \geq 0$ (非负性: 实数的绝对值是非负实数)
2. $|-a| = |a|$ (对称性: 互为相反数的两个实数的绝对值相等)
3. $-|a| \leq a \leq |a|$ (自比性: 任意实数的绝对值不小于它自身, 而绝对值的相反数不大于它自身)

4. $|a \times b| = |a| \times |b|$

5. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$)

6. $|a+b| \leq |a| + |b|$, 当且仅当 a, b 同号时, 等式成立

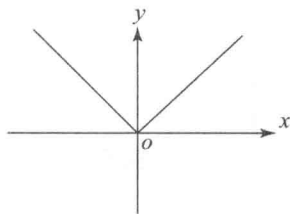
$|a-b| \geq |a| - |b|$, 当且仅当 a, b 同号且 $|a| > |b|$ 时, 等式成立

7. $\sqrt{a^2} = |a|$ (其中 $a \in R$)

等价性: 任何实数的平方的算术平方根就是这个实数的绝对值。

(四) 简单函数的图像

$$y = |x|$$



四、平均值的运算公式

(一) 算术平均值

有 n 个数 x_1, x_2, \dots, x_n , 称 $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ 为这 n 个数的算术平均值, 记作 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

(二) 几何平均值

n 个正数 x_1, x_2, \dots, x_n , 称 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n}$ 为这 n 个数的几何平均值, 记作 $x_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$

当 $n=2$ 时, x_1, x_2 ($x_1, x_2 > 0$) 的几何平均值称为 x_1 和 x_2 的比例中项, 即

$$x_1 \cdot \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{x_1 x_2} \cdot x_2$$

(三) 算术平均值与几何平均值的关系

对 n 个正数 x_1, x_2, \dots, x_n 而言, 它们的算术平均值永远不小于它们的几何平均值

$$\text{即} \quad \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$\text{或} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 时, 等号成立。

五、比和比例的基本定义及运用

(一) 比和比例

两个数相除又可称为两数之比, 记作 $a:b$, 即 $a:b = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)。其中, 称 a 为比的前项, b 为比的后项。

两比相等称为比例, 记为 $a:b = c:d$, a, d 称为比例的外项, b, c 称为比例的内项, 也记为 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 。

(二) 比的基本性质

1. $a:b = c:d \Leftrightarrow ad = bc$ 即两外项积与两内项积相等。
2. 若 $a:b = b:c$, 称 b 为 a 和 c 的比例中项, 恒有 $b^2 = ac$ 成立。
3. 若 $y = kx$, 称 y 与 x 成正比例; $y = \frac{k}{x}$, 称 y 与 x 成反比例。

其中 k 为非零常数, 称为比例系数。

(三) 比例的其他性质

如果 $a:b = c:d$, 则

1. $a \times d = b \times c$
2. $a:c = b:d \quad d:b = c:a$
3. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
4. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \neq 1 \right)$
5. $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$
6. 设 $a:a_1 = b:b_1 = c:c_1$,

$$\text{则} \quad \frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} \quad (a_1 + b_1 + c_1 \neq 0)$$

注: 若 y 与 x 成正比, 则 $y:x = k$ 中, $y = kx$, 其中 k 称为正比例系数

若 y 与 x 成反比, 则 $y:\frac{1}{x} = k$ 或 $y = \frac{k}{x}$, 其中 k 称为反比例系数

六、幂函数,指数函数

(一) 幂函数

形如 $y = x^a$ (a 为常数) 的函数,即以底数为自变量,幂为因变量,指数为常量的函数称为幂函数。

整数指数幂的运算性质

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m, n \in \mathbb{Z})$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(二) 指数函数

指数函数的一般形式为 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) ($x \in \mathbb{R}$),它是初等函数中的一种,是定义在实数域上的单调、无上界的正值函数。

指数函数的图象和性质

	$a > 1$	$0 < a < 1$
图像		
性质	(1) 定义域: \mathbb{R}	
	(2) 值域: $(0, +\infty)$	
	(3) 过点: $(0, 1)$, 即 $x = 0$ 时, $y = 1$	
	(4) 在 \mathbb{R} 上是增函数	(4) \mathbb{R} 上是减函数

(三) 对数函数

一般地,如果 a ($a > 0, a \neq 1$) 的 b 次幂等于 N ,那么数 b 叫做以 a 为底 N 的对数,记作 $b = \log_a N$,其中 a 叫做对数的底数, N 叫做真数。一般地,我们把函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 叫做对数函数,其中 x 是自变量,函数的定义域为 $(0, +\infty)$ 。