

辅导材料

概率论

李明编

... 黄午阳 张慧先校 ...



上海市业余工业大学

上海电视大学

辅 导 材 料

概 率 论

李 明 编

黄 午 阳 张 慧 先 校

上海市业余工业大学
上 海 电 视 大 学

辅 导 材 料

概 率 论

李 明 编 黄午阳、张慧先 校
上海市业余工业大学印刷厂印装

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张 4

1981 年 10 月 第一次印刷

定价 0.45 元

前 言

随着科学技术的发展,“概率论与数理统计”的应用日益广泛。目前已有不少同志正在学习这方面的知识。由于概率统计的解题方法,特别是基础概率部分,与其他数学学科比较,有些独特之处,因此初学者往往感到比较困难。为此,我们参照北京大学数学系陈家鼎、刘婉如、汪仁官等编的广播电视大学教材《概率统计讲义》编写了这本小册子(重点是放在基础概率部分)供同志们参考。

在编写过程中,许季强同志提供了不少习题,特此致谢。

由于我们水平有限,本材料可能有不少缺点甚至错误,欢迎同志们批评指正。

编 校 者

一九八一年十月

目 录

第一章 随机事件和概率	1
第一节 预备知识——排列与组合.....	1
第二节 怎样认识随机现象.....	8
第三节 概率的两种定义——统计概型与古典概型.....	10
第四节 事件的关系与运算.....	15
第五节 概率的加法定理(公式).....	18
第六节 条件概率与乘法公式.....	23
第七节 全概率公式与贝叶斯公式.....	26
第八节 事件的独立性与贝努里概型.....	29
第九节 概率解题分析举例.....	33
习 题	48
第二章 随机变量与概率分布	52
第一节 离散型随机变量与分布列.....	54
第二节 连续型随机变量及其密度函数.....	61
第三节 分布函数与随机变量函数的布分.....	66
第四节 解题举例.....	73
习 题	77
第三章 随机变量的数字特征	80
第一节 数学期望.....	81
第二节 方差.....	87
第三节 数学期望与方差的性质.....	90
第四节 切比雪夫不等式与矩.....	91
习 题	94
第四章 随机向量	96

第一节	随机向量的联合分布及边缘分布·····	96
第二节	条件分布及相互独立的随机变量·····	100
第三节	两个随机变量的函数的分布·····	105
第四节	随机向量的数字特征·····	108
第五节	大数定律及中心极限定律·····	115
习 题	·····	119

第一章 随机事件和概率

今天，我们要学习一门新的课程——概率论。它是近代数学的一个重要分支，是研究随机现象内部所蕴含的必然规律性的一门学科。

在实际生活、生产实践与科学实验中，随机现象是大量存在的。比如，掷一枚硬币，可能出现正面向上，也可能出现反面向上；医院中的产妇，可能生男孩，也可能生女孩；某天的天气可能是晴天，也可能是阴天或雨天；从一批产品中任取一件，取到可能是正品，也可能是次品；从一副（52张）扑克牌中任取一张，抽到的花色，可能是红桃或方块或梅花或黑桃；某天黄浦江的水位；电话总机在1小时内收到的呼唤次数等等，这些现象，都带有不确定性，也就是说有随机性。

随机性仅仅是随机现象的一个方面，随机现象还有另一个方面，即有规律性的一面，概率论的任务，就在于研究它的规律性，也就是利用数学工具，去研究它出现的可能性大小的量——概率。

第一节 预备知识——排列与组合

排列与组合是研究概率特别是古典概率的重要工具。因此在进入新课之前，有必要对这一部分内容作一次系统的复习。

例1 从甲城到乙城，可以坐轮船，也可以乘汽车或火车，在一天中，轮船有3班，火车有4班，汽车有5班，那么从甲城到

乙城共有多少种走法？

分析 因为坐轮船有3种走法，乘火车有4种走法，乘汽车有5种走法，每一种走法都可以从甲城到乙城。因此从甲城到乙城共有 $3+4+5=12$ 种走法。

做一件事，完成它可以有 m 类办法：在第一类办法中有 n_1 种方法；在第二类办法中有 n_2 种方法；在第 m 类办法中有 n_m 种方法，那么完成这件事共有 $n_1+n_2+\cdots+n_m$ 种不同的方法，这就是加法原理。

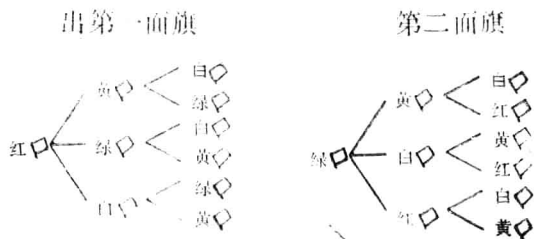
例2 从甲村到丙村必须经过乙村，已知甲村到乙村有2条路可走，乙村到丙村有3条路可走，问从甲村到丙村共有几种走法？

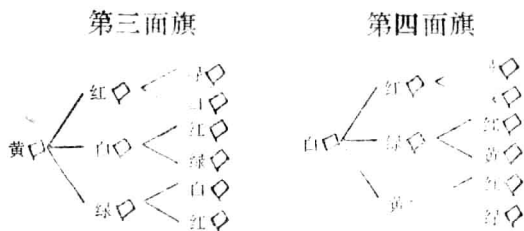
分析 因为从甲村到乙村共有2种走法，无论那一种走法到乙村后，又有3种走法到丙村。所以从甲村到丙村共有 $2 \times 3 = 6$ 种走法。

例3 有彩旗红、绿、黄、白4面，连续举3面不同颜色的旗组成一个信号，一共可发出多少种信号？

分析 出第一面旗共有4种方法，而对于其中的每一种方法，出第二面旗又有3种方法，对于这3种方法的每一种，出第三面旗又有2种方法(如图)，因此共有 $4 \times 3 \times 2 = 24$ 种不同的信号。

我们画出下面的树图：





从分析上面的例子中可看出，虽然它们是两个不同的问题，但具有共同的特点：

事件 A 是由 m 个连续事件 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 所组成，其中完成事件 A_1 的方法有 n_1 种，不管用什么方法完成 A_1 后，再完成 A_2 的方法有 n_2 种……对于事件 A_{m-1} 的每一种方法，最后完成事件 A_m 有 n_m 种方法，则完成事件 A 共有 $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_m$ 种方法。

对于例 2 来说：事件 A 是指从甲村到丙村，它有两个连续事件 A_1 及 A_2 组成， A_1 是指从甲村到乙村，完成 A_1 的方法共有 $n_1 = 2$ 种，事件 A_2 是指从乙村到丙村， $n_2 = 3$ 种。因此完成事件 A 共有 $n_1 \times n_2 = 2 \times 3$ 种方法。

对于例 3 来说：事件 A 是指顺次出 3 面不同颜色的旗组成一个信号，它由 A_1, A_2, A_3 三个连续事件组成， A_1 表示出第一面旗的事件， A_2, A_3 分别表示出第二、第三面旗的事件，由 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 相对应的 $n_i (i = 1, 2, 3)$ 有 $n_1 = 4, n_2 = 3, n_3 = 2$ ，因此事件 A 的种数共有： $n_1 \times n_2 \times n_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ 种。

上面这种方法，我们称之为乘法原理，它对于排列组合及古典概率的研究都有很大的作用。

例 4 从 1, 2, 3, 4, 5 这五个自然数中，任取 2 个，组成二位数，问共有多少种二位数？

解 根据乘法原理，组成二位数这个事件 A 是由组成十位

数的事件 A_1 和组成个位数的事件 A_2 组成, 而 $n_1 = 5$, $n_2 = 4$, 所以共有二位数 $4 \times 5 = 20$ 个。

学习数学, 要善于概括和抽象, 找出它们的异同点, 从而找出解决某一类问题的统一的方法。

我们回过头来再看例 3 和例 4:

例 3 讲的是由 3 面旗构成的信号, 而例 4 讲的两个自然数构成的二位数, 如果我们把具体对象撇开, 把旗与自然数统称为元数, 那末, 例 3 就可以这样叙述:

在 4 个不同的元素中, 任取 3 个, 按一定的顺序排成一排, 所有的排列种数有多少。

请读者按上例去叙述例 4。

定义 从 m 个元素中, 每次取出 n 个 ($n < m$) 按照一定的顺序排成一排, 叫做从 m 个元素中每次取 n 个的选排列, 所作出的不同排列的种数, 我们用 A_m^n 来表示, 从例 3, 例 4 可知, 它等于 n 个连续自然数的乘积, 最大的一个自然数为 m , 即

$$A_m^n = m(m-1) \cdots (m-n+1).$$

因此例 3 $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$, 例 4 $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$ 种。

这个公式从形式上看并不难, 可是, 同学们在运算时往往会出错, 所以, 还得对它剖折一下, 它是有这样一些特征:

(1) 第一个数是 m , 即元素的总数。

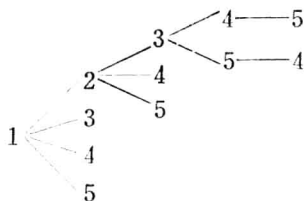
(2) 因为是连续自然数之积, 所以后面的自然数顺次比前小 1。

(3) 共有 n 个连续自然数相乘, 因此, 最后一个必然是 $m-n+1$ 。例如: A_5^3 的最后一项是 $5-3+1=3$ 。即

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3$$

例 5 将五卷 (1—5) 毛泽东选集放在书架上, 问有多少种不同的方法?

解 画出一部分树图,作为思考分析之用,分析从略。



A 是由 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 组成,相对应的, $n_1 = 5, n_2 = 4, n_3 = 3, n_4 = 2, n_5 = 1$. 所以不同方法的总数为: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 种。

观察例 5 与例 3、例 4 有些什么异同之点呢?不同的地方是例 3、例 4 是从所有元素中选取部分元素,按照顺序排成一排,而例 5 则是把所有元素都取出 ($n = m$),按照顺序排起来,除此之外,别无区别。因此例 5 的排列种数 $A_n^n = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 。

把所有元素都取出排成的排列叫做全排列,这时用另一个记号 P_m 表示 (即 $A_m^m = P_m$),它是从 1 开始的 m 个连续自然数的乘积称为 m 阶乘,用 $m!$ 表示,以后我们所说的排列,一般是指选排列。

例 6 4 个青年工人到照相馆去拍照,任选 3 人排成一排,拍摄一张照片,问有多少种拍法?

还是这 4 个青年工人,从中任选 3 人组成一个技术革新小组,问有多少种选法?

解 我们把这 4 个青年工人看成 4 个不同的元素,用 a, b, c, d 来表示,则第一个问题就是从 4 个元素中任取 3 个的排列问题,它的种类为 $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$, 我们不妨把它列举出来:

$a b c$	$a b d$	$a c d$	$b c d$
$a c b$	$a d b$	$a d b$	$b d c$
$b a c$	$b a d$	$c a d$	$c b d$
$b c a$	$b d a$	$c d a$	$c d b$
$c a b$	$d a b$	$d a c$	$d b c$
$c b a$	$d b a$	$d c a$	$d c b$

而后面的一个问题,就是从 4 个元素中,任取 3 个元素,不管怎的顺序排成一组,这叫做从 4 个元素中每次取 3 个的组合,所有组合的种数用 C_3^4 表示,我们不妨也把它列出来:

$a b c \quad a b d \quad a c d \quad b c d$

这就说 $C_3^4 = 4$.

这两个问题有些什么异同之点呢? 它们都是 4 个元素中任取 3 个元素构成的,这是相同之点,可是前者是按顺序的,而后者是没有顺序关系的,因此这两个问题的种数既有区别,又有联系,不难看出:在排列问题的第一列的六个不同的排列,在组合问题中,因为不存在顺序关系,所以只组成一个组合,反之,如果把 $a b c$ 这个组合的 3 个元素,排成不同的顺序,它有 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 种不同的排列,也就是上面问题中的第一列的 6 种不同的排列,通过这样的分析与比较,我们不难得出组合种数 C_3^4 与排列种数 A_3^4 的相互关系如下:

$$A_3^4 = 3! C_3^4 \text{ 或者 } C_3^4 = \frac{A_3^4}{3!}$$

一般地说,从 m 个元素中,每次取 n 个元素的组合,它的种数 $C_n^m = \frac{A_n^m}{n!}$.

下面我们简单地复习一下组合的一些重要性质:

$$(1) C_n^m = C_{m-n}^m$$

$$\therefore C_m^n = \frac{A_m^n}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

$$C_{m-n}^{m-n} = \frac{A_{m-n}^{m-n}}{(m-n)!} = \frac{m(m-1)\cdots(n+1)}{(m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

$$\therefore C_m^n = C_{m-n}^{m-n}$$

$$(2) C_m^n + C_m^{n-1} = C_{m+1}^n$$

$$\begin{aligned} \therefore C_m^n + C_m^{n-1} &= \frac{m!}{n!(m-n)!} + \frac{m!}{(n-1)![m-(n-1)]!} \\ &= \frac{m!(m-n+1) + m!n}{n![(m+1)-n]!} = \frac{(m+1)!}{n![(m+1)-n]!} = C_{m+1}^n \end{aligned}$$

1. 练习计算下列各题:

$$(1) A_{11}^{11}; \quad (2) A_{11}^4 - 2A_{11}^3; \quad (3) \frac{A_7^5 + A_7^4}{A_7^3}$$

$$(4) P_{10} - 9P_9 - 8P_8; \quad (5) \frac{A_7^5 - P_6}{6! + 5!}; \quad (6) C_{100}^{93}$$

2. 求证:

$$(1) P_{n+1} - P_n = n^2 P_{n-1}; \quad (2) A_m^n + nA_{m-1}^{n-1} = A_{m+1}^n;$$

$$(3) C_{m+1}^n = C_m^{n-1} + C_{m-1}^n + C_{m-2}^{n-1}$$

3. 10 个学生分配到 6 个车间去劳动, 有多少种分配法?

4. 用 1, 2, 3, 4, 5, 6 分别代表六个篮球队员的号码, 每选五个人为一组上场比赛, 同时规定 1 号与 3 号必须是两后卫, 其它的位置大家任意分配, 问有多少种分配法?

5. 从 7 个男工人和 8 个女工人中, 选出 4 人组成一个小组, 其中男工人与女工人各有 2 人, 有多少种选法?

6. 有 10 本不同的书, 有 12 人去借, 规定每人至多借一本, 并且完全借出, 共有多少种不同的借法?

7. 停车场内有 m 辆大卡车和 n 辆小汽车停放成一排, 如果小汽车必须停在一起, 一共有多少停法?

8. 平面内有 9 个点, 其中有 4 个点在一条直线上. 此外没

有 3 个点在一条直线上。过这 9 个点里的每两个点可以连结成多少条直线？以这 9 点里的三个点为顶点，可以作出多少个三角形？

第二节 怎样认识随机现象

在自然现象中，有一类是带有确定性的，比如：在一个大气压下水加热到 100°C 就沸腾，冷却 0°C 到就结冰；知道了圆的半径，它的周长与面积就完全确定了；知道某一个物体的上抛初速度 v_0 。（如果不计空气阻力），这个物体以后的运动状态就完全确定了。但是，我们也常常遇到另一类现象，例如：明天的天气可能是晴，也可能是阴或雨；掷一粒骰子，可能出现 1 点或 2 点……或 6 点；从一副（52 张）扑克牌中任取一张，抽到的花色可能是黑桃或梅花或方块或红桃等等，诸如此类的现象，我们称它为随机现象，研究随机现象就是概率论和数理统计的任务。

既然随机现象有偶然性，那么怎样去探讨和研究呢？要回答这个问题，我们来做一个课堂实验。

实验开始时，老师要班长在班上任意叫 10 个同学站起来，这时，老师说：“我可以断言：这 10 个同学中至少有 2 个出生在同一个月份。”然后请这 10 个同学自报出生月份，其结果符合老师的断言，同学们也许会感到，这是一个偶然的巧合，于是请班长再任意叫 10 个同学，重复做这样的实验，连续做了若干次，结果证明老师的断言还是正确的，那时，在同学脑海中会产生出这样一个疑问：老师是根据什么来下这个判断的，难道其中会有什么规律吗？

事实上，老师并不是未卜先知的天才，他是利用排列组合的知识，对于 10 个同学出生于不同月份的可能作了计算后得出的

结论，而这结论的正确性达 99.6%，也就是说做 1000 次实验，失败的次数只占 4 次。

一年有 12 个月，假设 1 月至 12 月，人们出生是等可能的，那么 10 个人在同一个月或不同月，或有几个人在同一个月出生的所有可能共有 12^{10} 种，而 10 个人生于 12 个月中的不同月份的种数是 A_{12}^{10} ，因此，10 个人生于不同月份的可能性

$$p = \frac{A_{12}^{10}}{12^{10}} = 0.004$$

由此可得，至少两个同学生于同一月份的可能性为 99.6%

这个实验做完后，再来阐述偶然与必然，随机与规律的辩证关系。例如有 50 张相同的卡片（其中有一张写着“一等奖”）放在袋里，然后叫人去抽，这时往往会听到这样的说法：“抽抽看，还有 $\frac{1}{50}$ 的可能性”前面半句话反映了事件的偶然性——即随机性，而后面的半句话，却又反映了随机事件的必然性——即规律性。抽签的人抽一次，抽到“一等奖”完全是偶然的，即使抽 3 次，4 次抽到也还是偶然的，可是抽了成千上万次，乃至数十万次，那末抽到的次数与抽的总次数之比都接近于 $\frac{1}{50}$ ，这说明在同样条件下，进行大量次数试验时，事物的规律才呈现出来，这是在我们生活实践中所证明了的真理。又比如：在一个医院里，某一天的产妇生男孩或女孩完全是偶然的，可是，在人口统计中，不论是那一个国家，何种民族，也不论是什么时期的统计资料，都发现有同样的规律：男孩的出生率是 $\frac{22}{43}$ （而不是 $\frac{1}{2}$ ）。曾经发生这样的一件有趣的事，法国某地男孩的出生率与 $\frac{22}{43}$ 有较大的偏差，经分析后发现是资料统计上存在问题，在正确地处

理了原始资料后,发现男孩的出生率仍然是 $\frac{22}{43}$ 。

这些事例说明了随机现象的本质:在一次实验中,其结果是不确定的即带有偶然性;但在大量重复试验下,却呈现出明显的规律性,这种规律性是通过大量观察(试验)后得到的。因此,我们称它为统计规律性。

在一组条件 S 之下,如果事件 A 一定发生,则称事件 A 为必然事件,用 U 表示;反之称不可能事件,用 V 表示;事件可能发生,也可能不发生,则称为随机事件,这里条件组 S 很重要。初学时必须注意这一点,因为它会影响着事件的性质。比如:水沸腾的条件组 S ,由两个条件构成:一是在一个大气压之下,二是要加热到 100°C ,如果忽略了一个大气压,在大于一个大气压的情况下,即使加热到 100°C 也不会沸腾,因此,忽略了一个大气压这个条件必然事件就转化到随机事件了。

第三节 概率的两种定义——统计概型与古典概型

上面我们已经讲过,随机事件在作大量次重复试验中会呈现其规律性,现在,再看下面的一个例子。

考虑某种子的发芽率,从大批种子中抽出若干批,做发芽试验,其结果如下:

种子粒数	25	10	70	130	310	700	1500	2000	3000
发芽粒数	24	9	60	116	282	639	1339	1806	2715
发芽率	0.96	0.90	0.857	0.892	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

从这表中的数字看出,发芽率在 0.9 附近摆动,这个例子告诉我们,它有如下的特点:当我们考虑事件 A 发生的可能性大小时,

只要在同一组条件 S 之下作大量的重复试验, 事件 A 发生的频率(事件 A 发生的次数与试验的总次数之比)会呈现其某种稳定性, 一般说来, 当试验的次数增加时, 事件 A 发生的频率总是稳定于某一数 p 的附近, 而偏离的幅度很微小, 频率具有稳定性这一事实, 说明刻画事件 A 发生的可能性大小的量——概率是客观存在的。

定义 在固定的一组条件 S 之下, 重复作 n 次试验, 当试验的次数 n 很大时, 如果事件 A 发生的频率稳定地在某一数值 p 的附近摆动, 而且, 一般说来, 随着试验次数的增加, 这种摆动的幅度是很微小的, 则称 A 为随机事件, p 为随机事件 A 在条件组 S 之下发生的概率, 记作:

$$P(A) = p$$

这就是概率的统计定义, 简称统计概型

根据概率的统计定义, 容易得到:

$$P(U) = 1, \quad P(V) = 0$$

由统计概型求某事件 A 的概率的方法, 是试验的方法, 在实际工作中, 精确的 p 值常常是无法求得的, 因此, 当试验次数 n 适当大时, 我们就把频率 $\frac{H}{n}$ 作为它的近似值。

现在, 我们来研究一类最简单却又是常见的随机现象, 例如: 掷一枚均匀的硬币, 其结果是正面朝上或正面朝下; 掷一粒均匀的骰子, 其结果是出现 1 至 6 点中的任一点, 因为硬币是对称的几何体, 所以出现正面与反面的可能性是相等的。同样, 对于骰子来说, 出现六种点的任何一点的可能性都是一样的, 即等于 $\frac{1}{6}$ 。

由此可见, 这类随机现象有两个共同的特点: