中学数学解题研究

赵振威　黄熙宗
范叙保　冯　进　著

江苏教育出版社

中学数学解题研究

赵振威 黄熙宗
范叙保 冯 进 著

江苏教育出版社

中学数学解题研究

赵振威　黄熙宗
范叙保　冯　进　著
责任编辑　王巧林

出版发行:江　苏　教　育　出　版　社
(南京马家街 31 号,邮政编码:210009)
经　　销:江　苏　省　新　华　书　店
照　　排:南京展望照排印刷有限公司
印　　刷:常　熟　市　印　刷　二　厂
(常熟市大义镇　邮政编码:215557)

开本 850×1168 毫米　1/32　印张 12.875　字数 315 000
1998 年 6 月第 1 版　1998 年 6 月第 1 次印刷
印数 1-3000 册

ISBN　7—5343—3309—1

G·3015　　定价:12.80 元

内容简介

学习数学，离不开解题。科学的解题理论，是解题成功的基础。本书从数学的特点出发，全面总结国内在解题实践方面的经验教训，充分汲取国外关于"问题解决"的研究成果，综合运用教育心理学、思维科学和数学方法论的基本思想，探索适合中国国情的解题理论.

全书共分八章，前两章主要讨论数学题的涵义、来源和分类，研究设计数学题的基本原则和主要方法；第三、四、五章，系统分析解题的要素，建构解题的理论框架，从全局上考察解题的思维过程和常用策略；第六、七章有重点地研讨解题的方法和技巧；第八章以中学数学教学实际为背景，探讨提高解题能力的具体途径.

本书可作为师范院校数学教育专业教材，也可作为教育学院中学数学教师继续教育教材；书中部分章节，还可作为高中数学复习参考资料.

前言

数学教育中，解题的重要性是不言而喻的．法国著名数学家阿达玛(Hadamard，1865 年～1963 年)在其名著《数学领域中的发明心理学》中曾指出："数学家们从事数学研究工作，固然已属发明的范畴，数学专业的学生在解决一个几何或代数的问题时，实际上也与数学家们的发明具有同样的性质，只是两者在程度深浅和水平高低上有着差距而已．"因此，科学地进行解题教学，可以为学生提供一个发现、创新的环境和机会，为教师提供一条培养学生解题能力、自控能力和数学应用能力的有效途径．

我国堪称数学解题"王国"．学生从小学开始，直到高考结束，几乎天天都要解题．艰辛的解题训练，培养出了一批尖子学生，整体水平也比较高．这些特点在各种国际交流中得到充分反映．例如，在国际数学奥林匹克竞赛中，我国连续多年获得总分第一，金牌数最多；在 IEAP 国际数学教育调查中，我国名列第一；留学生在国外的数学考试成绩，总体说来也是相当优秀的．但是，面对 21 世纪的科学技术形势，面对我国实现现代化的巨大任务，这些成绩是远远不能满足要求的．

事实上，在这些成绩的背后，我国学生在解题上所付出的辛劳，远远多于发达国家的学生；不少学生在题海中耗费了许多宝贵的学习时间，影响身心健康成长，影响整体素质提高；相当比例的学生，高分低能，缺乏思维的创造性和批判性，缺乏用数学的意识，缺乏解决实际问题的能力．也就是说，我国中学数学教育的整体效益还有待于进一步提高．

出现上述情况的原因是多方面的．在教学思想上，没有完全从

“应试教育”的束缚中解放出来，对于数学的实际应用尚未引起足够的重视；在教学内容上，存在着内容陈旧、知识面狭窄、课程结构单一等弊病；在教学方法和教学手段上，也还没有完全摆脱“教师以板书、讲解为主，学生以听讲、解题为主”的传统模式.

表现在解题教学中，以应付高考为主要目标，进行大运动量训练，让学生无谓地去记忆那些解法类型和琐碎的技巧；教学中过多地强调微观上严谨的逻辑演绎，忽视了宏观上包括直觉联想、归纳类比、观念更新、顿悟机巧在内的策略创造，学生中许多富有生机的创造性思维被禁锢了；而且，教学中所解答的数学题，主要是由教师提供的，或是书本上现成的，很少是由学生从日常生活或生产实际中提炼出来的. 简言之，整个解题教学，缺乏科学的解题理论作指导.

追本穷源，这与高等师范院校的数学教育不无关系. 在高等师范院校数学教育专业的课程设置中，至今还没有把解题理论作为一门课程独立开设，只是在“中学数学教材教法”课中安排几个学时的“解题教学”，内容十分单薄，难以适应中学数学教育改革的需要. 从这一意义上说，探索解题规律，建构解题理论，已成为高等师范院校数学教育专业深化教育改革的一个重要课题.

唯物辩证法认为，一切客观事物都是互相联系的、具有内部规律的. 数学解题，作为对现实世界数量关系和空间形式的一种认识，也是有端倪可辨，有规律可循的. 本书试图以马克思主义哲学作指导，从数学的特点出发，综合运用教育学、心理学、思维科学、数学方法论和数学史的基本思想，全面总结国内关于解题研究的经验、教训，充分汲取国外数学教育家波利亚(Polya，1887 年～1985 年)、梅森(Mason)、奥加涅相(Оганесян)、舍费尔德(Schoenfeld)等在“问题解决”方面的研究成果，以及弗莱维尔(Flavell)关于元认知的理论，在理论和实践、宏观与微观、创新与继承的结合上，探索解题规律，建构适合我国国情的解题理论.

全书共分八章,第一、二章主要讨论数学题的涵义和分类,研究数学题的来源和设计数学题的思想、方法;第三章择要分析解题的要素,建构解题的理论框架;第四章循着解题理论的发展轨迹,从全局上考察解题的一般思维过程;第五章在数学发现的认识论和方法论的指导下,研究解题的策略和策略的选择;第六、七章有重点地介绍解题的一般方法和常用技巧;第八章以中学数学教学实际为背景,进一步探索提高解题能力的途径.

限于作者水平,书中缺点、错误在所难免,恳切希望读者批评指正.本书如果能在推进数学教育现代化、增强解题能力方面对读者有所助益,则将为之感到欣慰.

作　者

1997 年 12 月

目　录

第一章　数学题概观

从总体上考察数学题的结构特征，是进行中学数学解题研究的一项基础性工作. 本章从题的一般概念入手，择要讨论数学题的涵义、数学题的来源以及数学题的若干常见题型.

§1　数学题的涵义

什么是“题”？人们对此曾作过多方面的探讨和研究，但至今还没有取得一致的认识. 这里，我们采用系统论的思想来描述题的概念.

考察系统(M,C)，其中M代表某个主体（即“人”），C代表某个抽象（或具体）系统的集合. 我们称集合C为题系统.

如果某主体接触C后，认为C的全部元素、性质及关系都是他所知道的，那么就称系统C是相对于该主体的稳定系统. 如果某主体对于C中某些元素、性质或关系不了解，而这些元素、性质和关系对于认定系统C是必不可少的，那么便称系统C是相对于该主体的问题性系统，记作C_x.

这样，某系统C属于稳定系统还是问题性系统，是由主体本身决定的，取决于主体的知识和经验. 也就是说，系统C的问题性是一个相对的概念.

如果某一主体由于内部或外部的动因，需要从系统C中确定他所不了解的元素、性质或关系，那么系统C对于该主体来说就变成了题. 从这一意义上说，所谓解题，实质上就是将问题性系统C_x转化为稳定系统.

从结构上来分析，任何一道题都包含四个基本要素：

(1) 初始状态(I)：系统 C 的问题性特征；

(2) 最终状态(F)：系统 C 的稳定性特征；

(3) 解(S)：由初始状态至最终状态的转化；

(4) 解题的基础(B)：由初始状态至最终状态转化的理论和实践的基础.

如果某题由初始状态转化为最终状态靠的是数学手段，即要素 B 和 S 具有数学特征，那么这种题便可称为数学题. 如果一道题的四个要素 I、B、S、F 都是数学对象，就称之为纯数学题；如果数学内容仅在 B 和 S 中出现，就称之为数学应用题.

对于数学题来说，初始状态，就是题的条件；最终状态，就是题的结论；解，就是解题的过程和方法；解题的基础，就是解题的理论根据. 这样，一道数学题系统的问题性，就取决于在条件、结论、解法和解题根据这些基本要素中，哪些是主体所不知道的.

根据主体对数学题所包含的基本要素的确认情况，可以将数学题适当分类. 如果一道题的条件是明确的，解法和解题根据也是主体所知道的，那么就称之为标准性题；一些复习学过知识的练习也同样可以认为是标准性题. 如果一道题只有一个基本要素是主体所不知道的，那么就称之为训练性题. 如果有两个基本要素主体不知道，就称之为探索性题. 如果有三个要素不为主体所知，那么称之为问题性题.

如果用 I 表示题的条件，B 表示解题的根据，S 表示解题的方法，F 表示题的结论(目的)，x、y、z 表示题的未知成分，那么上述四类题的结构可以用图 1-1 来表示.

不难看出，现今中学数学教学中的例题、习题和试题，主要是标准性题和训练性题. 这类数学题，大多是以已经解决的数学问题为背景，根据数学的内在联系和教学的实际需要，在原有成题的基础上人工设计的.

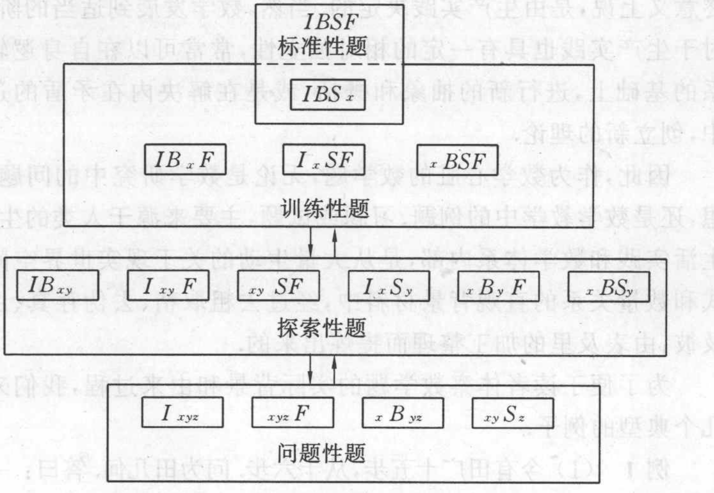


图 1-1

数学研究中涉及的各种数学问题和数学猜想，大多是探索性题和问题性题. 这类问题渊源于社会实践和数学体系内部，是数学发现的基础.

一般说来，人工设计的数学题，有助于体现习题的教育功能，但题中已看不到它的实际背景和由来过程. 因此，在解题教学中，宜把标准性题、训练性题与探索性题、问题性题适当地联系起来，相互渗透，相辅相成. 只有这样，才有利于全面提高学生发现问题、分析问题和解决问题的能力.

§2　数学题的来源

数学的产生和发展的历史表明，生产实践的需要，科学技术的发展，为数学提供了丰富的源泉和广阔的前景，也为数学真理性的检验给出了最后的、确定的标准. 简言之，数学的产生和发展，从最

终意义上说，是由生产实践决定的. 当然，数学发展到适当的阶段，对于生产实践也具有一定的相对独立性，常常可以在自身逻辑体系的基础上，进行新的抽象和概括，或是在解决内在矛盾的过程中，创立新的理论.

因此，作为数学心脏的数学题，无论是数学研究中的问题、猜想，还是数学教学中的例题、习题或试题，主要来源于人类的生产、生活实践和数学体系内部，是从大量生动的关于现实世界空间形式和数量关系的直观背景材料中，经过去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的加工整理而提炼出来的.

为了便于读者体察数学题的实际背景和由来过程，我们来看几个典型的例子.

例 1 (1) 今有田广十五步，从十六步. 问为田几何. 答曰：一亩.

(2) 今有田广十二步，从十四步. 问为田几何. 答曰：一百六十八步.

例 1 取自我国古代传世数学名著《九章算术》第一章“方田”的前两题. 其中“广”即宽，“从”即长，是求矩形的面积. 第(2)题答案中的“步”是积步，即“平方步”，在《九章算术》里，1 亩等于 240 平方步.

《九章算术》包括了西汉以前的主要数学成果，是经过历代名家的修订和增补才逐渐成为定本的，成书时间大约在公元 1 世纪的东汉初期. 这部著作是以应用问题集的形式展开的，全书共收入 246 道数学题，分为九章.《九章算术》的书名由此而得. 各章先举出问题，然后给出答案；考察一类题目后再给出“术”，即总结出这类问题的一般解法. 例如，在“方田”章的前两题的题后，有术：“方田术曰：广从步数相乘为积步.”如果用 a 和 b 分别表示长方形的长和宽，用 S 表示长方形的面积，那么方田术就是“$S=ab$”. 书中一共给出了 202 个术，几乎每题一术. 题是术的基础，术是题的算法程式.

例 1 表明，数学作为研究现实世界空间形式和数量关系的一门科学，最初的数学题都是由人们的生产和日常生活实践提供的.在我国古代社会里，土地问题是人们普遍关心的一个重要问题，“方田”章中提出的数学题，正是来源于社会实践，直接为社会生产和生活服务的.即便在近、现代数学中，也有不少分支学科是在回答实践提出的问题的基础上，逐渐萌发、孕育起来的.

例 2　今有物不知其数.三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何．答曰：二十三.

例 2 选自《孙子算经》卷下第 26 题，通常称为**孙子问题**.这个问题的意思是：现有一些东西，不知其数目.三个三个一数剩两个，五个五个一数剩三个，七个七个一数剩两个．也就是某数被 3 除余 2，被 5 除余 3，被 7 除余 2.问这些东西有多少？

孙子问题实际上是一个不定方程问题.如果用 x 表示所求的数，a、b、c 分别表示用 3、5、7 去除所得的商，那么根据题意可得方程组

$$\begin{cases} x=3a+2, \\ x=5b+3, \\ x=7c+2. \end{cases}$$

不难验证，上述关于 x 的方程组的正整数解有无穷多个：23，128，233，338，….最小正整数解是 23，其余的解可表示为

$$x=23+105n\ (n=1,2,3,\cdots).$$

这里，105 是 3，5，7 的最小公倍数.

在我国古代数学史上，孙子问题是学术界普遍关注的问题，历代都有人研究.1247 年，南宋数学家秦九韶（约 1202 年～1261 年）把《孙子算经》的方法推广到一般情形，得到**大衍求一术**（解一次同余式组），载入其划时代的巨著《数书九章》之中.所谓“大衍类”问题，就是求一个正整数 x，使 x 被 A_1 除余 r_1，被 A_2 除余 r_2，…，被 A_n 除余 r_n.显然，这就是要求解一次同余式组

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{A_1}, \\ x \equiv r_2 \pmod{A_2}, \\ \cdots\cdots \\ x \equiv r_n \pmod{A_n}. \end{cases}$$

大衍求一术是我国古代数学的一项辉煌成就，中外数学史家都称它为**孙子定理**或**中国剩余定理**. 这一工作不仅在古代数学史上占有地位，而且这个问题的解法的原则在近代数学史上还占有重要地位，在计算机的设计中也有重要应用. 在欧洲，解答这类问题的一般理论，直到 1801 年才为高斯(Gauss，1777 年～1855 年)所发现，这已在秦九韶之后 554 年了.

从上面的讨论可以看出，孙子问题是一类实际问题的抽象和概括；大衍求一术又是孙子问题算法的推广和一般化. 因此，有目的地发现和解答这类以生产、生活实践为主要背景的数学题，有助于为数学理论的形成积累必要的资料.

例 3 周长相等的所有封闭平面曲线中，怎样的曲线围成的面积最大？

这是平面上的一个**等周问题**. 如果两种图形的周长相等，那么就称它们是“等周的”，这就是“等周问题”这一名称的由来. 等周问题有着丰富的背景材料，是通过观察、实验、类比、归纳等一系列工作才发现的.

在日常生活中，人们最初接触到的往往是空间的“等周问题”. 我们常常可以看到：小孩玩耍时吹出来的肥皂泡，总是一个个的圆球；水银落在桌面上，总是呈球形滚动；工厂翻砂时溢出的铁水，总是凝成许多球形的弹子；清早荷叶中心的露水，总是聚成一个个水珠球；等等. 对于这些自然现象，可以用物理学的知识来解释. 物理学告诉我们，在表面张力的作用下，液体有力求使其表面积达到最小的趋势. 显然，水银珠、水珠等变形时它们的体积是不变的，所以，这就启示我们作出下面的猜想：

猜想 1　在所有体积相同的几何体之中，球体的表面积最小.

猜想 1 是由观察得到的空间“等周问题”，解答起来比较复杂，不大容易入手. 如果用类比法作降维处理，就可以得到：

猜想 2　在所有有相同面积的平面图形之中，圆的周长最小.

对于猜想 2，笛卡尔（Descartes，1596 年～1650 年）在其未竟之作《思维的法则》中曾作过评述，他指出：“要以计算的方法证明圆的周长小于任何其他有相同面积的图形的周长，并没有必要研究所有可能的图形. 要证明这一点，只要能够证明它们之中的若干种图形就足够了，因为我们利用归纳法可以达到触类旁通、举一反三的效果. ”为此，我们不妨按照笛卡尔的建议，把圆和其他图形，如三角形、矩形和圆扇形进行比较.

我们选择等边三角形和等腰直角三角形这两种三角形；矩形的形状取决于长与宽的比，我们选择的比为 1∶1，2∶1，3∶1 和 3∶2；圆扇形的形状取决于圆心角，我们选择的角度为 180°，90°和 60°. 假定所有这些图形都具有相同的面积，比如是 $1\mathrm{cm}^2$，然后再计算出各种图形的周长（cm）. 所得结果如下表所示，表中各种图形按其周长增加的顺序排列.

等面积图形的周长

圆	3.55
正方形	4.00
四分之一圆	4.03
矩形（3∶2）	4.08
半圆	4.10
六分之一圆	4.21
矩形（2∶1）	4.24
等边三角形	4.56
矩形（3∶1）	4.62
等腰直角三角形	4.83

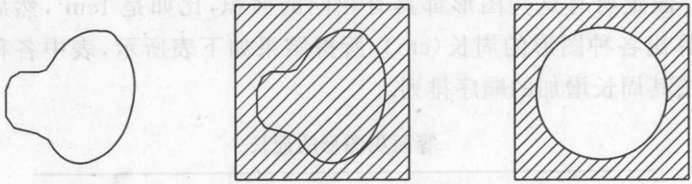
上述比较表明，在所列举的10种等面积的图形中，圆的周长为最小.这就是说，归纳法支持了猜想2，增强了我们对这一猜想的信心.但是，笛卡尔所建议的归纳法毕竟是不完全归纳法，即使再增加比较的对象，也难以作为严格证明的根据.

直接证明猜想2困难较大，不大容易入手.为此，不妨考察与它等价的共轭命题：

猜想3 在所有有相同周长的平面图形之中，圆的面积最大.

显然，例3正是猜想3的问题形式，它是经过迂回曲折的过程得到的.当然，如果我们的物理知识比较丰富，也可以通过实验提出例3.比如，可以设计下面的实验：

把一条有固定长度的柔软细丝的两头连结起来，围成一条任意形状的封闭曲线(图1-2[1]).将此曲线轻轻地搁置在一个蒙有肥皂膜的铁框上(图1-2[2]).如果用小针将曲线内的肥皂膜刺破，这条曲线就立刻变成一个圆(图1-2[3]).



[1] [2] [3]

图1-2

如所知，当曲线内的肥皂膜消失后，由于外部肥皂膜的表面张力的收缩作用，曲线所围的面积将尽可能地扩大.实验的结果表明：曲线最后变成了圆.于是，这个实验便引导我们提出猜想3.

在数学发展的历史上，正是某些“猜想”而导致了数学的发现.等周问题曾引起不少数学家的重视，给出了多种不同的证明.有兴趣的读者，可以进一步思考以上几个猜想的证明方法.

从例3可以看出，发现问题和提出问题，需要综合运用观察、