LINEAR ALGEBRA

线性代数

学习辅导

（经管类）

主　编　卢俊峰

副主编　李剑秋　宋秀迎

浙江工商大学出版社

ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

线性代数学习辅导

（经管类）

主　编　卢俊峰
副主编　李剑秋　宋秀迎

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习辅导 / 卢俊峰主编. — 杭州：浙江工商大学出版社，2012.11
ISBN 978-7-81140-635-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①卢… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 243408 号

线性代数学习辅导

卢俊峰 主编

责任编辑 许 静
封面设计 刘 韵
责任印制 汪 俊
出版发行 浙江工商大学出版社
(杭州市教工路 198 号 邮政编码 310012)
(E-mail:zjgsupress@163.com)
(网址:http://www.zjgsupress.com)
电话:0571—88904980,88831806(传真)
排 版 杭州朝曦图文设计有限公司
印 刷 杭州杭新印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 13
字 数 270 千
版 印 次 2012 年 11 月第 1 版 2012 年 11 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-81140-635-1
定 价 28.00 元

前　　言

本书是浙江省“十一五”重点教材《线性代数(经管类)》的配套辅导书，可作为经管类专业本科学生的学习参考书、教师的教学参考书，也可作为本科学生考研的复习参考书。

全书按原教材的章节编写，每章内容分为内容提要、例题解析和自测题三个部分。内容提要侧重介绍各章的主要概念、重要定理与结论及应掌握的基本计算方法；例题解析对各章的典型题型作了归纳和总结，通过典型例题的分析，说明常用的解题思路与方法，对于一些例题还给出一题多解，引导读者深入地学习和体会各章的基本内容；自测题是基本题与综合题的搭配，难易度适中。书后附有五套模拟试卷及详细解答，供学生练习，以巩固所学知识，提高独立解题能力，并检测自己对所学知识掌握的程度。

本书由浙江工商大学杭州商学院三位老师合作完成。第一章、第三章由李剑秋编写，第二章、模拟试卷及解答由宋秀迎编写，第四章、第五章由卢俊峰编写，全书最后由卢俊峰总纂定稿。在编写的过程中，得到金义明和丁嘉华的悉心指导，孙景楠和何丹帮助校对，在此我们表示衷心地感谢。

由于编者水平有限，错误在所难免，敬请同行、读者指正。

编　者

2012 年 7 月于杭州

目　　录

第一章　行列式

内容提要

一、行列式的递推定义

1. 二阶行列式和三阶行列式

二阶行列式的定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} .$$

2. n 阶行列式

由 n^2 个数组成的 n 行 n 列的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. D 表示的算式为

当 $n = 1$ 时，$D = |a_{11}| = a_{11}$ ，

当 $n \geqslant 2$ 时，$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$ ，

其中，$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}\,(i,j = 1,2,\cdots,n)$ ，A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，M_{ij} 为 n 阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的行，所在的列剩下的元素按原来的顺序组成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式.

n 阶行列式的计算公式中包含有 $n!$ 项，其中 $\frac{n!}{2}$ 项前面带正号，$\frac{n!}{2}$ 项前面带负号，而每一项是由行列式中位于不同行不同列的 n 个数相乘而得.

二、行列式按任意一行(列)的展开定理

行列式等于它的任一行(列)的各个元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} ;$$

$$D = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni} , (i = 1,2,\cdots,n).$$

三、行列式的性质

1. 行列互换，行列式的值不变.

2. 交换行列式的某两行(列)的位置，行列式的值变号.

3. 若行列式中某一行(列)每个元素都有公因子 k，则 k 可提到行列式符号外.

4. 如果行列式中有两行(列)元素对应成比例，则行列式的值为零.

推论：**若行列式中有两行(列)完全相同，则行列式的值为零.**

推论：**若行列式中某一行(列)中的所有元素全为零，则行列式的值为零.**

5. 如果行列式的某一行(列)的每个元素都是两个数之和，则此行列式可以写成两个行列式之和.

6. 行列式的某一行(列)的各元素乘以同一个数 k 然后加到另一行(列)上，行列式的值不变.

7. 行列式任意一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和为零，即：

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad i \neq j;$$

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j.$$

为了使行列式计算过程中表达式简明，引进下列一些记号：

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$) 表示将行列式第 i 行(列)与第 j 行(列)互换；

(2) $\frac{1}{k}r_i$ ($\frac{1}{k}c_i$) 表示将行列式第 i 行(列)的所有元素提取公因子 k；

(3) $r_i + kr_j$ ($c_i + kc_j$) 表示将行列式第 j 行(列) 所有元素的 k 倍加到第 i 行(列)对应元素上.(第 j 行(列)元素不变)

四、几个特殊的行列式

1. 上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3. 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n.$$

4. 反对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

5. 反上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_1 \\ a_{21} & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

6. 反下三角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

后三个公式下面我们可以得到证明.

7. 范德蒙(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i).$$

8.
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

五、克莱姆(Cramer)法则

如果 n 个未知数 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素换成线性方程组右端的常数项 $b_1,\cdots,b_n$ 所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

克莱姆法则的推论(齐次线性方程组有非零解的条件)：

含有 n 个未知数，n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases},$$

有非零解的充分必要条件是系数行列式 $D=0$.

例题解析

题型 1　行列式的计算

本章的中心内容是行列式计算，而对于一般行列式的计算，我们介绍几种常用的方法. 下面我们通过例题介绍计算的基本思路.

1. 化为三角形行列式计算.

【例 1】 计算四阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

解　将其化为三角形行列式

为使计算过程尽可能不出现分数，我们先把 a_{11} 变为 1 或 -1，本例中可交换第一行与第三行的位置，得：

$$\text{原式}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+(-2)r_1]{\substack{r_2+(-3)r_1 \\ r_3+(-2)r_1}}-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+(-2)r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal{-\frac{1}{5}r_3} 5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+(-7)r_3} 5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 50.$$

注意：把 a_{11} 变为 1 或 -1，一般可通过下面两种方法：

(1) 交换行列，即把行列式中元素为 1 或 -1 换到第一行第一列位置上，尤其是当 $a_{11}=0$ 时，只有通过这种办法使 $a_{11}\neq 0$；

(2) 如果行列式中所有元素都不是 1 或 -1，我们先将交换行列使 $a_{11}\neq 0$，然后将第一行(列)乘以 $\dfrac{1}{a_{11}}$，即从第一行(列)提取公因子 a_{11}.

【例 2】 计算三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

分析 该行列式各列元素的和相等.

解 把其他各行都加到第 1 行得

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+(-2c)r_1]{r_2+(-2b)r_1} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b-a-c & 0 \\ 0 & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^3.$$

【例 3】 证明反对角行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n .$$

分析 本题可转化为对角行列式.

证 先将行列式的第 n 列依次与其前面的 $n-1$ 列逐列对换，得

$$D_n = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_n & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

再将上式行列式的第 n 列依次与其前面的 $n-2$ 列逐列对换，如此下去最后得

$$D_n = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n .$$

同理可证反上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_1 \\ a_{21} & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n ,$$

反下三角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & a_2 & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n .$$

【例 4】 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & z \end{vmatrix}.$$

分析 行列式的最后一行有公因子 z，主对角线上方的元素都为 y.

解 行列式的最后一行提取公因子 z，再用最后行乘以 $(-y)$ 分别加到其他各行，得

$$原式 = z\begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ z-y & x-y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ z-y & z-y & x-y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z-y & z-y & z-y & \cdots & x-y & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

上式右端的行列式按最后一列展开

$$原式 = z(-1)^{n+n}\begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ z-y & x-y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ z-y & z-y & x-y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z-y & z-y & z-y & \cdots & x-y & 0 \\ z-y & z-y & z-y & \cdots & z-y & x-y \end{vmatrix}$$

$$= z(x-y)^{n-1}.$$

【例 5】 计算 $D_n = \begin{vmatrix} a_1+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_3+1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n+1 \end{vmatrix} (a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n)$.

分析 行列式除了主对角元素外，其他元素均为 1.

解 用第 1 行乘以 (-1) 加到其他各行，得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$

上式右端的行列式为三线行列式，则作变换可化为三角行列式

$$D_n \xlongequal{c_1+\frac{a_1}{a_2}c_2,\cdots,c_1+\frac{a_1}{a_n}c_n} \begin{vmatrix} a_1+1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_2a_3\cdots a_n\left(a_1+1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i}\right) = a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

上述方法对于计算三线行列式是非常有效的.

【例 6】 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

分析　该行列式各行(列)元素的和相等.

解　如果把其他各列都加到第 1 列,则可以提出第 1 列的公因子使第 1 列的元素都变为 1.

$$原式 = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 4 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix},$$

上式右端行列式的相邻两行数间大都相差 1,则先把第 $n-1$ 行乘以 (-1) 加到第 n 行,再把第 $n-2$ 行乘以 (-1) 加到第 $n-1$ 行,……,最后把第 1 行乘以 (-1) 加到第 2 行,得

$$原式 = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

上式右端行列式按第一列展开,得

$$原式=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1-n\\1&1&\cdots&1-n&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1-n&\cdots&1&1\\1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}_{n-1},$$

上式右端行列式各列都加到第一列,有

$$原式=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1&1&\cdots&1&1-n\\-1&1&\cdots&1-n&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-1&1-n&\cdots&1&1\\-1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}_{n-1},$$

上式右端行列式第 $n-1$ 行乘以 (-1) 加到其他各行,得

$$原式=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&-n\\0&0&\cdots&-n&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&-n&\cdots&0&0\\-1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}_{n-1}\quad(反下三角行列式)$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)(-n)^{n-2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

2. 按行列式展开定理,降阶计算行列式.

【例 7】 计算四阶行列式:

$$\begin{vmatrix}2&0&1&4\\3&1&4&-1\\1&0&3&2\\2&2&3&0\end{vmatrix}.$$

解 利用行列式按行(列)展开定理进行计算行列式.在展开前,尽可能将某一行(列)元素化为只剩下一个非零元素,然后再按这一行(列)展开.

本题第 2 列已有 2 个元素为零,故按第 2 列展开:

$$原式\xlongequal{r_4+(-2)r_2}\begin{vmatrix}2&0&1&4\\3&1&4&-1\\1&0&3&2\\-4&0&-5&2\end{vmatrix}$$

上式右端的行列式按第 2 列展开

$$\text{原式} = 1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+(4)r_2]{r_1+(-2)r_2} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

上式右端的行列式按第 2 列展开

$$\text{原式} = 1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 50.$$

【例 8】 计算四阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

分析 注意到该行列式各行(列)元素的和相等，所以如果把其他各列都加到第 1 列，则可以提出第 1 列的公因子使第 1 列的元素都变为 1.

解 原式 $\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} 14 & 3 & 4 & 5 \\ 14 & 4 & 5 & 2 \\ 14 & 5 & 2 & 3 \\ 14 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$，

对上式右端的行列式，先进行 r_3-r_2，再 r_2-r_1，最后 r_1-r_4 得

$$\text{原式} = 14\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 14\times(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-1)r_1} -14\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -14\times1\times(-1)^2\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$=224.$

【例 9】 设 x_1, x_2, x_3 是三次多项式 $f(x)=x^3+px+q$ 的 3 个根，计算行列式：

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ -2x_3 & -2x_1 & -2x_2 & 4 \\ 3x_2 & 3x_3 & 3x_1 & 3 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

分析 由已知 x_1，x_2，x_3 是三次多项式 $f(x)=x^3+px+q$ 的 3 个根，所以 $x_1+x_2+x_3$ 是 x^2 项系数的相反数，即

$$x_1+x_2+x_3=0.$$

解 原式 $=(-2)\times 3\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ x_3 & x_1 & x_2 & -2 \\ x_2 & x_3 & x_1 & 1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_1+c_2+c_3} -6\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & -2 \\ 0 & x_3 & x_1 & 1 \\ a+b+c & b & c & d \end{vmatrix}$$

对上式右端的行列式，按第一列展开

原式 $=-6(a+b+c)(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & 1 \\ x_1 & x_2 & -2 \\ x_3 & x_1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_1+r_2+r_3} 6(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & -2 \\ x_3 & x_1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

【例 10】 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

解 每行元素的和都相等，把第二、三、四列都加到第一列，

原式 $=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$