



斑马书系

高三
总复习

数学

海淀区教育局高级教师编写组

邵光砚 董蓓 刘彭芝 韩乐琴
郭益盛 董世奎 邓均 杨文焕



北京广播学院出版社

G633.6

0133

号 84 字 壹 億 (京)

高三总复习

数 学

邵光砚	董蓓
刘彭芝	韩乐琴
郭益盛	董世奎
邓均	陈云映



CS1498752

(母)主品(公明時) 肺大肉丸

北京齊門牌101號

开本: 787×1095毫米 1/32 印张: 19.375 字数: 350千字

1999年10月第1版 1999年10月第1次印刷

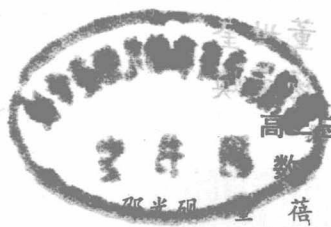
北京广播学院出版社

29645



AS81181

(京) 新登字 148 号



高中总复习
数学

邓光砚 董世奎 郭益盛 刘彭芝 韩乐琴
邓均 杨文焕

*

北京广播学院出版社出版(朝阳区定福庄1号)
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经销
北京京海印刷厂印刷

*

开本:787×1092毫米 1/32 印张:16.375 字数:350千字

1996年10月第1版 1996年10月第1次印刷

印数:1—10,000册 定价:16.00元

ISBN 7-81004-655-1/G·335

目 录

第一章 幂函数、指数函数和对数函数	(1)
一、集合与映射	(1)
内容提要 知识点 练习	(1)
二、函数	(10)
内容提要 知识点 练习	(10)
第一章练习题	(53)
第二章 不等式	(57)
一、不等式的证明	(57)
内容提要 知识点 练习	(57)
二、不等式的解法	(71)
内容提要 知识点 练习	(71)
第二章练习题	(86)
第三章 数列、数学归纳法	(91)
一、数列与极限	(91)
内容提要 知识点 练习	(91)
二、数学归纳法	(110)
内容提要 知识点 练习	(110)
第三章练习题	(116)
第四章 复数	(121)
一、复数及其有关概念	(121)

内容提要 知识点 练习	(121)
二、复数运算及其应用	(134)
内容提要 知识点 练习	(134)
第四章练习题	(148)
第五章 排列、组合、二项式定理	(153)
一、排列、组合	(153)
(1) 内容提要 知识点 练习	(153)
(二、二项式定理	(163)
(1) 内容提要 知识点 练习	(163)
第五章练习题	(169)
代数验收题	(173)
三 角	
第一章 三角函数	(179)
(1) 内容提要 知识点 练习	(179)
第二章 两角和与差的三角函数	(205)
(1) 内容提要 知识点 练习	(205)
第三章 反三角函数和三角方程	(234)
(1) 内容提要 知识点 练习	(234)
三角验收题	(256)
立体几何	
第一章 直线和平面	(261)
(1) 平面与空间两条直线	(261)

(814)	内容提要.....知识点.....练习.....	(261)
(815)	二、空间直线和平面.....	(272)
(816)	内容提要.....知识点.....练习.....	(272)
(817)	三、空间两个平面.....	(286)
(818)	内容提要.....知识点.....练习.....	(286)
(819)	第一章练习题.....	(305)
	第二章 多面体和旋转体	(310)
	一、多面体.....	(310)
(820)	内容提要.....知识点.....练习.....	(310)
(821)	二、旋转体.....	(322)
(822)	内容提要.....知识点.....练习.....	(322)
(823)	三、多面体和旋转体的体积.....	(336)
	内容提要.....知识点.....练习.....	(336)
	第二章练习题.....	(347)
	立体几何验收题	(352)

解析几何

第一章 直线	(357)
内容提要.....知识点.....练习.....	(357)
第二章 圆锥曲线	(391)
一、曲线方程、充要条件.....	(391)
内容提要.....知识点.....练习.....	(391)
二、圆.....	(405)
内容提要.....知识点.....练习.....	(405)

(113)	三、圆锥曲线	(413)
(375)	内容提要 知识点 练习	(413)
	第三章 参数方程与极坐标	(429)
(382)	一、参数方程	(429)
(385)	内容提要 知识点 练习	(429)
(392)	二、极坐标	(449)
(395)	内容提要 知识点 练习	(449)
(412)	解析几何验收题	(462)
(415)	综合练习(一)	(466)
	综合练习(二)	(472)
	练习参考答案	(477)
(398)		
(399)		
(400)		

附录

(723)	附录一	
(724)	附录二	
(725)	附录三	
(726)	附录四	
(727)	附录五	
(728)	附录六	
(729)	附录七	
(730)	附录八	
(731)	附录九	
(732)	附录十	

代数

第一章

幂函数、指数函数 和对数函数

一、集合与映射

内容提要

- (1) 集合的概念
- 一组对象的全体形成一个集合(简称集)。集合里的各个对象叫做这个集合的元素。
- 通常用大写的拉丁字母表示集合,用小写的拉丁字母表示集合中的元素。
- 集合中元素的特性:确定性,互异性,无序性。
- 元素与集合的关系: $a \in A$ 或 $a \notin A$, 二者必居其一。
- 空集: 不含任何元素的集合叫做空集, 记作 ϕ 。
- 全集: 在研究过程中, 如果任何集合都是某个集合的子集, 则称该集合为全集, 记作 I 。

(2) 集合的表示法

列举法 如方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集为 $\{-1, 1\}$ 。

描述法 如方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集为 $\{x | x^2 - 1 = 0\}$ 。

(3) 集合的相互关系

子集

若 $x \in A$, 则 $x \in B$, 就称集合 A 是集合 B 的子集. 记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ 。

若 $A \subseteq B$, 且至少存在一个元素 $x \in B$, $x \notin A$, 则称集合 A 是集合 B 的真子集. 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ 。

集合的相等。

若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称集合 A 与集合 B 相等, 记为 $A = B$ 。

交集 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。

并集 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。

补集 $\bar{A} = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$ 。

(4) 映射

设 A, B 是两个集合, 如果按照某种法则 f , 对于集合 A 中的任何一个元素, 在集合 B 中都有唯一的元素和它对应, 这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射, 记作 $f: A \rightarrow B$ 。

如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射, 那么和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象, a 叫做 b 的原象。

集合是数学中的一个基本概念. 应用集合的思想、术语和符号来表述数学的基本概念, 处理数学的某些问题都具有深刻、明确等优点. 在中学数学中, 函数、数列、轨迹等问题都是通过集合定义的。

映射是建立在集合和对应这两个原始概念的基础上的。

本章中的函数定义是用集合和映射来表述的。

知识点

集合 元素与集合的关系，集合表示法，空集和全集的意义，常见数集及表示法。

子集 子集，真子集及等集的意义及表示法。

交集 交集及表示法。

并集 并集及表示法。

补集 补集及表示法。

映射 映射及表示法，象与原象。

例题精解

例 1. 已知全集 $I = \{a, b, c, d, e\}$, $M = \{a, c, d\}$, $N = \{b, d, e\}$, 那么 $\overline{M} \cap \overline{N}$ 等于

- (A) ϕ (B) $\{d\}$ (C) $\{a, c\}$ (D) $\{b, e\}$

分析：先分别求出 $\overline{M}$, $\overline{N}$, 再求 $\overline{M} \cap \overline{N}$ 。

解： $\because \overline{M} = \{b, e\}$, $\overline{N} = \{a, c\}$, $\therefore \overline{M} \cap \overline{N} = \phi$.

说明：用列举法给出集合要利用交集，并集，补集的定义，计算所求的集合。

例 2. 已知 $A = \{(x, y) | y = x^2, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(x, y) | y = 2 - x^2, x \in \mathbb{R}\}$, $C = \{y | y = x^2, x \in \mathbb{R}\}$, $D = \{y | y = 2 - x^2, x \in \mathbb{R}\}$, 求 $A \cap B$, $C \cap D$.

分析：对于用描述法给出的集合，要正确认识代表元素

的含义. 本题中, 集合 A、B 分别代表二元方程的解集 (或平面内的点集), 而集合 C、D 分别表示数集 (或函数的值域), 因此需通过解二元方程组或解不等式组求解.

解: $A \cap B = \{ (x, y) \mid \begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2, \end{cases} x \in \mathbb{R} \} = \{ (-1, 1), (1, 1) \}$

$$C \cap D = \{ y \mid y \geq 0 \} \cap \{ y \mid y \leq 2 \} = \{ y \mid 0 \leq y \leq 2 \}$$

说明 正确审题, 准确理解题意是正确解答数学问题的前提, 学生在解答本题时常把 $C \cap D$ 与 $A \cap B$ 的答案混淆, 其根源在于不理解代表元素的含义. 可通过对比使学生准确把握集合的描述法. 在解答用描述法给出的集合的问题时, 要注意解方程, 解不等式组等知识的运用, 并培养运用数形结合、等价转化等思想方法解题的能力.

例 3. 已知 I 为全集, 集合 $M, N \subseteq I$, 若 $M \cap N = N$, 则 ()

(A) $M \supseteq N$ (B) $M \subseteq N$ (C) $M \subset N$ (D) $M \supseteq N$

分析: 由条件 $M \cap N = N$ 可知 $M \supseteq N$, 画出相应的韦恩图, (图略) 而后把四个选择支进行检验.

解: 选 (A)

说明: 本题是运用抽象的集合考察集合间的关系及抽象的符号运算, 解决的方法是利用韦恩图, 把抽象问题具体化和形象化.

例 4. 已知 $A = \{a, ab, \lg(ab)\}$, $B = \{0, |a|, b\}$, 且 $A = B$, 求实数 a, b 的值.

分析: $A = B$ 的含义是 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$, 再由子集定义知,

$x \in A \Leftrightarrow x \in B$, 集合中元素的互异性是解答本题的重要依据。

解: $\because A=B, 0 \in B, \therefore 0 \in A$

$\because |a|, b \in B, \therefore |a| \neq 0, b \neq 0$.

$\therefore$ 在 A 中只能 $\lg(a, b) = 0$, 于是 $a, b = 1$.

$\therefore 1 = ab \in A, \therefore 1 \in B$

若 $b=1$, 由 $ab=1$ 知 $a=1$, 于是 A 中的元素 a 与 ab 相等, 这与集合中元素的互异性矛盾, $\therefore b \neq 1$

$\therefore$ 只有 $|a|=1$, 由 $ab=1, b \neq 1$ 知 $a \neq 1$

$\therefore a = -1$, 于是 $b = -1$.

说明: 概念是思维的基础, 正确理解集合中元素的特性及集合相等的概念是解答本题的关键。

例 5. 设集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, 集合 $B = \{x | x - a \leq 0\}$

(1) 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 a 的取值范围。

(2) 若 $A \cup B = B$, 求实数 a 的取值范围。

分析: 先把集合 A, B 化简, 再把条件 $A \cap B \neq \emptyset, A \cup B = B$ 转化, 最后利用数轴求解。

解: 由已知 $A = \{x | -2 < x < 3\}$,

$B = \{x | x \leq a\}$

在数轴上表示出 A 与 B

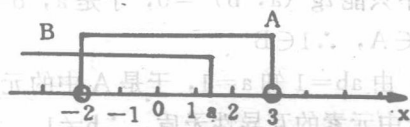


图 1-1

(1) 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 A 与 B 有公共元素, 所以 $a > -2$.

(2) 若 $A \cup B = B$, 则 $A \subseteq B$, 所以 $a \geq 3$.

说明: 结合集合可考查等价转化的思想, 即将一个集合转化为相等的集合或将集合与集合的关系转化为元素与集合的关系. 在解题中要注意运用数形结合的思想, 如本题中用数轴上的区间表示集合, 用直观图形辅助解题.

例 6. 下列各对应中能构成集合 A 到集合 B 的映射的是

(A) $A = \{\text{平面内的四边形}\}$, $B = \{\text{平面 M 内的圆}\}$, 对应法则是“作四边形的外接圆”.

(B) $A = \{\text{平面 M 内的圆}\}$, $B = \{\text{平面 M 内的矩形}\}$, 对应法则是“作圆的内接矩形”.

(C) $A = \{\text{平面 M 内的点对}\}$, $B = \{\text{平面 M 内的矩形}\}$, 对应法则是“以点对为相对顶点作矩形”.

(D) $A = \{\text{平面 M 内的三角形}\}$, $B = \{\text{平面 M 内的圆}\}$, 对应法则是“作三角形的内切圆”.

分析: 映射是指: 给定的两个集合 A 和 B , 在某个对应法则 f 的作用下, 对于集合 A 中的任何一个元素 x , 在集合 B

中都有唯一的元素 y 和它对应, 这样的对应 f 叫做从集合 A 到集合 B 的映射。简言之, 其判断标准为一有, 二唯一。

解: 由于“平面 M 内的四边形不一定有外接圆,” 所以 (A) 不是映射。

由于“圆的内接矩形”不唯一, 所以 (B) 不是映射。

由于“以点对为相对顶点作矩形”不唯一, 所以 (C) 不是映射。

由于每一个三角形有且仅有一个内切圆, 所以 (D) 是从集合 A 到集合 B 的映射。

因此应选 (D)

说明: 判断给出的对应是否为映射可考查对映射定义的理解, 在判断过程中要紧扣“一有”“二唯一”。

例 7. 已知 $A=B=\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ 从 A 到 B 的映射 $f: (x, y) \rightarrow (x+y, xy)$, 求 $(7, 10)$ 的原象。

分析: 依已知 $(7, 10)$ 是 B 中的元素, 求它的原象的实质是解方程组。

解: 设 $(7, 10)$ 的原象为 (x, y)

$$\text{则} \begin{cases} x+y=7 \\ xy=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$$

$\therefore$ 在给定映射下, $(7, 10)$ 的原象是 $(2, 5)$ 或 $(5, 2)$ 。

说明: 本题要求深刻理解象和原象的概念, 会利用方程思想求原象。

练 习

一、选择题

- 集合 $\{0\}$ 与 ϕ 的关系是 ()
 (A) $\{0\} = \phi$ (B) $\{0\} \subset \phi$
 (C) $\{0\} \supset \phi$ (D) $\phi \in \{0\}$
- 设全集 $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cup B =$ ()
 (A) $\{0\}$ (B) $\{0, 1\}$
 (C) $\{0, 1, 4\}$ (D) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
- 已知集合 $A = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | x = 4k \pm 1, k \in \mathbb{Z}\}$, 则集合 A, B 之间的关系为 ()
 (A) $A \subset B$ (B) $A \supset B$
 (C) $A = B$ (D) $A \neq B$
- 设全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 5\}$, 则集合 A 的真子集的个数是 ()
 (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8
- 已知 $M = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\}$, $N = \{y | y = x + 1\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()
 (A) $\{0, 1\}$ (B) $\{0, 1\}$
 (C) $\{1, 2\}$ (D) $\{1, +\infty\}$
- 设全集 $I = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$, $A = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = 1\}$, $B = \{(x, y) | y \neq x + 1\}$, 那么 $A \cap B$ 等于 ()

U (A) $\phi \subset B$ 又, 合集空非 (B) $\{ (2, 3) \}$ 合集非空

(C) $\{2, 3\}$ (D) $\{ (x, y) | y=x+1 \}$

7. 设非空集合 A, B 的关系是 $A \subset B$, I 是全集, 那么下列集合中表示空集的是

(A) $\overline{A} \cap B$ (B) $\overline{A} \cap \overline{B}$

(C) $A \cap \overline{B}$ (D) $A \cap B$

8. 设 S, T 是两个非空集合, 且 $S \subset T$, $T \subset S$, 令 $X = S \cap T$, 那么 $S \cup X$ 等于

(A) X (B) T (C) ϕ (D) S

9. 已知 $f: A \rightarrow B$ 是从集合 A 到集合 B 的一个映射, $b \in B$, 那么

(1) 存在 $a \in A$, $b, c \in B$ 且 $b \neq c$, 使 $f(a) = b$, 又 $f(a) = c$

(2) 存在 $a \in A$, 使 $f(a) \in B$

(3) 有且仅有 $a \in A$, 使 $f(a) = b$

(4) 至少有一个 $a \in A$, 使 $f(a) = b$

以上命题错误的个数为

(A) 1 个 (B) 2 个

(C) 3 个 (D) 4 个

10. 设 $A = \{1, 2\}$, f 是从 A 到 A 的映射则满足 $f[f(x)] = f(x)$ 的映射个数是

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二、填空题

1. 已知 $I = \{x | x^2 - 4x - 5 < 0\}$, $A = \{x | 1 < x < 2\}$, $B = \{x | \frac{1}{2} < x < 4\}$, 则 $\overline{A} \cap B =$

2. 若 I 是全集, P, Q 是非空集合, 又 $P \supset Q$, 则 $(P \cup Q) \cap I = (P \cup Q)$

3. 设集合 $A = \{1, 2, x^2\}$, $B = \{-1, x\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则以 x 的实数值组成的集合是

4. 已知集合 $A = \mathbb{R}$, $B = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$, $f: A \rightarrow B$ 是从 A 到 B 的映射, $f: x \mapsto (x+1, x^2+1)$, 则 B 中元素 $(\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$ 的原象是

三、解答题

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - mx + m^2 - 19 = 0\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, 集合 $C = \{x | x^2 + 2x - 8 = 0\}$, 且 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, 求 m 的值

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 + 3x - 10 < 0\}$, $B = \{x | |x| = y + 1, y \in A\}$, 求 $A \cap B$

3. 已知 $f(x) = x^2 + ax + b$, $A = \{x | f(x) = x\}$
 $B = \{x | f[f(x)] = x\}$, 若 $A = \{-1, 3\}$, 求集合 B

4. 已知 $P = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$, $Q = \{x | x^2 + 4x + a < 0\}$, 若 $P \cap Q = Q$, 求实数 a 的取值范围.

二、函数

内容提要

函数是中学数学的重点内容之一, 是学习高等数学的重要基础. 这部分知识的特点是: 概念抽象, 内容丰富, 方法