汪江松 曹衍清 主编

高中数学重难点手册

（适用高二）

华中师范大学出版社

高中数学重难点手册

适用高二

汪江松　曹衍清　主编

叶家振　杨松林　王宪生　张水松
冯跃峰　卫则奚　孟开诚　李啟松　编著
颛孙长宗　梅声应

华中师范大学出版社

鄂新登字 11 号

高中数学重难点手册

适用高二

汪江松　曹衍清　主编

*

华中师范大学出版社出版发行

（武昌桂子山　邮编 430070）

新华书店湖北发行所经销

湖北省新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　　印张 8.5　字数 221 千字

1993 年 6 月第 1 版　1993 年 6 月第 1 次印刷

ISBN　7-5622-1072-1/G · 438

印数：1—10100　定价 3.85 元

前　言

数学是研究空间形式与数量关系的一门科学，它在科学实验和生产实践中有着广泛的应用，是一种必不可少的工具。

数学是思维的体操，它教人聪颖。数学还可以训练和测定学生思维的灵活性、独创性和敏捷性

数学又是中学阶段一门重要的基础学科。

为了帮助广大中学生明确数学学习的目标，理解和攻克教材的重点难点，掌握各类题型的解题方法和技能技巧，提高数学的思维能力和解题能力，我们特组织编写了这套《高中数学重难点手册》。

本《手册》按现行数学教材的系统编写，各章分别以“学习目标”、“重点、难点与关键”、“技能技巧”、“例题剖析”、“反馈练习”等框架出现，以便于读者使用。

“学习目标”、“重点、难点与关键”明确地指出各章节应掌握的知识内容及这部分内容的重点难点和关键，使学者目标明确，心中有数。

“技能技巧”、“例题剖析”围绕教材的重难点，指出本章节中的重要解题方法和技能技巧，并通过对典型例题的解证和剖析，揭示思维过程，阐述带规律性的东西，以期启迪读者的思维，提高分析问题和解决问题的能力。

节末的“反馈练习”和章末的“单元反馈练习”题型新颖，针对性强。考虑到多数学生的学习负担和承受能力，对这些习题，编著者在“适时、适量、适度、适用”上独具匠心。对那些学有余力的同学，我们还在单元反馈练习中配备了B组题，以

适应各种层次学生的需要(注:全书的选择题均是四里挑一,不再另作说明)。

本《手册》的作者多系全国各地具有丰富教学经验的特级教师和高级教师,本书融汇了他们多年的教学经验和教学心得。

参加本册书的编著者有杨松林(代数第四章)、王宪生(第五章)、张水松(第六章)、冯跃峰(第七章)、孟开诚、李啟松(第八章)、颛孙长宗、梅声应(解析几何第一章)、叶家振(第二章)、卫则奚(第三章)。全书由汪江松、曹衍清统稿、定稿。

如果这套《手册》能对学生学习成绩的提高有所帮助,那将是我们最大的愿望。限于编著者的水平,加上时间仓促,缺点和错误难免,我们衷心地欢迎广大读者和同行指正。

汪江松

1993年3月于湖北大学

目　　录

代　　数

解析几何

代　数

第四章　反三角函数和简单三角方程

【学习目标】

掌握反三角函数的概念、图象及其性质，能熟练地进行反三角函数的三角运算和三角函数的反三角运算；掌握最简单的三角方程的解集和某些特殊的简单三角方程的解法.

【重点、难点与关键】

重点：理解反三角函数的概念，掌握四个反三角函数的图象和性质；掌握最简单三角方程的解集和简单三角方程的求解方法.

难点：对反三角函数的概念和主值区间的意义的理解；解三角方程过程中增根、失根和解集的等效性问题.

关键：掌握反三角函数的概念和最简单的三角方程的解集.

4.1　反三角函数

【学习目标】

深刻理解反三角函数的概念及其主值区间的意义；掌握反三角函数的图象及其性质；能熟练地进行反三角函数的三角运算和三角函数的反三角运算.

【重点、难点与关键】

重点：掌握反三角函数的概念和性质，熟练地进行反三角函数的运算.

难点：反三角函数的概念和主值区间意义的理解；三角函数的反三角运算.

关键：深刻理解反三角函数的概念.

【技能技巧】

在计算和证明中，要充分发挥下列两组公式的作用：

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\sin\ (\arcsin x)=x, & x\in[-1,\ 1]\\ \cos\ (\mathrm{art}\cos x)=x, & x\in[-1,\ 1]\\ \mathrm{tg}\ (\mathrm{arc\,tg}\ x)=x, & x\in R\\ \mathrm{ctg}\ (\mathrm{arc\,ctg}\ x)=x, & x\in R\end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases}\arcsin\ (\sin x)=x, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\\ \arccos\ (\cos x)=x, & x\in[0,\ \pi]\\ \mathrm{arc\,tg}\ (\mathrm{tg}\ x)=x, & x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\\ \mathrm{arc\,ctg}\ (\mathrm{ctg}\ x)=x, & x\in(0,\ \pi)\end{cases}$$

特别要注意其中公式成立的条件.

在进行反三角函数的三角运算时，通常引进辅助角. 如计算 $\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{5}{13}+\arccos\frac{4}{5}\right)$，可引进辅助角 $\alpha=\arcsin\frac{5}{13}$，$\beta=\arccos\frac{4}{5}$，但应注意辅助角的范围的限制.

在证明反三角函数恒等式时，通常采用的方法是：先证明等式两边的角在取某一同名三角函数时，它们的值相等；再证明等式两边的角属于同一单调区间. 其实质是转化为反三角函数 的代数运算，有时也可以用构造图形的方法去证明.

【例题剖析】

例 1 求下列函数的定义域和值域:

(1) $y=2\arcsin(3x-2)+\frac{\pi}{4}$;

(2) $y=\frac{\pi}{3}-\operatorname{arc\,tg}(\sin x)$;

(3) $y=\arccos(3x-4x^2)$.

解 (1) $\because\quad -1\leqslant 3x-2\leqslant 1$,

$\therefore$ 定义域为 $x\in\left[-\frac{1}{3},1\right]$.

$\because\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin(3x-2)\leqslant\frac{\pi}{2}$,

$\therefore$ 值域为 $y\in\left[-\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi\right]$;

(2) 定义域为 $x\in R$.

$\because\quad -1\leqslant\sin x\leqslant 1$ 且反正切函数为增函数,

$\therefore\quad -\frac{\pi}{4}\leqslant\operatorname{arc\,tg}(\sin x)\leqslant\frac{\pi}{4}$,则值域为

$y\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$;

(3) 由$\begin{cases}3x-4x^2\geqslant -1\\3x-4x^2\leqslant 1\end{cases}$ 得$-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 1$,

$\therefore$ 定义域为$\left[-\frac{1}{4},1\right]$.

$\because\quad 3x-4x^2=-4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{9}{16}\leqslant\frac{9}{16}$

且反余弦函数为减函数.

$\therefore$ 值域为 $y\in\left[\arccos\frac{9}{16},\pi\right]$.

剖析 解这类问题的关键是要熟练掌握反三角函数的概念和主值区间的意义;求复合函数的值域时,要先求中间变量的取值范围,同时还要注意反三角函数的增减性.

例 2 求下列三角函数值：

(1)$\cos\left(\operatorname{arc}\sin\dfrac{1}{3}\right)$；　　(2)$\sin\left(2\operatorname{arc}\operatorname{ctg}\dfrac{1}{2}\right)$；

(3)$\operatorname{tg}\left[\dfrac{1}{2}\operatorname{arc}\cos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right]$；

(4)$\cos\left[\operatorname{arc}\sin\dfrac{1}{3}-\operatorname{arc}\cos\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right]$.

解 (1)$\because$ $\operatorname{arc}\sin\dfrac{1}{3}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$\therefore\quad \cos\left(\operatorname{arc}\sin\frac{1}{3}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\operatorname{arc}\sin\frac{1}{3}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(注意反正弦函数的主值区间正好是余弦函数的非负区间)；

(2) 令 $\operatorname{arc}\operatorname{ctg}\dfrac{1}{2}=\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\operatorname{tg}\alpha=2$，

$$\therefore\quad \sin\left(2\operatorname{arc}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\right)=\sin2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{4}{5};$$

(3) 令 $\operatorname{arc}\cos\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\dfrac{\alpha}{2}\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\cos\alpha=-\frac{1}{3},\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{2};$$

(4) 令 $\operatorname{arc}\sin\dfrac{1}{3}=\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$$\operatorname{arc}\cos\left(-\frac{4}{5}\right)=\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),$$

则 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{3}{5}$.

$$\therefore\quad \text{原式}=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{3-8\sqrt{2}}{15}.$$

剖析 在进行反三角函数的三角运算时要特别注意由反三角函数的主值区间确定三角函数的符号，对较复杂的问题可以引进辅助角.

例 3 求下列反三角函数值

(1)$\arccos\left[\operatorname{tg}\left(-\frac{5}{4}\pi\right)\right]$； (2)$\arcsin\left(\sin\frac{7}{5}\pi\right)$；

(3)$\arcsin\left(\cos\frac{7}{9}\pi\right)$.

解 (1)原式$=\arccos(-1)=\pi$；

(2) 原式$=\arcsin\left[\sin\left(\pi+\frac{2}{5}\pi\right)\right]$

$$=-\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right)=-\frac{2}{5}\pi;$$

(3) 解法 1:原式$=\arcsin\left[\sin\left(-\frac{5}{18}\pi\right)\right]$

$$=-\arcsin\left(\sin\frac{5}{18}\pi\right)=-\frac{5}{18}\pi;$$

解法 2： 令 $\arcsin\left(\cos\frac{7}{9}\pi\right)=\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

则 $\sin\alpha=\cos\frac{7}{9}\pi=\sin\left(-\frac{5}{18}\pi\right)$, $\therefore$ $\alpha=-\frac{5}{18}\pi$.

剖析 在进行三角函数的反三角运算时要特别注意正确使用前面所说的公式 I ,这就是一要反三角函数与三角函数名称相同,二要三角函数后面的角必须在相应反三角函数的主值区间内.问题比较复杂时可采用(3)的解法 2,转化为求三角方程在主值区间内的特解来计算.

例 4 比较下列反三角函数值的大小：

(1) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$和 $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$；

(2) $\operatorname{arc\,tg}(-1.5)$和 $\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{2})$；

(3) $\arcsin\frac{1}{3}$和 $\arccos\frac{1}{3}$.

解 (1) $\because$ $y=\arccos x$ 在$[-1,1]$上是减函数,且 $-\frac{1}{2}<-\frac{1}{3}$.

$\therefore \quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)>\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$；

(2) $\because \quad y=\operatorname{arc\,tg} x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是增函数，且

$-1.5<-\sqrt{2}$，

$\therefore \quad \operatorname{arc\,tg}(-1.5)<\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{2})$；

(3) 解法 1 $\because \quad \arccos\frac{1}{3}=\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

又 $y=\arcsin x$ 为增函数，

$$\arcsin\frac{1}{3}<\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$\therefore \quad \arcsin\frac{1}{3}<\arccos\frac{1}{3}$；

解法 2 $\because \quad \sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$，

$$\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$\therefore \quad \sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)<\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$.

又 $\arcsin\frac{1}{3}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\arccos\frac{1}{3}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$y=\sin x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是增函数，

$\therefore \quad \arcsin\frac{1}{3}<\arccos\frac{1}{3}$；

解法 3 $\because \quad \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$，

又易知 $\arcsin\frac{1}{3}<\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$$\arccos\frac{1}{3}>\arccos\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore \quad \arcsin\frac{1}{3}<\arccos\frac{1}{3}$.

剖析 比较反三角函数值的大小的常用方法有：

①直接根据反三角函数的单调性来确定；

②对各反三角函数取同名三角函数，再由三角函数的单调性来确定；

③插值法(如解法 3).

例 5 求证下列各式：

(1) $\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}=\arcsin\frac{77}{85}$；

(2) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$；

(3) $2\arcsin x=\arccos(1-2x^2)$，其中 $x\in[0,1]$.

证明 (1)令 $\arcsin\frac{3}{5}=\alpha,\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\sin\alpha=\frac{3}{5},\cos\alpha=\frac{4}{5},$$

令 $\arcsin\frac{8}{17}=\beta,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\sin\beta=\frac{8}{17},\ \cos\beta=\frac{15}{17}.$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{17}+\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{17}=\frac{77}{85}.\end{aligned}$$

又 $\frac{3}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{8}{17}<\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}$， $\therefore\ \alpha、\beta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

$\therefore\ \alpha+\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$， $\alpha+\beta=\arcsin\frac{77}{85}$，

即 $\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}=\arcsin\frac{77}{85}$.

(2) 方法 1 令 $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}=\alpha$， $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\beta$.

则 $\alpha、\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$，$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$.

$$\text{tg}\left(\text{arc tg }\frac{1}{2}+\text{arc tg }\frac{1}{3}\right)=\text{tg}(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta}{1-\text{tg}\alpha\text{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

又　$\alpha+\beta\in(0,\pi)$，　∴　$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$，

即　$\text{arc tg }\frac{1}{2}+\text{arc tg }\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

方法 2　构造如图 4 - 1 的△ABC，其中 CD 为 AB 边上的高，且 $CD=1$，$AD=2$，$BD=3$，则 $\angle A=\text{arc tg }\frac{1}{2}$，$\angle B=\text{arc tg }\frac{1}{3}$，

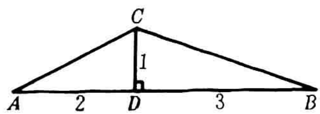


图 4 - 1

$AC=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{10}$，

由余弦定理，有

$$\cos C=\frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{10})^2-(2+3)^2}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

又　$0<C<\pi$，　∴　$C=\frac{3}{4}\pi$，　$A+B=\frac{\pi}{4}$，

即　$\text{arc tg }\frac{1}{2}+\text{arc tg }\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

(3)　由于 $x\in[0,1]$，　所以

$2\text{arc sin }x\in[0,\pi]$，$\text{arc cos }(1-2x^2)\in[0,\pi]$，

$\cos(2\text{arc sin }x)=1-2\sin^2(\text{arc sin }x)=1-2x^2$，

$\cos[\text{arc cos }(1-2x^2)]=1-2x^2$，

∴　$2\text{ arc sin }x=\text{arc cos }(1-2x^2)$.

剖析　这类问题就是前面所说的证明反三角函数恒等

式，通常是证等式两边的角相等．必须证明两个方面：①等式两边角的同名三角函数值相等；②等式两边的角属于所取三角函数的同一单调区间．有时也常引入辅助角．而构图法只能在一定的范围内才能应用．

反馈练习 4.1

1．判断题（对的打“√”，错的打“×”）

(1) $\arcsin x$ 与 $\arcsin(\sin x)$ 都是周期函数．（　　）

(2) $\sin\left(\arcsin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$（　　）

(3) $\arcsin\left(\sin\frac{5}{4}\pi\right)=-\frac{\pi}{4}$（　　）

(4) α 为三角形的一个内角且 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，

则 $\alpha=\arcsin\frac{1}{3}$（　　）

(5) $\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}$ $(x\neq0)$（　　）

2．填空题

(1) $\arcsin\left[\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=$____．

(2) $\cos\left[\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right]=$____．

(3) $y=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-1}{x+1}$ 的定义域是____，值域是____．

(4) $\arcsin x>\frac{1}{2}$，则 x 的取值范围是____．

(5) $\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\right)$ 与 $\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)$ 的大小关系是____．

(6) $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$ 与 $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$ 的大小关系是____．

3．选择题

(1) 函数 $y=\arcsin(x-1)$ 的最大值是（　　）．

(A) $\frac{\pi}{2}+1$　(B) $\frac{\pi}{2}-1$　(C) $1-\frac{\pi}{2}$　(D) $\frac{\pi}{2}$

(2) $\arccos(\cos\pi^2)$的值是(　　).

(A) π^2　(B) $3\pi-\pi^2$　(C) $4\pi-\pi^2$　(D) $\pi^2-4\pi$

(3)有四个函数　$y=\arcsin x$；$y=\arccos x-\frac{\pi}{2}$；

$y=-\operatorname{arc\,tg} x$；$y=-\operatorname{arc\,ctg} x$，其中是递减的奇函数的个数是(　　).

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

(4)函数 $y=\arcsin(\operatorname{tg} x)+\operatorname{arc\,tg}(\cos x)$的定义域是(　　).

(A) $\left(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$　　(B) $\left[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$

(C) $\left[k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$

(D) $\left[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(k\pi+\frac{q\pi}{2},k\pi+\frac{3\pi}{4}\right]$(其中 $k\in Z$)

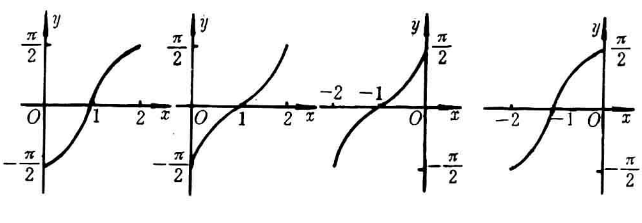
(5)若 $M=\{x\,|\,x=\sin(\arcsin x)\}$，

$N=\{x\,|\,x=\arcsin(\sin x)\}$，则 $\overline{M}\cap N$ 等于(　　).

(A) $\left\{x\,|\,1<|x|\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$　(B) $\{x\,|\,|x|\geqslant 1\}$

(C) $\varnothing$　　(D) R

(6)函数 $y=\arcsin(x-1)$的图象是(　　).



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

4. 求下列函数的定义域和值域

(1) $y=\frac{1}{2}\arcsin\frac{3x-2}{x}-\frac{\pi}{4}$；

(2) $y=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$；