

高职高专高等数学  
精品课程教材

# 高等数学

## 学习指导

〈工科类专业适用〉  
(第二版)

高建立 孙晓晔 主编



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

高职高专高等数学  
精品课程教材

# 高等数学

## 学习指导

GAODENG SHUXUE  
XUEXI ZHIDAO

〈工科类专业适用〉  
(第二版)

高建立 孙晓晔 主编

内容提要

本书是与《高等数学(工科类专业适用)》(第二版)(上、下册)相配套的学习指导书。

本书按主教材的章节顺序编排内容,其教学进度与主教材同步,内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、无穷级数、常微分方程、拉普拉斯变换、矩阵及其应用等。每章的栏目包括“知识结构”、“教学基本要求与重点、难点”、“解题指导”、“综合复习题”等,每章最后给出该章习题的参考答案与提示。

本书可作为高职高专院校、成人高校和本科院校开办的二级职业技术学院工科各专业高等数学课程的辅导教材,也可供相关科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/高建立,孙晓晔主编. —2版. —北京:高等教育出版社,2011.8

工科类专业适用

ISBN 978-7-04-033530-9

I. ①高… II. ①高…②孙… III. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第153428号

策划编辑 邓雁城  
责任编辑 崔梅萍  
封面设计 张申申  
版式设计 王艳红

责任校对 姜国萍  
责任印制 尤 静

|      |                       |      |                                                                   |
|------|-----------------------|------|-------------------------------------------------------------------|
| 出版发行 | 高等教育出版社               | 网 址  | <a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>         |
| 社 址  | 北京市西城区德外大街4号          |      | <a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>         |
| 邮政编码 | 100120                | 网上订购 | <a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>       |
| 印 刷  | 大厂益利印刷有限公司            |      | <a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a> |
| 开 本  | 787 mm × 1092 mm 1/16 | 版 次  | 2006年9月第1版                                                        |
| 印 张  | 13.75                 |      | 2011年8月第2版                                                        |
| 字 数  | 330千字                 | 印 次  | 2011年8月第1次印刷                                                      |
| 购书热线 | 010-58581118          | 定 价  | 22.00元                                                            |
| 咨询电话 | 400-810-0598          |      |                                                                   |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物 料 号 33530-00

## 第二版前言

本书第二版是在第一版的基础上,考虑到高职教育的培养目标、学生的特点以及“必需、够用”的原则,根据我们多年的教学实践修订而成的。

由于本书是与吴洁主编的《高等数学(工科类专业适用)》上、下册相配套的学习指导和训练用书,因此,修订中我们在保持与教材的知识体系同步,保持第一版书的叙述详细、通俗易懂、例题分析透彻等优点的同时,主要做了以下工作:

1. 充分考虑不同学生基础知识的差异和学习能力的不同,妥善处理基础与提高、训练与实践、学习与升学的关系。在选题上注重基本概念、基本运算,对例题、习题进行适当的调整,降低习题难度。

2. 针对教材中内容的变化,删除了求平面曲线的弧长、函数的平均值、周期为  $2l$  的函数展开为傅里叶级数等内容及习题;增加了空间平面、直线、曲面及其方程等内容及习题。

3. 除以上变动外,原书的其他部分保持不变,只在更正不当之处的同时对个别地方作了必要的修改。

本书由天津电子信息职业技术学院高建立和孙晓晔担任主编,任晓华、朱贵凤担任副主编。参加本次修订工作的人员有:天津中德职业技术学院任晓华(第1、2章),张雅琴(第7、8章);天津电子信息职业技术学院高建立(第3章),孙晓晔(第一、二阶段总复习);天津工程职业技术学院高秀英(第4章),何芳丽(第5章),李旸(第10章);天津现代职业技术学院朱贵凤(第6章);天津机电职业技术学院刘振莉(第9章)。全书的结构安排、统稿、定稿工作由孙晓晔、高建立承担。

在本书的修订过程中,天津市教委高职高专处叶庆、杨荣敏老师给予了大力支持和热情帮助,并提出了宝贵意见。高等教育出版社的编辑为本书的出版付出了辛勤劳动,在此一并表示衷心的感谢。

由于编者的水平有限,加之时间比较仓促,新版书中还会存在一些问题,请读者提出宝贵意见。

编者

2011年6月

## 第一版前言

本书是“高等数学”课程教学的辅助教材，主要用于课后的复习与提高。它能巩固学生对基本内容、基本概念的理解和掌握，加强对基本运算能力的训练及应用能力的培养。

在编写中，本书充分考虑到高职学生的特点，尽力体现“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，使该书在广度和深度上能适应不同专业、不同层次学生对高等数学学习的需求。

本书与胡农主编的高职高专教材《高等数学(工科类专业适用)》上、下册相配套，按照主教材的章节顺序编排，共10章。每章由五部分组成：(1)知识结构；(2)教学基本要求与重点、难点；(3)解题指导；(4)综合复习题；(5)习题答案与提示。在知识结构这部分，运用框图使读者了解每章知识全貌及各知识点之间的相互联系。“解题指导”中分为例题和练习题两部分；例题中有易错、易混淆的概念题和计算题等基本题，也有较难题，通过对例题的分析特别是一题多解，让读者了解更多的解题思路，从而提高分析问题、解决问题的能力，读者应在读懂例题的基础上完成相关练习题。“综合复习题”则是对每章内容的小结。另外，为了综合复习主教材上、下册的内容，本书分别给出了“第一阶段总复习”、“第二阶段总复习”两套总复习题。

本书的编写是在天津市教委领导下、部分高职高专院校的教师通力协作的结果。本书由天津电子信息职业技术学院孙晓晔担任主编，天津中德职业技术学院胡农担任副主编。具体编写分工如下：天津中德职业技术学院任晓华编写第1章、第2章、张雅琴编写第7章、第8章；天津电子信息职业技术学院高建立编写第3章，陈津编写第6章，孙晓晔编写第一阶段总复习、第二阶段总复习；天津工程职业技术学院高秀英编写第4章，何芳丽编写第5章，李旸编写第10章；天津机电职业技术学院刘振莉编写第9章；胡农参加了部分章节的编写工作。全书的结构安排、统稿由孙晓晔、高建立承担。

在本书的编写过程中，得到了天津市教委高职高专处叶庆、杨荣敏老师的大力支持和热情帮助，他们对本书的编写进行了悉心指导，提出了宝贵的意见。本书承蒙天津师范大学许贵桥教授主审，并提出了诸多宝贵意见和修改建议。高等教育出版社的相关同志也为本书的出版付出了辛勤劳动，在此一并表示衷心的感谢。

由于时间仓促，且限于我们的水平和经验，书中定有不少错误，我们诚恳地希望读者批评斧正。

编者

2006年7月

# 目 录

## 1 函数与极限 ..... 1

- 一、知识结构 ..... 1
- 二、教学基本要求与重点、难点 ..... 2
- 三、解题指导 ..... 2
  - 1-1 函数 ..... 2
  - 1-2 极限 ..... 5
  - 1-3 函数的连续性 ..... 9
- 四、综合复习题 ..... 12
- 五、习题答案与提示 ..... 15

## 2 导数与微分 ..... 18

- 一、知识结构 ..... 18
- 二、教学基本要求与重点、难点 ..... 19
- 三、解题指导 ..... 19
  - 2-1 导数的概念 ..... 19
  - 2-2 导数的基本公式与运算法则及  
导数的运算 ..... 22
  - 2-3 微分及应用 ..... 26
- 四、综合复习题 ..... 28
- 五、习题答案与提示 ..... 31

## 3 导数的应用 ..... 34

- 一、知识结构 ..... 34
- 二、教学基本要求与重点、难点 ..... 34
- 三、解题指导 ..... 35
  - 3-1 中值定理 ..... 35
  - 3-2 洛必达(L'Hospital)法则 ..... 37
  - 3-3 函数的单调性 ..... 39
  - 3-4 函数的极值 ..... 41
  - 3-5 最大值、最小值问题 ..... 43
  - 3-6 曲线的凹凸性与拐点 ..... 45
  - 3-7 函数图像的描绘 ..... 47
- 四、综合复习题 ..... 50

## 五、习题答案与提示 ..... 53

## 4 不定积分 ..... 57

- 一、知识结构 ..... 57
- 二、教学基本要求与重点、难点 ..... 57
- 三、解题指导 ..... 58
  - 4-1 不定积分的概念 ..... 58
  - 4-2 换元积分法 ..... 60
  - 4-3 分部积分法 ..... 64
  - 4-4 有理函数的积分举例 ..... 67
- 四、综合复习题 ..... 70
- 五、习题答案与提示 ..... 74

## 5 定积分及其应用 ..... 77

- 一、知识结构 ..... 77
- 二、教学基本要求与重点、难点 ..... 78
- 三、解题指导 ..... 78
  - 5-1 定积分的概念及性质 ..... 78
  - 5-2 微积分基本公式 ..... 80
  - 5-3 定积分的换元法与分部积  
分法 ..... 82
  - 5-4 反常积分 ..... 86
  - 5-5 定积分的应用 ..... 88
- 四、综合复习题 ..... 91
- 五、习题答案与提示 ..... 95

## 第一阶段总复习 ..... 99

## 6 多元函数微积分 ..... 102

- 一、知识结构 ..... 102
- 二、教学基本要求与重点、难点 ..... 103
- 三、解题指导 ..... 103
  - 6-1 空间直角坐标系 ..... 103
  - 6-2 空间向量及其运算 ..... 104

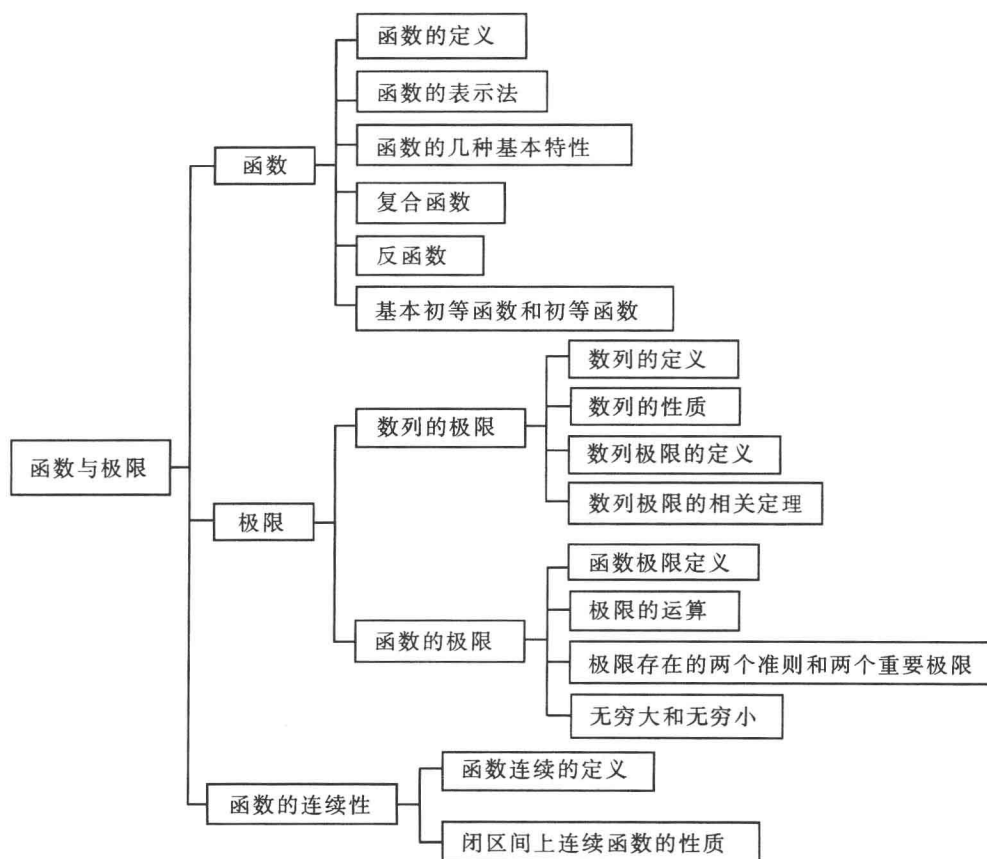
## II 目 录

|                          |     |                         |     |
|--------------------------|-----|-------------------------|-----|
| 6-3 空间平面、直线、曲面及其方程 ..... | 106 | 四、综合复习题 .....           | 167 |
| 6-4 多元函数的概念 .....        | 108 | 五、习题答案与提示 .....         | 170 |
| 6-5 多元函数的导数及微分 .....     | 109 | <b>9 拉普拉斯变换</b> .....   | 173 |
| 6-6 多元函数的极值和最值 .....     | 111 | 一、知识结构 .....            | 173 |
| 6-7 二重积分 .....           | 114 | 二、教学基本要求与重点、难点 .....    | 173 |
| 6-8 多元函数的应用 .....        | 118 | 三、解题指导 .....            | 174 |
| 四、综合复习题 .....            | 120 | 四、综合复习题 .....           | 175 |
| 五、习题答案与提示 .....          | 123 | 五、习题答案与提示 .....         | 176 |
| <b>7 无穷级数</b> .....      | 127 | <b>10 矩阵及其应用</b> .....  | 178 |
| 一、知识结构 .....             | 127 | 一、知识结构 .....            | 178 |
| 二、教学基本要求与重点、难点 .....     | 127 | 二、教学基本要求与重点、难点 .....    | 179 |
| 三、解题指导 .....             | 128 | 三、解题指导 .....            | 179 |
| 7-1 数项级数 .....           | 128 | 10-1 行列式的概念 .....       | 179 |
| 7-2 幂级数 .....            | 136 | 10-2 行列式的性质和克拉默法则 ..... | 182 |
| 7-3 傅里叶级数 .....          | 143 | 10-3 矩阵的概念及其运算 .....    | 185 |
| 四、综合复习题 .....            | 145 | 10-4 逆矩阵与初等变换 .....     | 188 |
| 五、习题答案与提示 .....          | 148 | 10-5 一般线性方程组的求解 .....   | 194 |
| <b>8 常微分方程</b> .....     | 151 | 四、综合复习题 .....           | 197 |
| 一、知识结构 .....             | 151 | 五、习题答案与提示 .....         | 203 |
| 二、教学基本要求与重点、难点 .....     | 151 | <b>第二阶段总复习</b> .....    | 207 |
| 三、解题指导 .....             | 152 | <b>参考文献</b> .....       | 210 |
| 8-1 常微分方程的概念 .....       | 152 |                         |     |
| 8-2 一阶微分方程 .....         | 154 |                         |     |
| 8-3 二阶微分方程 .....         | 161 |                         |     |

# 1

## 函数与极限

### 二、知识结构



## 二、教学基本要求与重点、难点

### 1. 教学基本要求

(1) 通过对函数知识的讲解, 学生对函数的概念及特性有进一步的了解, 对五种基本初等函数的表达式、图形及性质牢固掌握.

(2) 理解复合函数的定义, 对给出的基本初等函数能进行复合或将已知的复合函数进行拆分.

(3) 理解数列的极限、函数的极限的定义及相关性质.

(4) 掌握极限的运算法则、两个重要极限及极限的求法.

(5) 掌握无穷大与无穷小的概念及性质, 无穷小的比较, 能利用等价无穷小替换求极限.

(6) 掌握函数连续性的定义, 会判断间断点的类型.

(7) 了解初等函数的连续性及其闭区间上连续函数的性质.

### 2. 重点、难点

(1) 重点: 复合函数及初等函数的概念, 基本初等函数的表达式、图形及性质. 极限的概念及性质, 几种未定式极限的求法及两个重要极限. 无穷小的比较及利用等价无穷小替换求极限. 函数连续性的判断.

(2) 难点: 几种未定式极限的求法及两个重要极限的应用. 无穷小的比较及利用等价无穷小替换求极限.

## 三、解题指导

### 1-1 函数

#### (一) 例题

例 1 求函数  $y = \sqrt{2 - x - x^2}$  的定义域和值域.

解 由  $2 - x - x^2 \geq 0$  解得定义域为  $X = \{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$ .

观察  $g(x) = 2 - x - x^2$  的图形(如图 1-1), 可知使得  $g(x) \geq 0$  的  $x$  应满足

$$0 \leq 2 - x - x^2 \leq \frac{9}{4}, \quad x \in X,$$

即

$$0 \leq g(x) \leq \frac{9}{4},$$

又

$$y = \sqrt{g(x)},$$

故函数  $y = \sqrt{2 - x - x^2}$  的值域为  $Y = \left\{y \mid 0 \leq y \leq \frac{3}{2}\right\}$ .

本题主要涉及求函数定义域和值域. 函数定义域主要有两大类: 一类是由具体实际问题确定函数的定义域. 这类定义域要根据实际问题的取值来确定. 另一类是没有实际背景的函数的定义

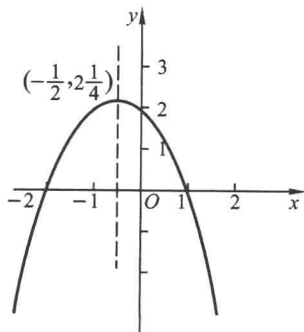


图 1-1

域. 这类函数的定义域是使函数有意义的自变量的集合.

**例 2** 设  $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x$ , 求  $f(x)$ .

**解** 令  $u = \frac{1-x}{1+x}$ , 则  $(1+x) \cdot u = 1-x$ ,  $x = \frac{1-u}{1+u}$ , 所以

$$f(u) = \frac{1-u}{1+u},$$

即

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

本题主要涉及函数概念、复合函数概念、函数符号的理解和由复合函数求“外层”函数的方法. 一种解法是通过先换元找到函数式, 另一种解法是将等式右边的式子变形整理, 再换元找到函数式.

**例 3** 设  $f(\sqrt{4+x}+2) = \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$ , 求  $f(x)$ .

**解** 因为  $f(\sqrt{4+x}+2) = \frac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4+x}+2}$ .

设  $\sqrt{4+x}+2 = t$ , 得

$$f(t) = \frac{1}{t},$$

即

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

**例 4** 设  $f(x) = \begin{cases} 2, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$  求  $f(f(x))$ .

**解** 当  $|x| \leq 2$  时,  $f(x) = 2$ ,  $f(f(x)) = f(2) = 2$ ;

当  $|x| > 2$  时,  $f(x) = 0$ ,  $f(f(x)) = f(0) = 2$ .

所以当  $x \in (-\infty, +\infty)$  时, 均有  $f(f(x)) = 2$ .

此题是对分段函数求复合函数, 应注意不同区间段函数的表达式是不同的.

**例 5** 指出函数  $y = \tan^2(e^{2x})$  的复合结构.

**解** 设  $u = \tan(e^{2x})$ ,  $v = e^{2x}$ ,  $t = 2x$ , 则函数  $y = \tan^2(e^{2x})$  的复合结构为

$$y = u^2, u = \tan v, v = e^t, t = 2x.$$

**例 6** 判断函数  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$  与  $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$  是否相同.

**解**  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$ ;  $g(x)$  的定义域为  $(2, +\infty)$ . 因为两个函数的定义域不同, 所以这两个函数不相同.

**说明:** 判断两个函数是否相同有两个要素, 首先看定义域是否相同, 其次看对应规则是否相同.

**例 7** 如图 1-2 所示是一个曲柄连杆机构, 当主动轮(半径为  $r$ , 角速度为  $\omega$ )转动时, 连杆  $AB$ (长度为  $l$ )带动滑块  $B$  作往复直线运动, 求滑块的运动规律.

**解** 利用函数关系反映某一运动规律, 一般的方法是先画出示意图, 再借助图形找出变量之间的函数关系式.

观察图形知

$$x = OC + CB,$$

$$OC = r \cos \varphi, AC = r \sin \varphi,$$

$$\text{又 } CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi},$$

$$\text{所以 } x = r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}. \quad (1)$$

因为主动轮的角速度为  $\omega$ , 且  $\varphi = \omega t$ , 代入(1)式即得到位移  $x$  与时间  $t$  的函数关系为

$$x = r \cos \omega t + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}.$$

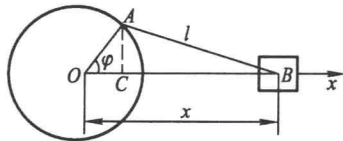


图 1-2

## (二) 练习题 1-1

### 1. 选择题

(1) 设  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$  则  $\{f[f(f(x))]\} = ( \quad )$ .

A. 0                      B. 1                      C.  $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$                       D.  $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

(2)  $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$  的定义域为( ).

A.  $x \in \mathbf{R}$  但  $x \neq 0$                       B.  $x \in \mathbf{R}$  但  $x \neq -1$   
C.  $x \in \mathbf{R}$  但  $x \neq -1, x \neq 0$                       D.  $x \in \mathbf{R}$  但  $x \neq -1, x \neq -2$

(3) 下列各对函数中为同一函数的是( ).

A.  $y = \lg |x|$  与  $y = 2 \lg x$                       B.  $y = e^{-\frac{1}{2} \ln x}$  与  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$   
C.  $y = \sqrt[4]{x^2}$  与  $y = \sqrt{x^2}$                       D.  $y = x$  与  $y = \sin(\arcsin x)$

(4) 下列函数能复合成一个函数的是( ).

A.  $y = f(u) = \ln u, u = g(x) = -x^2$                       B.  $y = f(u) = \sqrt{u}, u = g(x) = -5$   
C.  $y = f(u) = u^3, u = g(x) = \sin x$                       D.  $y = f(u) = e^{-u^2}, |u| < 1, u = g(x) = 3$

### 2. 填空题

(1) 函数  $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^2}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

(2) 设  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ , 则  $f(f(x)) =$ \_\_\_\_\_.

(3)  $f(x+1) = 3x^2 + 2x + 1$ , 则  $f(x) =$ \_\_\_\_\_.

(4) 将  $f(x) = 3 - |x-1|$  表示为分段函数为\_\_\_\_\_.

### 3. 求下列函数的定义域:

(1)  $y = \sqrt[4]{\frac{(x+3)^2}{x}};$

(2)  $y = \frac{\sqrt{x^2-3x-10}}{x-8};$

$$(3) y = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$(4) y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

4. 分析函数  $y = \ln \arccos \frac{1}{x+1}$  的复合结构.

5. 设  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ , 求  $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$ .

## 1-2 极限

### (一) 例题

例 1 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 6x + 5}}{3x - 2}$ .

解 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 6x + 5}}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{4 + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}}{3x - 2},$

又  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{4 + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{4 + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}}{3 - \frac{2}{x}} = \frac{2}{3},$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{4 + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{4 + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}}{3 - \frac{2}{x}} = -\frac{2}{3},$$

所以  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 6x + 5}}{3x - 2}$  不存在.

说明: 第一, 极限式中含有偶次根式, 因此, 开方应注意取正还是负. 第二, 求极限过程中应注意利用极限存在的充分必要条件来讨论极限是否存在.

例 2 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{5x + 3} \cdot \sin \frac{2}{x}$ .

分析 本题发现可有两种解法, 第一, 利用极限的运算法则将原式拆成两个极限来运算. 第二, 通过换元后将原式拆成两个极限来运算.

解 1 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{5x^2 + 3x} \cdot x \cdot \sin \frac{2}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{5x^2 + 3x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\frac{1}{x}} \quad \left( x \rightarrow \infty, \text{ 则 } \frac{1}{x} \rightarrow 0 \right)$$

$$= \frac{6}{5}.$$

解 2 令  $x = \frac{1}{t}$ , 则  $x \rightarrow \infty$  时,  $t \rightarrow 0$ ,

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5t^2 + 3}{5 + 3t} \cdot \frac{\sin 2t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5t^2 + 3}{5 + 3t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{t} = \frac{6}{5}.$$

例3 求  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$ .

解 本题看似简单,但是在计算时却很容易出错,易将其看作重要极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  来求. 原因在于: 第一, 没有注意到  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  的极限不存在; 第二, 对重要极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  掌握得不是很好.

因为  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , 又  $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ , 所以利用有界变量与无穷小的乘积仍为无穷小这一性质, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0.$$

例4 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{x+2} \right)^{2x+1}$ .

解 由于  $\frac{x-3}{x+2} = 1 - \frac{5}{x+2}$ , 设  $-\frac{5}{x+2} = t$ , 则  $x = -\frac{5}{t} - 2$ , 且当  $x \rightarrow \infty$  时,  $t \rightarrow 0$ , 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{x+2} \right)^{2x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{5}{x+2} \right)^{2x+1} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{10}{t}-3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right]^{-10} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-3} = e^{-10} \cdot 1 = e^{-10}. \end{aligned}$$

例5 已知  $x \rightarrow \infty$  时,  $g(x)$  与  $\frac{1}{2x^2}$  是等价无穷小, 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{5} x^2 \cdot g(x)$ .

解 依题意, 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $g(x) \sim \frac{1}{2x^2}$ , 即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 \cdot g(x) = 1,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{5} x^2 \cdot g(x) = \frac{4}{5} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot g(x) = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 \cdot g(x) = \frac{2}{5}.$$

例6 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1+x)}$ .

解 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{x} \quad (\ln(1+x) \sim x)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{3 \sin x}{x} + x \cdot \cos \frac{1}{x} \right],$$

又  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \frac{3}{2}.$$

**例 7** 求  $\lim_{x \rightarrow -8} \left[ \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} + (x+8) \sin \frac{2}{x+8} \right]$ .

**解** 原式  $= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} + \lim_{x \rightarrow -8} (x+8) \sin \frac{2}{x+8}$ .

因为  $\lim_{x \rightarrow -8} (x+8) \sin \frac{2}{x+8} = 0$ , 故本题的关键在于求出和式中的第一个极限.

一般我们会采用将分子和分母同时乘它们的有理化因子的方法来消掉零因子, 进而求出极限值. 但是若利用变量替换消去分母中的根式, 再设法消掉分子和分母中以零为极限的公因子, 则较前一种方法要简单.

**解 1** 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(\sqrt{1-x}-3) \cdot (\sqrt{1-x}+3) \cdot (4-2 \cdot \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(2+\sqrt[3]{x}) \cdot (4-2 \cdot \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}) \cdot (\sqrt{1-x}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(-x-8) \cdot (4-2 \cdot \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(8+x) \cdot (\sqrt{1-x}+3)} \\ &= -\frac{12}{6} = -2, \end{aligned}$$

所以  $\lim_{x \rightarrow -8} \left[ \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} + (x+8) \sin \frac{2}{x+8} \right] = -2 + 0 = -2$ .

**解 2** 对于极限  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ , 设  $\sqrt[3]{x} = t$ , 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} &= \lim_{t \rightarrow -2} \frac{\sqrt{1-t^3}-3}{2+t} = \lim_{t \rightarrow -2} \frac{1-t^3-9}{(2+t) \cdot (\sqrt{1-t^3}+3)} \\ &= \lim_{t \rightarrow -2} \frac{-(2+t) \cdot (t^2-2t+4)}{(2+t) \cdot (\sqrt{1-t^3}+3)} = -2, \end{aligned}$$

所以  $\lim_{x \rightarrow -8} \left[ \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} + (x+8) \sin \frac{2}{x+8} \right] = -2 + 0 = -2$ .

**例 8** 设  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2\sqrt{1+3x}}{x-1} = -\frac{1}{8}$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

**解** 因为  $x \rightarrow 1$  时,  $x-1$  是无穷小量, 又因为原式极限为  $-\frac{1}{8}$ , 故  $x \rightarrow 1$  时,  $f(x) - 2\sqrt{1+3x}$  也应为无穷小量, 即

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 2\sqrt{1+3x}] = 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4.$$

**例 9** 在图 1-3 所示的  $RC$  电路充电的过程中, 电容两端的电压  $u(t)$  与时间  $t$  的关系为

$$u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t \geq 0, E, R, C \text{ 为常数}),$$

在时间  $t \rightarrow +\infty$  时, 问电压的变化趋势.

**解** 因为当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow 0$ , 所以  $t \rightarrow +\infty$  时,  $1 - e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow 1$ , 即

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = E,$$

故在时间  $t \rightarrow +\infty$  时, 电压趋向于  $E$ , 如图 1-4 所示.

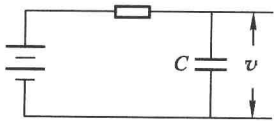


图 1-3

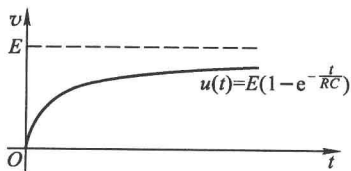


图 1-4

## (二) 练习题 1-2

### 1. 选择题

(1) 设  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{10+3x}}{x^2 - 4} = -\frac{1}{16}$ , 则  $f(x) = (\quad)$ .

A.  $x+1$

B.  $x+5$

C.  $\sqrt{x+14}$

D.  $\sqrt{x+6}$

(2) 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^k \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sin x^2} = 0$ , 则  $(\quad)$ .

A.  $k=2$

B.  $k \leq 2$

C.  $k \geq 2$

D.  $k > 2$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+a}{n+1} \right)^n = e^{-3}$ , 则  $a = (\quad)$ .

A. 2

B. -2

C. -3

D. 1

(4) 若  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x-1)\sqrt{x^2 + 1}}$  是无穷小量, 则  $(\quad)$ .

A.  $x \rightarrow 1$

B.  $x \rightarrow -1$

C.  $x \rightarrow 0$

D.  $x \rightarrow \infty$

### 2. 填空题

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \sin(n+2)}{7n^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(3)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + ax + 4}{x^2 - 1} = -\frac{3}{2}$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x \sin x \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

### 3. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{t-3}{t+2} \right)^{2t+1};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}];$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin x}{3x - \cos x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 5x}{\ln(1 + \sin 2x) e^x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}).$$

$$4. \text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \leq 1, \\ x, & 1 < x < 2, \\ 2x - 2, & x \geq 2, \end{cases} \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

## 1-3 函数的连续性

### (一) 例题

**例 1** 初等函数在其定义域上必连续, 是否正确?

**答** 不正确.

例如,  $f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$  是初等函数, 但该函数在定义域

$$D = \{x \mid x = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

上是离散点集. 事实上, 对于任何  $x_0 \in D$ ,  $x_0$  均为孤立点, 故  $x_0$  的邻域不存在, 因此不能讨论函数在  $x_0$  点的连续性, 即函数在  $D$  内处处不连续. 正确的说法是: 初等函数在其定义区间上连续.

**例 2** 设函数  $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{2}{x}} + 1, & x < 0, \\ \frac{a+x^2+x}{3+x}, & x \geq 0, \end{cases}$  试确定  $a$  的值, 使  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续.

**解** 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  和  $(0, +\infty)$  内均连续, 故只需  $f(x)$  在  $x=0$  处连续即可.

因为  $f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{\frac{2}{x}} + 1) = 1$ ,  $f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a+x^2+x}{3+x} = \frac{a}{3}$ , 及  $f(0+0) = f(0-0) =$

$f(0)$ , 所以  $\frac{a}{3} = 1$ , 即  $a = 3$ .

**例 3** 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1, \\ |x-1|, & |x| > 1 \end{cases}$  的连续性.

**解**  $f(x)$  可以改写成  $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < -1, \\ \cos \frac{\pi x}{2}, & -1 \leq x \leq 1, \\ x-1, & x > 1. \end{cases}$

$f(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 且在  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, +\infty)$  内均连续. 因为  $f(x)$  是分段函数, 所以要讨论函数在分段点  $x = \pm 1$  处的连续性.

因为  $f(-1-0) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (1-x) = 2$ ,  $f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \cos \frac{\pi x}{2} = 0$ , 所以函数在  $x = -1$  点的左、右极限都存在但是不相等, 即

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x),$$

所以  $x = -1$  是第一类跳跃间断点.

$$\text{又因为 } f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0, f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos \frac{\pi x}{2} = 0, f(1) = 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 0,$$

即  $f(x)$  在  $x=1$  连续.

**例 4** 求  $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$  的间断点, 并判断其属于哪种类型的间断点.

**解** 当  $1 - e^{\frac{x}{1-x}} = 0$ , 即  $x=0$  时,  $f(x)$  无意义; 又当  $1-x=0$ , 即  $x=1$  时,  $\frac{x}{1-x}$  无意义, 所以  $x=0$  和  $x=1$  为间断点.

因为  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{\frac{x}{1-x}}) = 1 - e^0 = 0$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = \infty,$$

故  $x=0$  是第二类无穷间断点.

又  $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{x}{1-x}} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{x}{1-x}} = +\infty$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 0,$$

故  $x=1$  为第一类跳跃间断点.

**例 5** 讨论函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$  的连续性, 并求出其间断点, 指出间断点的类型.

**解** 求解本题的关键是: 首先应当通过求极限找到函数  $f(x)$  的表达式, 然后判断间断点.

$$\text{当 } |x| > 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} \left( \frac{1}{x^{2n}} - 1 \right)}{x^{2n} \left( \frac{1}{x^{2n}} + 1 \right)} = -1;$$

$$\text{当 } |x| < 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} = 1;$$

$$\text{当 } |x| = 1 \text{ 时, } f(x) = 0,$$

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1 \end{cases} \quad (\text{如图 1-5}).$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1,$$

故  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  不存在, 所以  $x=1$  为跳跃间断点, 同理,  $x=-1$  也为跳跃间断点.

**例 6** 证明方程  $x = a \sin x + b$  至少有一个不超过  $a+b$  的正根 ( $a > 0, b > 0$ ).

**证明** 设  $F(x) = x - a \sin x - b$ , 则  $F(x)$  在  $[0, a+b]$  上连续, 且有

$$F(0) = -b < 0, F(a+b) = a+b - a \sin(a+b) - b = a[1 - \sin(a+b)] \geq 0,$$

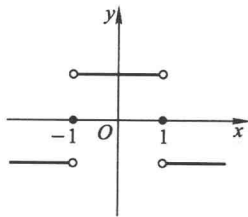


图 1-5