

中国博士后科学基金资助

图像压缩编码方法

◎ 罗强 著



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

中国博士后科学基金资助

图像压缩编码方法

罗 强 著



西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书专门论述小波编码和分形压缩算法及其涉及的图像信息处理理论和方法。全书首先讨论了小波分析的理论基础,重点介绍了小波变换处理信号理论、图像压缩基本概念、图像小波压缩特征等,还讨论了矢量量化方法、零树编码、基于图像压缩系统构造最优的双正交小波滤波器设计方法;讨论了分形理论在图像压缩方面的应用,包括一种几何形状比例可变的分形图像压缩编码方法、基于小波变换极大模和分形的混合编码方法;此外,还讨论了利用图像压缩去噪的方法。

本书专业适用性强、创新点明确、具有一定的学术价值。本书可作为信息工程、通信工程、计算机应用、信号处理等专业高年级本科生或研究生的教学用书,也可供上述领域的研究开发人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

图像压缩编码方法/罗强著. —西安:西安电子科技大学出版社, 2013. 2

ISBN 978 - 7 - 5606 - 2962 - 9

I. ①图… II. ①罗… III. ①图像处理—数据压缩—图像编码 IV. ①TN919.81

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 012415 号

策 划 张 媛

责任编辑 张 媛 陈 婷

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 西安文化彩印厂

版 次 2013年2月第1版 2013年2月第1次印刷

开 本 787毫米×960毫米 1/16 印 张 8.5

字 数 150千字

印 数 1~1000册

定 价 19.00元

ISBN 978 - 7 - 5606 - 2962 - 9/TN

XDUP 3254001 - 1

*** 如有印装问题可调换 ***

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

前 言

21 世纪信息系统必将以数字化、大信息处理量、交互化、高度融合化、多媒体化步入人类社会。由于需要使信息得到及时的利用,为国民经济和科学技术以及国防工业的发展服务,因此对信息数据的获取、处理、传输、传播和交换的需求越来越迫切,这使图像技术面临着一个巨大的市场需要,孕育着丰富的商业机会。图像压缩编码目前已经成为异常活跃的研究领域,吸引了越来越多研究工作者和企业家的兴趣。小波变换、分形和基于模型的编码方法等相继问世,新理论、新方法和新技术层出不穷,研究发展势头之猛,应用所及学科与领域之广泛,都是在图像处理学科的发展历史中前所未有的。

本书旨在介绍小波编码和分形压缩算法及其涉及的图像信息处理的基本理论、基本方法和最新进展。本书不是全面地介绍小波变换和分形理论,而是针对图像编码压缩的应用展开的,约占了全书 1/2 的内容。本书中的大部分内容是在作者近几年博士、博士后和工作中所从事的图像压缩研究和课题的基础上编写的,有一些自己独特的见解,具有较高的学术意义与应用价值。

本书共分七章,从小波编码、分形压缩算法以及其涉及的图像信息处理理论和方法的角度出发,重点介绍小波变换处理信号理论、图像压缩基本概念、图像小波压缩特征等,还讨论矢量量化方法、零树编码、基于图像压缩系统构造最优的双正交小波滤波器设计方法、一种几何形状比例可变的分形图像压缩编码方法、基于小波变换极大模和分形的混合编码方法等。此外,还讨论了利用图像压缩去噪的方法。

全书初稿承蒙空军工程大学防空防导学院童创明教授审阅,提出了许多宝贵的修改意见。作者借此机会对童教授多年来就学术研究和学术动向所提出的帮助和支持表示衷心的感谢。

在本书即将完成之际，作者衷心感谢对本书的写作给予各种鼓励、支持和帮助的空军工程大学防空防导学院电子科学与技术博士后流动站、雷达工程系和微波教研室的领导和同事们。

本书的出版得到了中国博士后科学基金的资助，谨致谢意。

由于作者学识有限以及篇幅的限制，书中难免有不妥和疏漏之处，敬请读者批评指正。

罗 强

2012年5月于西安

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 图像压缩编码技术的分类	2
1.3 静止图像的发展概况	4
1.4 图像质量的评估	6
第 2 章 小波理论及其应用	9
2.1 引言	9
2.2 小波变换	9
2.3 一种基于小波变换的卫星 SAR 海洋图像舰船目标检测方法	17
2.4 信号表示和信号恢复	23
2.5 小波变换在无线电引信中的应用	25
第 3 章 小波理论在图像编码中的应用	30
3.1 引言	30
3.2 图像的二维小波变换	30
3.3 小波分解的信号边界延拓	34
3.4 适合图像压缩的小波基的选择	38
第 4 章 全局最优码本的获取的研究	43
4.1 矢量量化的一般概念	43
4.2 经典算法 LBG	45
4.3 模糊矢量量化方法	46
4.4 初始码本的生成	48
4.5 实验模拟和分析	51
4.6 基于小波变换的矢量量化编码	52
第 5 章 分形图像编码	58
5.1 基本理论	58
5.2 分形图像压缩编码的研究发展	63
5.3 一种几何形状比例可变的分形图像压缩编码方法	69
5.4 一种基于局部极大模和分形的混合编码方法	75
第 6 章 分形编码提取图像边缘	84
6.1 引言	84



第 1 章

绪 论

❖ 1.1 引 言 ❖

随着微电子技术的迅速发展和计算机应用的日益普及,数字化产品席卷了各行各业,渗透到人们日常生活中,数字化技术的影响已经远远超越了其本身的含义。以计算机和通信技术为代表的数字化技术,成为人类认识世界、改造世界的强有力工具,将会深刻地改变人类的生活面貌,包括人们的生活节奏、文化结构、交流方式、社会分工乃至产业组合。数字化时代带来了一场巨大的变革:信息革命。尤其是 20 世纪 90 年代以后,计算机和手机等设备的性能更好、更强且价格锐减,国际互联网络兴旺发达,并逐渐走进人们的家庭,数字化社会开始形成,开启了一个崭新的时代。

信息作为数字时代的重要标志,它包括图像、声音和文字等信息。其中图像以信息量巨大而尤其显得重要,另一方面,它比其他形式的信息更具有直观性、确切性和生动性,因此,人们对图像的需求有显著增加。

人类获取信息的 80%来自眼睛,15%来自于声音,这说明图像是人们生活中信息交流最主要的载体,也是蕴涵信息最大的媒体。正因为这一点,图像给信息交流(传输)、信息存储带来了很大的困难。特别是数字化社会的今天和未来,这一问题尤其突出。数字图像属于数字化的信息,也具有数字化信息的如下特点:易交换,畅通无阻,无处不达;高容量,以惊人的传输速度满足人们的信息需求;高分辨率,信息质量优;高稳定性,传输途中不易受干扰,能够原原本本地还原它原来的真面目;等等,但数字图像存在一个最棘手的问题:因为其为数字化信息,具有庞大的数据量,所以给存储、传输及通信等实际应用带来了极大的不便及限制。因此,在许多应用场合,为了能够有效地存储和传输数据,一个不可避免的途径就是对图像编码压缩,用比原有图像少得多的数据将其表示出,以提高图像的存储率和传输效率,从而实现经济上或军事上的应用。



图像压缩编码的核心问题是如何对数字化的图像进行压缩,以获得最小的数据,同时尽可能保持图像的恢复质量。图像压缩可分为无损压缩编码和有损压缩编码两大类。无损压缩编码仅仅删除图像数据中的冗余信息,在解码时能精确地恢复原图像,是一个可逆过程;而有损压缩编码则反之。无损压缩编码可分为两大类:基于统计概率的方法和基于字典的技术。基于统计概率的方法是依据信息论的变长编码定理和信息熵的有关知识,用较短代码代表概率大的符号,用较长代码代表概率小的符号,从而实现数据压缩。无损压缩编码不能取得高的压缩比,这是因为它受到信息源本身的熵的限制,因此无损压缩编码又称为熵编码。为了进一步提高图像编码的压缩比,利用图像中像素之间的相关性,以及人的视觉对灰度灵敏度的差异进行编码,有损压缩编码便成为图像压缩编码的重要研究方向。常用的有损压缩编码方法分为四类:变换编码、预测编码、矢量编码和模型法。由于允许有一定的失真,因此有损压缩编码比无损压缩编码在压缩比倍数上高出许多,具有更大的压缩潜力,当前图像压缩编码的研究也主要集中在有损压缩编码上。在实际的图像压缩系统中,为了提高编码效率,都是将无损压缩编码和有损压缩编码有机地结合在一起使用的。

目前,高效率图像压缩技术已经在广播、可视电话、电视会议、遥感图像、高清晰度电视、综合业务数字网络、机器人视觉系统、图像数据库、无线电传真和数字录像等方面得到了广泛的应用。

❖ 1.2 图像压缩编码技术的分类 ❖

根据压缩图像的不同属性,图像压缩编码技术有不同的分类方法。若以光学特征来分,就有单色、彩色图像压缩编码;若以灰度等级来分,就有二值、多值和灰度图像编码;若以动静来分,就有静止、序列图像之分。总之,大体上可分为三类:二值图像编码、静止灰度图像编码、彩色和序列图像编码。二值图像编码比较简单,应用范围窄,编码技术日臻成熟,进一步发展的空间有限。序列图像编码一般都以静止图像编码为基础,加上运动估计和运动补偿等方法。虽然静止图像编码研究最早,经历了几十年的发展,进一步的研究日益艰难,但是目前新的思想仍然活跃,新的理论不断诞生,新方法也不断涌现。如1991年国际标准组织(ISO)下属的一个联合图形专家小组(Joint Photographic Experts Group)推出了静止图像编码的标准算法(简称JPEG),到了1998年,又推出了JPEG-2000。JPEG-2000推出的原因是静止图像压缩编码的研究得到了迅速的发展,JPEG落后于当前现状,制约了图像压缩编码的进一步发展和应用。与JPEG标准相比,JPEG-2000有了一个很大的飞跃,它有许多原先

的标准所不可比拟的优点。可见,静止图像压缩编码的研究一直是图像编码研究的重中之重。

根据编码技术的发展,图像压缩编码方法大体上可分为传统编码方法和新的图像压缩技术。

1. 传统编码方法

1) 预测编码

在预测编码方案中,图像被当成一个随机过程,即当成 Markov 模型。编码时通过已知像素的灰度值预测当前像素的灰度值,也就是通过预测消除相邻像素间的相关性,从而得到熵值比原图像小的预测误差,并达到压缩的目的。预测编码分为线性预测和非线性预测两类。线性预测编码按扫描顺序来进行预测,而非线性预测根据当前预测像素的周围位置像素进行预测。这些预测编码方法的优点是算法简单,易于硬件实现;其缺点是对信息噪声及误差很敏感,会产生误码扩散,压缩率低。预测编码一般很少独立使用,而要结合别的编码方法混合使用。

2) 熵编码

熵编码是纯粹基于信号统计特性的编码技术,它是一种无损编码方法,根据像素灰度值的出现概率大小进行编码。常用的熵编码方法有游长编码、Huffman 编码、算术编码和 Lempel - Ziv 字典编码。这种编码方法目前一般不单独使用,常常作最后一级编码使用,以进一步提高编码压缩率。

3) 传统的变换编码

变换编码是指通过正交变换将图像变为系数之间的相关性降低的一组变换系数。变换后的系数应满足:①所有的系数独立;②能量集中于少数几个系数上,保留少数重要的系数就可达到图像压缩的目的。常用的正交变换有 KL 变换、DFT 变换、WHT 变换和 DCT 变换。其中最有效的变换是 KL 变换,但是 KL 变换的计算复杂,不同的图像有不同的向量基,更不存在快速算法,只作理论分析。其他三种变换的向量基是固定的,都有快速算法。其中,只有 DCT 变换最接近 KL 变换,因此 DCT 变换在编码中应用最广泛,JPEG 算法就是以 DCT 变换为核心的算法。这些方法可以获得较高的压缩比和较好的恢复图像质量,一般在保证较清晰的恢复图像质量前提下压缩比都在 20 倍以下,但是,一旦超过此压缩比值,就会出现方块效应和振铃现象,使得恢复图像质量迅速恶化。

4) 矢量量化

矢量量化基于 Shannon 信息论的信源编码理论,通过对符号序列的编码可以获得高于对单个符号的编码效率,用输出图像矢量码本的索引号方式获得好



的压缩效果。该方法的更详细论述可见第 4 章。

2. 新的图像压缩技术

1) 基于模型的压缩技术

基于模型的压缩技术通过对编码内容按照计算机图形学的理论进行模型构建,而后在图像编码器中用图像分析法提取景物的参数,如形状参数、运动参数等,通过保存或传输这些参数实现图像压缩。

基于模型的压缩技术其典型例子是可视通信,由于与会人员事先都已确定,因此编码器只需发送与会人员的动作与位置参数。

2) 神经网络压缩技术

神经网络压缩技术从本质上讲仍是矢量量化编码,其码本是通过训练学习获得的,并且存在于神经网络中。由于神经网络的权值是通过学习而得到的,因此它仅适用于与训练样本同类的图像。采样的神经网络一般为 BP 网络或自组织映射网络。

3) 分形编码

分形编码的理论基础是迭代函数系统(IFS)理论、拼贴定理,编码是通过图像的各部分寻找分形仿射变换参数来实现的,具体思想和方法见第 5 章。

4) 小波编码

小波编码是指通过一定的滤波器对原图像进行滤波和亚抽样,得到一组组对应不同频带特性的系数,而后根据不同频带系数的特点以及各频带之间的关系进行量化和编码。子带编码与小波编码的出发点原本不同,但它们最终对图像的处理结果是相同的。另外,塔形编码也应归于此类。

❖ 1.3 静止图像的发展概况 ❖

图像压缩编码的理论和实验研究开始于 20 世纪 40 年代末。在图像编码中采用的是模拟形式的编码技术,都是以压缩技术传输信号,来减轻信号在通道中的拥挤情况。在 20 世纪 50 年代和 60 年代,由于当时数字信号处在启蒙阶段,仅对预测法进行了一些基础性的研究。

在 20 世纪 70 年代到 80 年代初的十多年里,由于计算机的出现和普及,图像压缩编码的研究得到了迅速的发展,人们开发出了各种编码技术,特别是 JPEG 图像压缩标准的核心算法——DCT 变换,是当时图像压缩编码的重要标志算法。这时压缩效果能达到比较高的水平。

20 世纪 80 年代以来,计算机技术开始飞跃发展,使得图像编码研究日益



活跃起来,通信事业的发展促使图像压缩的应用离我们越来越近了,尤其随着国际互联网络的普及,图像编码研究变为迫切需要。这时相关学科的迅速发展和新兴学科的不断涌现,为图像编码注入了新的活力和新的思想,新的火花和新的方法不断产生,人们对图像信息需求的剧增也有力地促进了图像压缩编码技术的突飞猛进。许多学者结合模式识别、计算机图形学、计算机视觉、神经网络、小波分析和分形几何学等理论为探索图像信号压缩编码开辟了新途径和方法;同时,关于人类的视觉生理、心理特性的研究成果也打开了人们的新视野,许多新型的图像压缩编码方法相继提出,如 M. Kunt 于 1988 年提出了利用人眼视觉特性的第二代图像编码技术,1988 年 M. Barnsley 提出了基于迭代函数系统(IFS, Iterated Function System)的分形图像编码技术,1989 年 S. Mallat、I. Daubeches 提出了小波理论并且将其应用于图像编码,20 世纪 90 年代初发展起了基于模型的图像编码方法和思想等。

1991 年,ISO 国际标准化组织根据当时的计算机技术发展水平和图像编码的发展情况,在综合评估多种图像算法的基础上,制定了静止图像的国际标准 JPEG。JPEG 标准算法的出现在全世界范围内得到了广泛的应用,极大地推动了图像存储、传输与通信等事业的蓬勃发展,并取得了显著的成果。JPEG 系统中的每一环节的制定都是建立在前人大量研究的基础上和比较成熟的技术上的,因此编码系统性能日益完善,对于大多数图像均能够获得较好的编码效果。然而,这并不是说图像压缩编码技术已发展到最高境地,可以从此止步了。JPEG 还存在着这样或那样的缺陷,主要表现在:压缩倍数较高时,在解码图像中会出现较明显的方块现象和振铃效应。

JPEG 编码标准的制定不仅没有束缚图像编码研究的前进脚步,反而大大促进了图像编码的发展速度。研究人员对传统的编码方法(如矢量量化编码和子带编码)进行继续研究,提出了许多改进的方法,同时,提出了一些更新颖的图像编码方法。例如,1992 年 A. E. Jacquin 提出了分形图像编码方法,1993 年 Shapir 提出了一种零树嵌入式的图像编码方法(Embedded Zerotree Wavelet),Said. A 和 Pearlman 在 1996 年提出了 SPIHT 算法,1997 年 Zixiang Xiong 等人提出了空间-频率量化方案等。在静止图像编码研究领域里,这些新的方法都依附于分形几何学或小波分析等新的理论和新的思想基础,是新型图像编码方法的典型代表,引起了人们足够的重视,促使图像编码研究得到了迅速发展,并取得了一些可喜的成果。

新出现的数学理论和技术,为探索图像编码的新途径奠定了理论基础和物质基础,新颖的图像压缩技术的问世,极大地丰富了图像编码的内容,为更好的、更新颖的图像编码标准的问世作好了理论和技术知识方面的准备。在此基



础上, 1998 年, 新的静止图像压缩编码标准 JPEG-2000 诞生了。与以往的标准相比, JPEG-2000 放弃了 JPEG 所采用的以 DCT 变换为主的分块编码, 而改为以小波变换为主的多分辨率编码方式, 具有许多 JPEG 所不可比拟的优点。

总的来说, 经过数十年的研究和探索, 人们在图像压缩编码方面已取得很大进展, 国际的静止图像压缩标准算法也不断更新, 已有的方法和思想不断丰富发展, 新的算法或理论不断涌现。无论目前还是将来, 研究新的、高质量的压缩编码技术, 并将其应用于低或极低比特率的情况, 仍将是图像压缩编码的前沿课题与研究方向。

❖ 1.4 图像质量的评估 ❖

在图像处理领域, 如何评价一幅经过处理的图像的质量好坏, 如何评估某个图像处理算法的优劣一直是人们关心的焦点。然而图像质量评价没有统一的测度, 图像压缩编码算法也不例外, 也没有严格评价其优劣的标准。对解压缩图像质量的客观评价是人们非常关心的问题。目前普遍采用基于最小均方误差准则的峰值信噪比 PSNR 作为衡量解压缩图像质量的指标。虽然 PSNR 意义明确、计算简单, 但是人眼接触的是解压缩后的图像, 而 PSNR 没有考虑人类的视觉感知特性。实际上, 衡量解压缩图像质量不仅要有客观评价, 而且要有符合人眼视觉特征的主观评价。

1. 客观评价

设原始的二维灰度图像 $A=f(i, j)(i=1, 2, \dots, N; J=1, 2, \dots, M)$, 解压缩后的图像数据 $A'=f'(i, j)(i=1, 2, \dots, N; J=1, 2, \dots, M)$, 用 PSNR 指标进行评价:

均方误差

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (f(i, j) - f'(i, j))^2 \quad (1-1)$$

峰值信噪比

$$PSNR = 10 \lg \frac{255^2}{MSE} \quad (\text{dB}) \quad (1-2)$$

十分明显, 以上评价完全取决于原始图像每个像素上灰度值与重构图像的误差。虽然在某些情况下信噪比不能完全反映人的视觉特性, 但是它毕竟是广泛使用的准则。这种评价在主观感觉上也有一定的参考意义。实际上, 常用的指标为 PSNR 超过 30 dB 时, 人的主观感觉很难找出其差异。

2. 主观评价

用平均判分(MOS, Mean Opinion Score)或多维记分等方法进行测试,即一群足够多的实验人员,通过观察来评定图像的质量。图像的主观质量就是以人作为图像的观察者,对图像的优劣做出的主观评价。主观评价大体上分为两种类型:绝对评价和相对评价。为了保证图像主观评价在统计上有意义,参加评分的观察者至少应有 10 名,并将观察者的平均判分(MOS)作为图像的评分。对图像质量进行主观评价时,作为主观评价的观察者,应考虑两类人:一类是未受过训练的“外行”观察者;另一类是训练有素的“内行”。表 1.1 列出了常用主观评价的评分尺度。这样的评分虽然很花时间,但比较符合实际。

表 1.1 主观评价的评分尺度

全优度尺度	评分	妨碍尺度
非常好的图像	5 分	丝毫看不出图像质量变坏
好的图像	4 分	能看出图像质量变化,但并不妨碍观看
中等的图像	3 分	能清楚地看出图像质量变坏,对观看稍有妨碍
差的图像	2 分	对观看有妨碍
非常差的图像	1 分	非常严重地妨碍观看

主观评价和客观评价之间有一定的联系,但不能完全等同。由于客观评价比较方便,很有说服力,故在以后讨论中常被采用。主观评价很直观,符合人眼的视觉效果,比较实际,但打分尺度很难把握,不可避免有人为因素。

参 考 文 献

- [1] Kenneth R C. Digital Image Processing. 北京:清华大学出版社,1998.
- [2] 吴乐南. 数据压缩的原理与应用. 北京:电子工业出版社,1994.
- [3] 高文. 多媒体数据压缩技术. 北京:电子工业出版社,1994.
- [4] 沈兰荪. 图像编码与异步传输. 北京:人民邮电出版社,1998.
- [5] 张霞,等. 矢量量化在图像压缩编码中的应用进展. 数据采集与处理, 1999, 14(1): 52-55.
- [6] 魏政刚, 袁杰辉, 蔡元龙. 一种基于视觉感知的图像质量评价方法. 电子学报, 1999, 27(4): 79-82.
- [7] 余英林, 田菁, 蔡志峰. 图像视觉感知信息的初步研究. 电子学报, 2001, 29(10): 1373-1375.



- [8] 杨福生. 小波变换的工程分析与应用. 北京: 科学出版社, 2001.
- [9] Daubechies I. Orthonormal Based of Compactly Supported Wavelets. Commun. Pure Appl. Math. , 1988, 41: 909 - 996.
- [10] Mallat S, Zhong S. Complete signal representation with multi-scale edge Models. Comput. Sci. Tech. Rep. 483, 1989, Dec. , New York Univ.
- [11] Mallat S. Multiresolution approximations and Wavelet Orthonormal $L^2(R)$. Bases of . TAMS, 1989, 31(5): 67 - 87.
- [12] Witten I H, Neal R M, Cleary J G. Arithmetic coding for data compression. Proc. of IEEE, 1987, 68(7): 520 - 540.
- [13] Mallat S. A theory for Multiresolution signal decomposition the wavelet representation. IEEE Trans. on Information Theory, 1989, 11(7): 674 - 693.

第2章

小波理论及其应用

❖ 2.1 引言 ❖

小波分析是自 20 世纪 80 年代以来迅速发展起来的一门新兴学科,是傅里叶分析和调和分析发展史上的一个里程碑。小波分析优于傅里叶分析的地方是:它具有良好的时频局部化特性,可以把每个信号表示为由一个或多个性质良好的信号(即小波)经过平移与伸缩得到的信号的叠加。正由于小波分析的平移与伸缩性可以展现信号在不同尺度上的时域和频域的特征,因此,它被人们赞誉为“数学显微镜”,并且广泛应用于信号处理的许多领域。

本章首先简要介绍小波变换的基本概念和思想,并提出一种基于小波变换的卫星 SAR 海洋图像舰船目标检测方法。多分辨率分析是小波理论的精粹之一,可在由粗到细不同的分辨率下提取信号特征,滤除噪声,保留信号,为舰船目标检测提供了新的思路。依据 SAR 图像海洋背景和舰船目标特点分析,本章提出的基于小波变换的卫星 SAR 海洋图像舰船目标检测方法经仿真分析表明,该方法实用且有效。其次,本章还分析基于小波变换模极大值的表示信号与恢复原理,并将其原理应用在无线电引信中。运用小波变换极大模方法,对无线电引信的信号处理,采用多尺度极大模去噪,提高无线电引信测量精度;提出了无线电引信发射脉冲宽度随机可变和发射脉冲幅度同时随机可变,而且发射时刻随机可变,以区别真假回波,根据同高度不同的回波的能量,辨别真假目标,采用这些措施,加强无线电引信的抗电子干扰能力。另外,运用小波变换极大模方法,对无线电引信现场数据进行压缩存储,存储数据恢复波形与原波形基本相吻合,保留了绝大部分有效信息。

❖ 2.2 小波变换 ❖

如果窗函数 $\varphi(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 满足“容许性”条件:



$$C_{\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2-1)$$

那么 φ 被称为一个“基小波”，式中 $\hat{\varphi}(\omega)$ 是 $\varphi(t)$ 的傅里叶变换。对 $\varphi(t)$ 进行伸缩和平移运算可得函数族 $\varphi_{a,b}(t)$ ：

$$\varphi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in R \quad a \neq 0 \quad (2-2)$$

则对函数 $f(t) \in L^2(R)$ 的小波变换可表示为

$$(W_{\varphi}f)(a, b) = \langle f(t), \varphi_{a,b}(t) \rangle = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (2-3)$$

a 的变化实际上起到一个调节 $\varphi_{a,b}(t)$ 的频率的作用。当 $\varphi(t)$ 满足容许性条件时，信号完全可以从其小波分解中得到重构。由 $(W_{\varphi}f)(a, b)$ 重构 $f(t)$ 的公式如下：

$$f(t) = \frac{1}{C_{\varphi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_{\varphi}f)(a, b) \varphi_{a,b}(t) \frac{da}{a^2} db \quad (2-4)$$

又由式(2-1)可知小波函数 $\varphi(t)$ 满足：

$$|\hat{\varphi}(0)| = 0 \quad (2-5)$$

故小波函数具有带通特性。

由式(2-2)可知，当 b 一定时，函数 $\varphi_{a,b}(t)$ 随着参数 a 的不同而具有不同的支集；当 a 一定时，小波函数族实际上是由一组具有相同类型（如带通特性），但具有不同支集，因而具有不同频率选择特性的函数组成的函数族。对信号作小波分解实际上相当于用同一组具有不同频率选择特性的带通滤波器对信号进行滤波。

假设窗函数 $\varphi(t)$ 的中心为 t^* ，半径为 Δ_{φ} ，即

$$t^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t |\varphi(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt} \quad (2-6)$$

$$\Delta_{\varphi} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)^2 |\varphi(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt} \quad (2-7)$$

那么，窗函数 $\varphi_{a,b}(t)$ 的中心则为 $b + at^*$ ，半径为 $a\Delta_{\varphi}$ 。因此，式(2-3)表示的连续小波变换给连续信号 $f(t)$ 在一个时间窗 $[b + at^* - a\Delta_{\varphi}, b + at^* + a\Delta_{\varphi}]$ 内的局部信息，对于小的 a 值变窄，而对于大的 a 值变宽。

另外，令 $\hat{\varphi}(\omega)$ 的中心为 ω^* ，半径为 $\Delta_{\hat{\varphi}}$ ，即

$$\omega^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega} \quad (2-8)$$

$$\Delta_{\hat{\varphi}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega^*)^2 |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega} \quad (2-9)$$

则 $\varphi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)$, $\hat{\varphi}_{a,b}(\omega) = |a|^{\frac{1}{2}} \hat{\varphi}(\omega) e^{-jb\omega}$ 。窗函数 $\hat{\varphi}_{a,b}(\omega)$ 的中心为 $\frac{\omega^*}{a}$, 而半径为 $\frac{\Delta_{\hat{\varphi}}}{a}$, 因此, 式(2-3)变为

$$\begin{aligned} (W_{\varphi}f)(a,b) &= \langle f(t), \varphi_{a,b}(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}(\omega), \hat{\varphi}_{a,b}(\omega) \rangle \\ &= \frac{|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int \hat{f}(\omega) e^{jb\omega} \overline{\hat{\varphi}(\omega)} d\omega \end{aligned} \quad (2-10)$$

$(W_{\varphi}f)(a,b)$ 还给出一个频率窗 $\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\varphi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\varphi}}\right]$ 内的局部信息, 这个频率窗的中心频率为 $\frac{\omega^*}{a}$, 带宽为 $\frac{2}{a}\Delta_{\hat{\varphi}}$ 。它的重要意义在于, 中心与带宽之比

$$\frac{\frac{\omega^*}{a}}{\frac{2}{a}\Delta_{\hat{\varphi}}} = \frac{\omega^*}{2\Delta_{\hat{\varphi}}} \quad (2-11)$$

为一常数, 它与中心频率的位置无关(也即与 Q 无关)。

这样, 就得到连续小波变换的一个时间-频率窗, 其笛卡积表示式为

$$[b + at^* - a\Delta_{\varphi}, b + at^* + a\Delta_{\varphi}] \times \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\varphi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a}\Delta_{\hat{\varphi}}\right]$$

可以得出

$$\Delta_{\varphi_{a,b}} \Delta_{\hat{\varphi}_{a,b}} = \Delta_{\varphi} \Delta_{\hat{\varphi}} \quad (2-12)$$

由此可得, 小波函数族中各小波函数确定的时频窗口面积与母小波相同, 但随参数 a 的不同, 时频窗口的形状各异。在连续小波变换时频窗中, $|a|$ 越大, 时频窗口的时宽越大, 而频宽越小, 时频窗口的中心向 $|\omega|$ 减小的方向移动。因此连续小波变换提供的局域化分析的精度是可变的。频率越高, 则频域分辨率越低, 时域分辨率越高, 反之对于信号的低频部分则频域分辨率越高, 时域分辨率越低。这种特性被称为小波变换的变焦特性, 它有利于通过小波变