青少年学科奥林匹克竞赛丛书

数学奥林匹克

初中二年级

江苏省中学生学科奥林匹克竞赛委员会组织编写

主　编　单　墫

副主编　崔恒兵

南京大学出版社

青少年学科奥林匹克竞赛丛书
江苏省中学生学科奥林匹克竞赛委员会组织编写

数 学 奥 林 匹 克

初中二年级

本册主编　金宝珠
编　　写　陆友庆

南 京 大 学 出 版 社

丛 书 名　青少年学科奥林匹克竞赛丛书
书　　名　数学奥林匹克——初中二年级
本册主编　金宝珠　编写　陆友庆
责任编辑　李曾沛
装帧设计　杨小民
责任校对　任　民
出版发行　南京大学出版社
(南京市汉口路 22 号南京大学校内,邮政编码:210093)
印　　刷　江苏丹徒印刷厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　850×1168　1/32　印张 7.125　字数 183 千
印　　次　1999 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价　9.00 元
ISBN　7-305-03412-6/O·228

序

义务教育，不仅应面向全体学生，使每一个少年儿童都得到正常的教育，而且更应当使每一个学生都得到充分的教育。这就是说，不同的学生应当得到不同的教育，得到不同的发展，例如体育，不仅要使每一个学生都有健康的体魄，而且应当让他们根据自己的兴趣、爱好，在不同的项目（如球类、田径、游泳、体操等）上得到不同的发展。

很多少年儿童喜爱数学，希望能在数学方面得到较大的发展，因此，作为课外活动的数学兴趣学校就应运而生。

这种学校以增强兴趣，拓宽眼界，培养能力，开发智慧为宗旨，以自愿参加为原则，不需要专项的教育经费，深受各界人士欢迎，学生踊跃参加，社会效益极好。

这样的学校，当然应该有一套合适的教材，供教师、学生、家长使用。

江苏省科技协会为指导数学等学科的竞赛活动，组织编写了这样一套丛书，提供给兴趣学校作为教材，它有以下特点：

1. 以增强兴趣，拓宽眼界，培养能力，开发智慧为宗旨。

2. 与九年制义务教育的数学课本基本同步，知识点不作超前的要求。

3. 每一讲内容由浅入深，可供 100 分钟（两节课）的讲解，便于教师使用。

4. 每一讲均有习题，供学生巩固、复习所学内容。

5. 习题均有详细解答，可供教师及有条件的家长辅导。

参与编写本书的，大多是南京师范大学数学系在数学兴趣学校任课的教师，不少讲的内容就是由授课时的讲义整理而成，非常

实用。

南京大学出版社出版这一套丛书，对于各地开展学科竞赛与课外活动，做了一件大为有益的事。

单 墫

目　　录

第一讲　因式分解(一)

整式的因式分解是中学数学最重要的一种恒等变形,它的用途比较广,是解决许多数学问题的重要工具.因式分解题型变化多,方法灵活,技巧性强.所以,学习时,必须熟练掌握因式分解的基本方法,熟悉分解因式的技巧,灵活地综合运用各种方法来分解因式.

因式分解是把一个多项式化成几个整式的积的形式,它是整式乘法的逆变形.

这一讲就因式分解的常用方法、技巧的应用作一些介绍.

一、因式分解的常用方法

1. 提取公因式法

$$am+bm+cm=m(a+b+c)$$

2. 运用公式法

常用的因式分解公式有:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b) \tag{1}$$

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \tag{2}$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \tag{3}$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \tag{4}$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \tag{5}$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3 \tag{6}$$

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3 \tag{7}$$

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2 \tag{8}$$

运用以上公式时,要注意掌握各公式的特点,从整体上把握要分解的式子的结构,正确选用公式.

3. 十字相乘法

(1) $x^2+(a+b)x+ab$
$\quad =(x+a)(x+b)$

$$\begin{array}{cc} x & a \\ & \times \\ x & b \end{array}$$

(2) $acx^2+(ad+bc)x+bd$
$\quad =(ax+b)(cx+d)$

$$\begin{array}{cc} ax & b \\ & \times \\ cx & d \end{array}$$

4. 分组分解法

对于一些复杂的多项式进行因式分解时,若以上三种方法都不能直接应用,则需要通过观察式中的特点,经过适当分组后,转化为可用提公因式法,或运用公式法,或十字相乘法来进行分解. 分组分解无固定的形式,方法很灵活,在解题时往往还需要进行多次尝试后才能找到解决问题的正确途径.

二、例题选讲

在有理数范围内分解因式.

例 1 分解因式$2x^{3n-1}+8x^{2n-1}y^n+8x^{n-1}y^{2n}$.

分析 原式中各项都含有字母 x,可用提公因式法. 先考虑系数部分,各项系数的最大公约数是 2,其次考虑字母因式部分,字母 x 的指数 $3n-1>2n-1>n-1$,故提取 x 的最低次幂 x^{n-1},因此原式的公因式是 $2x^{n-1}$.

解 原式$=2x^{n-1}(x^{2n}+4x^ny^n+4y^{2n})$
$\quad =2x^{n-1}(x^n+2y^n)^2$.

注意:提公因式后,要观察多项式因式能否继续分解. 分解因式必须进行到每一个多项式因式都不能分解为止.

例 2 分解因式$9x^2(x-2y)-x(2y-x)^2$.

分析 因为$(2y-x)^2=(x-2y)^2$,原多项式的公因式是 $x(x-2y)$.

解 原式$=9x^2(x-2y)-x(x-2y)^2$
$\quad =x(x-2y)[9x-(x-2y)]$
$\quad =2x(x-2y)(4x+y)$.

例 3 分解因式$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$.

分析 从原式看不出有公因式,展开后再分解则项数多且较繁.把$(x+y)(y+z)(z+x)$进行适当变形后,易观察出解题方法.

解
$$\begin{aligned}原式&=(x+y)(yz+xy+z^2+xz)+xyz\\&=(x+y)(yz+xy+xz)+(x+y)z^2+xyz\\&=(x+y)(yz+xy+xz)+z(yz+xy+xz)\\&=(yz+xy+xz)(x+y+z).\end{aligned}$$

例 4 分解因式$(a^2+9b^2)^2-36a^2b^2$.

分析 原式符合平方差公式特点,可用公式法分解.

解
$$\begin{aligned}原式&=(a^2+6ab+9b^2)(a^2-6ab+9b^2)\\&=(a+3b)^2(a-3b)^2.\end{aligned}$$

说明:用平方差公式分解后,如每一个多项式因式又符合完全平方公式,要继续分解.

例 5 分解因式$27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$.

分析 本题有四项,符合公式(7)的特点,用公式法分解.

解
$$\begin{aligned}原式&=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot(2y)+3\cdot(3x)\cdot(2y)^2-(2y)^3\\&=(3x-2y)^3.\end{aligned}$$

例 6 分解因式 $x^4-2x^2+x^3-x+1$.

分析 本题无公因式,且不能用公式分解.易观察到,第一、二、五三项可分在一组,分解为$(x^2-1)^2$,三、四两项分在一组,可分解为 $x(x^2-1)$,两组之间有公因式 x^2-1,于是本题可用分组分解法分解.

解
$$\begin{aligned}原式&=(x^4-2x^2+1)+(x^3-x)\\&=(x^2-1)^2+x(x^2-1)\\&=(x^2-1)(x^2+x-1)\\&=(x+1)(x-1)(x^2+x-1).\end{aligned}$$

例 7 分解因式 a^4-4a^2-4a-1.

分析 观察其特点,用分组分解法,把二、三、四三项分在一

组，则两组之间可用公式法分解.

解 原式 $= a^4-(4a^2+4a+1)$

$$
\begin{aligned}
&= a^4-(2a+1)^2\\
&= (a^2+2a+1)(a^2-2a-1)\\
&= (a+1)^2(a^2-2a-1).
\end{aligned}
$$

说明：分组的方法不是唯一的，分组是否合适，关键是要看分组后各组之间能否运用前三种方法分解，即分组后要预见到下一步分解的可能性，分组才有效.

此题还可以一、四两项和二、三两项分别在一组，则两组之间有公因式可提. 但没有上述解法简便，读者可自行试一试.

例 8 分解因式 $2a^2-3ab-2b^2+5a+5b-3$.

分析 把字母 b 看作是常数，经分组后，原式可以看作是字母 a 的二次三项式，用十字相乘法分解.

解法 1 原式 $=2a^2+(5-3b)a-(2b^2-5b+3)$

$$
\begin{aligned}
&=2a^2+(5-3b)a-(b-1)(2b-3)\\
&=(a-2b+3)(2a+b-1).
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{ccc} b & & -1 \\ & \times & \\ 2b & & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a & & -(2b-3) \\ & \times & \\ 2a & & b-1 \end{array}$$

解法2 原式前三项可用十字相乘法进行部分分解. 于是将原式分为三组，继续用十字相乘法分解.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (2a^2-3ab-2b^2)+(5a+5b)-3\\
&=(a-2b)(2a+b)+(5a+5b)-3\\
&=(a-2b+3)(2a+b-1).
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{ccc} a & & -2b \\ & \times & \\ 2a & & b \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a-2b & & 3 \\ & \times & \\ 2a+b & & -1 \end{array}$$

以上解法，实际是两次实施十字相乘法，如果把这两个步骤合并成一个步骤，就是“双十字相乘法”.

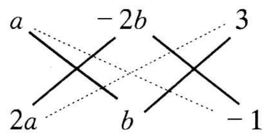
双十字相乘法的一般步骤是：

(1) 将多项式中的二次项用十字相乘法分解，得一个十字相乘图.

$$\begin{array}{ccc} a & & -2b \\ & \times & \\ 2a & & b \end{array}$$

(2) 把常数项分解成两个因式，放在第一个十字相乘图的右边，且使这两个因式在十字交叉中交叉的积的和等于原式中含 b

的一次项,同时必须与第一个十字中左端的因式交叉之积的和等于含 a 的一次项,如下图所示:



原式 $=(a-2b+3)(2a+b-1)$.

例 9 分解因式 $a^2+(a+1)^2+(a^2+a)^2$.

分析 此题不能直接分解,把第二项乘开后重新分组,可用公式法分解.

解 原式 $=a^2+a^2+2a+1+(a^2+a)^2$

$$=(a^2+a)^2+2(a^2+a)+1$$

$$=(a^2+a+1)^2.$$

例 10 分解因式 $(x^2+1)^2-x^2+x(x-2)(x^2+x+1)$.

分析 此题前两项可用平方差公式分解,分解后其中一个因式是 x^2+x+1,则两组之间有公因式可以提取.

解法 1 原式 $=(x^2+x+1)(x^2-x+1)+x(x-2)(x^2+x+1)$

$$=(x^2+x+1)(2x^2-3x+1)$$

$$=(x^2+x+1)(x-1)(2x-1).$$

解法 2 此题也可展开后重新分组分解.

原式 $=x^4+2x^2+1-x^2+x^4-x^3-x^2-2x$

$$=2x^4-x^3-2x+1$$

$$=2x(x^3-1)-(x^3-1)$$

$$=(x^3-1)(2x-1)$$

$$=(x-1)(x^2+x+1)(2x-1).$$

例 11 分解因式 $a^3+b^3+c^3-3abc$.

分析 本题从整体上看没有公因式,也不好直接用公式分解,但前两项可用公式:$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[(a+b)^2-3ab]=(a+b)^3-3ab(a+b)$,再分组分解.

解 原式$=(a+b)(a^2-ab+b^2)+c^3-3abc$

$$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$$

$$=(a+b+c)[(a+b)^2-c(a+b)+c^2]$$

$$-3ab(a+b+c).$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

本题的结果要熟记,可作为公式直接分解因式.

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \quad (9)$$

当 $a+b+c=0$ 时,有 $a^3+b^3+c^3=3abc$ (10)

例 12 分解因式$8a^3+27b^3-c^3+18abc$.

分析与解 本题符合公式(9)的特点,可用公式(9)分解.

原式$=(2a)^3+(3b)^3+(-c)^3-3\cdot(2a)\cdot(3b)\cdot(-c)$

$$=(2a+3b-c)(4a^2+9b^2+c^2-6ab+3bc+2ca).$$

例 13 分解因式$(ax-by)^3+(by-cz)^3-(ax-cz)^3$.

分析与解 原式$=(ax-by)^3+(by-cz)^3+(cz-ax)^3$

因为 $ax-by+by-cz+cz-ax=0$,故本题符合公式(10)的特点,用公式(10)分解.所以

原式$=3(ax-by)(by-cz)(cz-ax)$.

习 题 一

1. 在有理数范围内分解因式

(1) $(ab+1)^2-(a+b)^2$;

(2) $x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7$;

(3) $a^2b-ab^2+a^2c-ac^2-2abc+bc^2+b^2c$;

(4) $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)-144$;

(5) $(ab+1)(a+1)(b+1)+ab$;

(6) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$.

2. 求证 $81^7-27^9-9^{13}$能被 45 整除.

3. 证明$\underbrace{111\cdots1}_{2n个}-\underbrace{222\cdots2}_{n个}$是一个完全平方数.

习 题 一 解 答

1. (1) $\quad(ab+1)^2-(a+b)^2$

$=(ab+1+a+b)(ab+1-a-b)$

$=(a+1)(b+1)(a-1)(b-1)$.

(2) 原式$=(x+4y)(x-2y)+(-6x+18y)-7$

$=(x+4y-7)(x-2y+1)$.

$$\begin{array}{ccc} x+4y & & -7 \\ & \times & \\ x-2y & & 1 \end{array}$$

(3) 原式$=(a^2b-2abc+bc^2)+(a^2c-ac^2)-(ab^2-b^2c)$

$=b(a-c)^2+ac(a-c)-b^2(a-c)$

$=(a-c)(ab-bc+ac-b^2)$

$=(a-c)(a-b)(b+c)$.

(4) 原式$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)-144$

$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)-120$

$=(x^2+x-20)(x^2+x+6)$

$=(x+5)(x-4)(x^2+x+6)$.

(5) 原式$=(ab+1)(ab+a+b+1)+ab$

$=(ab+1)(ab+b+1)+(ab+1)a+ab$

$=(ab+1)(ab+b+1)+a(ab+b+1)$

$=(ab+b+1)(ab+a+1)$.

(6) $\because (b-c)+(c-a)+(a-b)=0$

$\therefore$ 原式$=3(b-c)(c-a)(a-b)$.

2. 原式$=9^{14}-9^{13}\times3-9^{13}$

$=9^{13}(9-3-1)$

$$=9^{13}\times 5$$
$$=9^{12}\times 45$$

故原式能被 45 整除.

3. 证法 1：

$$\underbrace{111\cdots1}_{2n个}-\underbrace{222\cdots2}_{n个}$$
$$=\underbrace{111\cdots1}_{n个}\times 10^n+\underbrace{111\cdots1}_{n个}-\underbrace{222\cdots2}_{n个}$$
$$=\underbrace{111\cdots1}_{n个}\times 10^n-\underbrace{111\cdots1}_{n个}$$
$$=\underbrace{111\cdots1}_{n个}(10^n-1)$$
$$=\underbrace{111\cdots1}_{n个}\times\underbrace{999\cdots9}_{n个}$$
$$=(\underbrace{111\cdots1}_{n个}\times 3)^2$$
$$=(\underbrace{333\cdots3}_{n个})^2$$

即原式是一个完全平方数.

证法 2：由于 $\underbrace{111\cdots1}_{2n}=\frac{1}{9}(10^{2n}-1)$

$$\underbrace{111\cdots1}_{n个}=\frac{1}{9}(10^n-1)$$

故:原式 $=\frac{1}{9}(10^{2n}-1)-\frac{2}{9}(10^n-1)$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n}-2\times 10^n+1)$$
$$=\frac{1}{9}(10^n-1)^2$$
$$=(\frac{10^n-1}{3})^2$$
$$=(\underbrace{333\cdots3}_{n个})^2$$

第二讲 因式分解(二)

在学习了因式分解的基本方法提取公因式法、运用公式法、十字相乘法和分组分解法后，以这几种方法为基础，再介绍几种特殊的因式分解的方法.

本讲的因式分解指有理数范围内的分解.

1. 换元法

换元法是把一个比较复杂的数学式子的某一部分看成是一个整体，用另一个字母去代替这一部分，使原式变成含新“元”的较简便的式子，然后对新的式子按要求进行变形，最后再将新元所代替的式子代回去，使问题得以解决.

在因式分解时，运用换元法可将某些形式较复杂的多项式化为简单的多项式，从而易于观察出其特点，找出解题方法.

例 1 分解因式$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)-144$.

分析 若将原式展开是一个 x 的四次多项式，不易观察出分解方法. 注意到$(x-3)(x+4)$与$(x-1)(x+2)$的两个积中含有相同代数式 x^2+x，令 $x^2+x=y$，则原式可化为含 y 的二次三项式，便于分解.

解法 1 原式$=(x^2+x-12)(x^2+x-2)-144$

设 $x^2+x=y$，则

$$\begin{aligned}原式&=(y-12)(y-2)-144\\&=y^2-14y-120\\&=(y-20)(y+6)\\&=(x^2+x-20)(x^2+x+6)\\&=(x+5)(x-4)(x^2+x+6).\end{aligned}$$