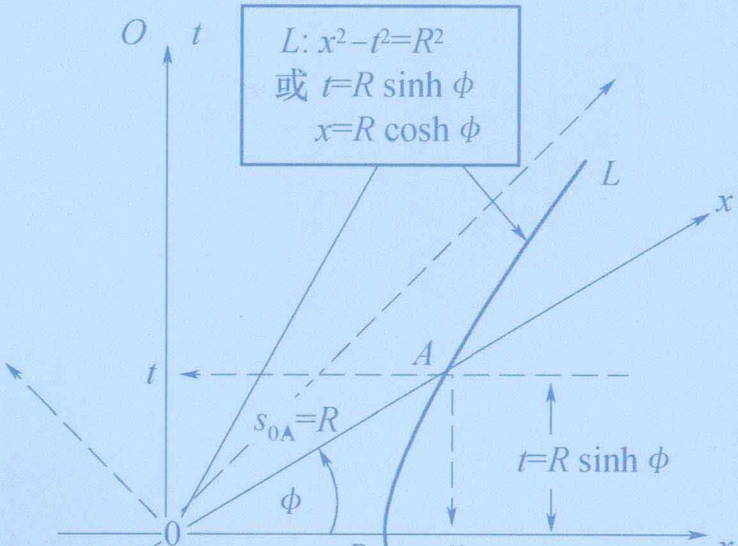
闵氏几何与狭义相对论

黄献民 著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

闵氏几何与狭义相对论

黄献民　著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

用闵可夫斯基时空几何图为工具，论述了狭义相对论的原理、运动学效应和时空观。作为一个独立的研究成果，给出了直接用“光格面积”度量基本几何元素——直线或曲线的方法，在欧氏纸面上严格地构造出二维闵氏时空平面。介绍了双曲函数和虚角三角函数在闵氏几何下的应用，通过单位双曲线的弧长定义了旋转变换的旋转角，并在闵氏几何时空背景下，对一些涉及加速的问题作了详细讨论。

本书视角独特，方法新颖，可作为相对论教学的参考读物。由于涉及的数学很浅显，也可作为物理爱好者学习狭义相对论的普及读物。

图书在版编目(CIP)数据

闵氏几何与狭义相对论/黄献民著．—北京：国防工业出版社，2013.6

ISBN 978-7-118-08779-6

Ⅰ.①闵… Ⅱ.①黄… Ⅲ.①多维空间几何②狭义相对论 Ⅳ.①O184②O412.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 131528 号

※

国防工業出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京嘉恒彩色印刷责任有限公司

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 7¾ 字数 125 千字

2013 年 6 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 36.00 元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店：(010)88540777 发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755 发行业务：(010)88540717

前　言

狭义相对论下时空变换的数学解析基础，是洛伦兹变换以及闵可夫斯基提出的时空间隔。引入时空间隔的概念，使得狭义相对论可以用几何工具来诠释。狭义相对论下的时空几何称为闵氏几何，或闵氏时空。

本书以闵氏几何为工具，用时空图的形式深入浅出、简明直观地论述狭义相对论涉及的各种理论问题。

闵氏几何是非欧几何，如何在欧氏的纸面上严格地给出闵可夫斯基时空图，是本书试图解决的问题。笔者在这方面进行了深入的探索和尝试。

第一章介绍了闵氏几何的基础知识，重点是解决了用光信号标度时空坐标，使得时空图这种几何工具不但能定性而且能定量解释狭义相对论的各种理论问题。第二章用时空图直观且定量地讨论了狭义相对论得出的各种运动学效应，例如同时的相对性、尺缩钟缓等问题。

第三章给出了笔者的一个研究成果，不借助参考系在二维时空上用光格解决了时空间隔的度量问题，使得在欧氏纸面上对闵氏几何的基本几何元素——直线，有了严格的度量依据。这一结果对于理解闵氏几何的数理逻辑会有很大的启发和帮助，并使得欧氏的纸面能严格地当作二维闵氏几何时空平面来使用。

第四章与第五章进一步讨论了洛伦兹变换的几何关系。通过单位双曲线的弧长定义了旋转角，对旋转变换进行了严格的讨论，介绍了双曲函数和虚角三角函数在闵氏几何下的应用。

学术界对狭义相对论与广义相对论的划分有一个标准：按照时空背景分类。凡是时空背景是闵氏的，可以归结为狭义相对论的范畴。依据这一思想，在狭义相对论的框架下，第六章借助时空图讨论了闵氏时空背景下涉及的加速问题，解释了包括爱因斯坦转盘、Sagnac 效应、双生子效应、贝尔飞船等问题。其中最后一节，讨论了飞船内的时空问题，得出了红移、视界等简单的一般归结为广义相对论的一些

基本结论。

由于本人学识有限，而且以这样的方式来论述狭义相对论的数理逻辑很少有可以参考的文献，因此书中的观点难免有不成熟之处，真诚地欢迎读者给予批评。

本书可以作为相对论教与学的参考读物。由于书中涉及的数学知识比较浅显，一般有简单微积分知识就可以读懂绝大多数章节，所以也可以作为物理爱好者学习相对论的普及读物。

张轩中先生和台湾 pipi（百度注册名）阅读了部分书稿，指出了一些错误，对某些章节提出了修改意见，笔者对此表示衷心的感谢。

书稿形成过程中，从初期的思考，到写成初稿，其主要内容都以不同形式在百度相对论吧陆续贴出过，与吧友之间有过请教和反复的讨论，既得到过肯定也得到过批评。没有这种讨论、鼓励和批评就没有现在的这个书稿。笔者对相对论吧的众吧友由衷地表示谢意。

黄献民 2012 年 10 月

huangxm2000@sina.com

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第一章　闵氏时空几何基础

1.1　闵氏时空几何的解析基础

狭义相对论理论所依据的数理逻辑是在相对性原理和光速不变原理下推导出的惯性系之间的时空变换——洛伦兹变换，以及时空间隔的定义。洛伦兹变换和时空间隔概念是闵式时空几何的解析依据。

假定 $O(t,x,y,z)$ 和 $O'(t',x',y',z')$ 是两个相对有匀速运动的惯性参考系，两个惯性系之间的时空变换就是洛伦兹变换，这个变换的一般形式为

$$x' = \gamma(x - ut), t' = \gamma(t - ux/c^2), y' = y, z' = z$$

其中：$\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$；$u$ 为两个参考系之间的相对速度，O'沿 x 的正方向运动，速度为 u，或者 O 沿 x'的反方向运动，速度为 $-u$。

在这个假定下，一般只关心(t,x)和(t',x')之间的变换。本书主要是讨论二维时空下的几何问题，所以一般不涉及空间的其他两个维。二维时空洛伦兹变换的基本形式为

$$x' = \gamma(x - ut) \tag{1.1.1}$$

$$t' = \gamma(t - ux/c^2) \tag{1.1.2}$$

将 u 用 $-u$ 代替得到反变换

$$x = \gamma(x' + ut') \tag{1.1.3}$$

$$t = \gamma(t' + ux'/c^2) \tag{1.1.4}$$

狭义相对论的一个重要概念是时空间隔，这个概念是爱因斯坦的老师闵可夫斯基引入的。为引入这个概念，需要将时间项 t 用 ct 来表示。对于式(1.1.1)，其中 ut 项可以写成$(u/c)ct$；将式(1.1.2)两边同乘 c，并令 $v = u/c$，于是洛伦兹变换可以写为

$$x' = \gamma(x - vct) \tag{1.1.5}$$

$$ct' = \gamma(ct - vx) \tag{1.1.6}$$

反变换为

$$x = \gamma(x' + vct') \tag{1.1.7}$$

$$ct = \gamma(ct' + vx') \tag{1.1.8}$$

其中：$v = u/c$；$\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$；c 为光速，是一常数。这里将表示时间的项 ct 或 ct' 当作一个整体来看待，使得时间项 ct 与空间项 x 都有了相同的量纲。

洛伦兹变换写成这种形式，使得空间坐标与时间坐标有了相同的量纲，其几何意义在于，在时空坐标架构下，二维时空上的基本几何元素——直线或曲线，可以如同二维空间平面一样来度量。即曲线或直线可以用其时间坐标项 ct 和空间坐标 x 的组合来度量，进而可以引入时空间隔的概念。这是狭义相对论下的时空理论问题能够几何化的关键一步。

由于 c 是常数，闵氏几何采用 $c=1$ 的单位制，有教材称这种单位制为几何单位制。

于是洛伦兹变换在 $c=1$ 单位下可以写成以下形式

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{1.1.9}$$

$$t' = \gamma(t - vx) \tag{1.1.10}$$

反变换为

$$x = \gamma(x' + vt) \tag{1.1.11}$$

$$t = \gamma(t' + vx') \tag{1.1.12}$$

其中：$v = u/c$；v 为相对光速的相对值，没有单位；$\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$。

采用 $c=1$ 几何单位制，不但简洁，而且空间坐标的变换和时间坐标的变换看上去完全对称。使用几何单位制，尽管 t 不再写为 ct，但还是应该认为那个 t 就是 ct，只是由于 $c=1$，c 不必写出来而已。或者也可以认为 t 和 x 都是纯数，所以它们之间可以用任意运算符号连接起来，例如 $t \pm x$ 这个式子是有意义的。若考虑量纲则是长度的量纲，实际上是 $ct \pm x$。

$c=1$ 几何单位制下，若 t 的单位是秒，则 x 的单位就是秒光程，即 300000km；若 t 的单位是年，则 x 的单位就是光年。

洛伦兹变换还可以写为复数的形式，这种形式也是闵可夫斯基引入时空间隔概念后出现的一种形式。它是时空变换几何化的一个必不可少的形式，它会使得相对论的时空在几何化时更严格，这在以后的章节会有详细的讨论。

复数形式时空坐标是 x 和 ict。对于式(1.1.9)，vt 项，恒等变换用 $-ivit$ 代替，

对式(1.1.10),两边同乘 i,于是得到 $c=1$ 洛伦兹变换的复数形式

$$x' = \gamma(x + \mathrm{i}v\mathrm{i}t) \tag{1.1.13}$$

$$\mathrm{i}t' = \gamma(\mathrm{i}t - \mathrm{i}vx) \tag{1.1.14}$$

反变换为

$$x = \gamma(x' - \mathrm{i}v\mathrm{i}t') \tag{1.1.15}$$

$$\mathrm{i}t = \gamma(\mathrm{i}t' + \mathrm{i}vx') \tag{1.1.16}$$

其中:$\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$;v 为相对光速的相对值。

这里 $\mathrm{i}t$ 要看作是一个整体,为时间坐标项,当然,实际上 $\mathrm{i}t$ 是 $\mathrm{i}ct$。

洛伦兹变换还可以写成实参数双曲函数形式,或虚参数三角函数的形式,这两种形式将在第五章详细讨论。

在洛伦兹变换中引入 ct 或复数形式 $\mathrm{i}ct$,是为引入时空间隔的概念,时空间隔用符号 s^2 来定义,在四维时空下时空间隔的数学表达式为

$$s^2 = (\Delta \mathrm{i}ct)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \tag{1.1.17}$$

若只考虑二维时空,时空间隔的数学表达为

$$s^2 = (\Delta \mathrm{i}ct)^2 + (\Delta x)^2 \tag{1.1.18}$$

采用 $c=1$ 几何单位制则写成

$$s^2 = (\Delta \mathrm{i}t)^2 + (\Delta x)^2 \tag{1.1.19}$$

欧氏几何的勾股定理为:$L^2 = (\Delta y)^2 + (\Delta x)^2$,$\Delta x$ 和 Δy 是欧氏空间任意两点在二维空间(x,y)的坐标差,根据此式可以计算空间任意两点之间的距离 L,或者说根据此式可以度量任意线段的长度。

狭义相对论下的闵氏时空几何,$s^2 = (\Delta \mathrm{i}t)^2 + (\Delta x)^2$ 的作用相当于闵氏几何的勾股定理,s^2 被称为时空间隔。若不用虚数,时空间隔也写成常用的形式

$$s^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \tag{1.1.20}$$

只考虑二维时空,时空间隔的表达式为

$$s^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 \tag{1.1.21}$$

时空间隔和洛伦兹变换是狭义相对论下闵氏时空几何的数学解析的基础,时空间隔概念重要的意义在于,时空坐标下的曲线(包括直线)有了度量的依据。

s^2 已经被定义为时空间隔。

本书将 $s=\sqrt{s^2}$ 称为时空间隔线长,或简称线长。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

有了这个概念，在闵氏时空下的曲线或直线就是用 s 度量。

1.2 时空参考系——时间轴和空间轴是正交的

二维时空参考系由时间坐标和空间坐标组成，按照习惯时间的正方向是向上的，空间的正方向是向右的。时空参考系的坐标 x 和 t 是正交的，一般将 x 轴和 t 轴画作是欧氏几何的垂直关系（以下涉及垂直或视觉垂直的说法是指欧氏几何下的垂直关系），如图 1.2.1 左侧的画法。狭义相对论下的时空几何，或称闵氏几何是非欧的，有教材将闵氏几何称为伪欧几何或赝欧几何。

如果将 x 和 t 轴的关系不画成是垂直的关系是不是也能表示正交的坐标参考系呢？这样做是可以的。例如，图 1.2.1 右侧的参考系的时空坐标轴就不是垂直的关系。但是在规定了时空几何上的点（事件）在坐标轴上的映射关系后，并不垂直的时空坐标仍然是正交的，仍然能够准确地描述时空的几何元素，例如点或者线。

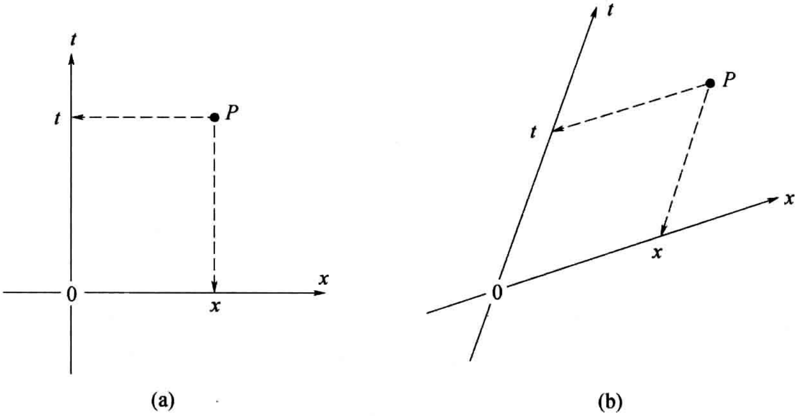


图 1.2.1

闵氏几何下，几何意义上的点，称为事件，时空是事件的集合。图 1.2.1 给出的两个时空坐标系的画法，事件 P 取得坐标的映射，是平行线映射法。

任意事件 P 的 x 坐标是过此事件平行于 t 轴的直线在 x 轴上的交点；任意事件 P 的 t 坐标是过此事件平行于 x 轴的直线在 t 轴上的交点。

这种映射下，两个参考系的时间轴与空间轴之间无论是不是垂直的，都是正

交的。可以这样理解右侧的时空坐标轴之间的关系:时间轴和空间轴是“垂直”的,只是由于视角的关系看起来它们不再“垂直”了,或者不如说它们之间是正交的。

1.3 时空图上的点和线——事件和世界线

闵氏几何时空图上基本几何元素也是点和线。

时空图上时空坐标由空间坐标和时间坐标组成,一个几何意义上的点除了空间坐标外,还联系着一个时间坐标,称这样几何意义上的点为事件。一个事件的空间坐标,是过此事件且平行于时间轴的直线与空间轴交点上的标度;一个事件的时间坐标,是过此事件且平行于空间轴的直线与时间轴交点上的标度。

时空图上的直线或曲线由一系列的事件组成,一个粒子无论我们认为它“静止”还是“运动”,它在时空图上都是一条曲线或直线。称这样的曲线或直线为粒子的世界线,世界线可以看作是一个粒子或观察者在时空上的“历史”或“经历”。粒子的世界线是有方向的,由于光速的限制,粒子的世界线不能大于光速。

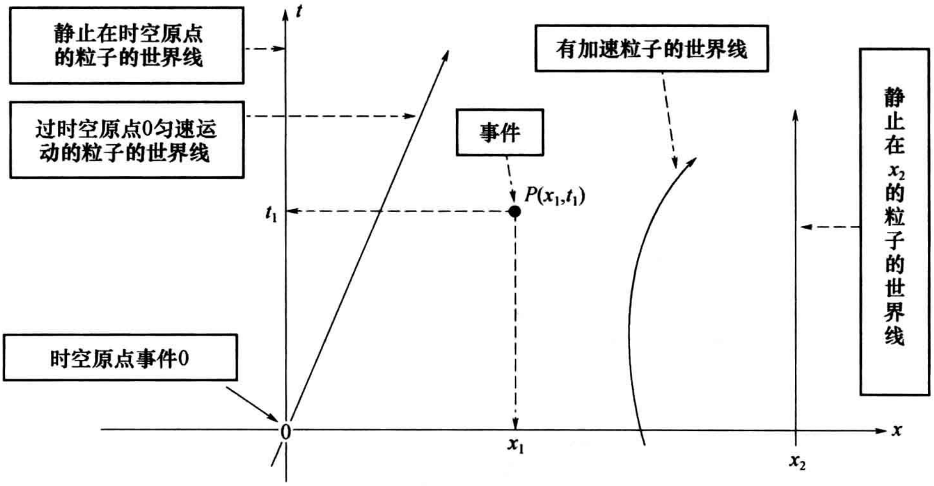


图 1.3.1

处于惯性状态的粒子的世界线在时空图上是直线,有加速度的粒子的世界线是曲线,两个相对静止的粒子的世界线是平行线。

由于光速的限制，任何粒子的世界线对时间的微分不能大于光速，在 $c=1$ 单位制下，要求世界线上任意事件处的瞬时速度满足

$$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t \leqslant 1 \tag{1.3.1}$$

时空图上，直线或曲线分类时线、类空线和类光线，其几何定义在后面的章节给出。

1.4 时空原点和空间原点

空间图上，$x=y=z=0$ 的点为空间原点，二维时空图上 $x=0$ 为空间原点，习惯用大写字母 O 标识。但在时空图上 $x=0$ 是一条世界线，实际上就是 t 轴。

为了概念清晰，时空图上定义 $x=t=0$ 的点为时空原点。时空原点是一个事件，它表示这个事件的空间坐标和时间坐标均为 0，本书一律用数字 0 来标识这个事件。一般叙述时说“时空原点”，实际上是时空原点事件 0。

对应到四维时空，时空原点事件的坐标为 $t=0, x=y=z=0$。

据此，将数字 0 标在时空原点事件上，而将空间原点 O 标在 t 轴上。

于是时间轴 t 就有了如图 1.4.1 上注释的多种含义，它是时间轴 t，是静止在 $x=0$的粒子的世界线，是空间原点 O 的世界线，也可以是静止在空间原点观察者 O 的世界线。在理解了时间轴的含义后，本节之后将会用 O 或 O'等来标识参考系，为的是提醒读者要明确空间原点($x=0$)和时空原点事件($x=t=0$)之间的区别。

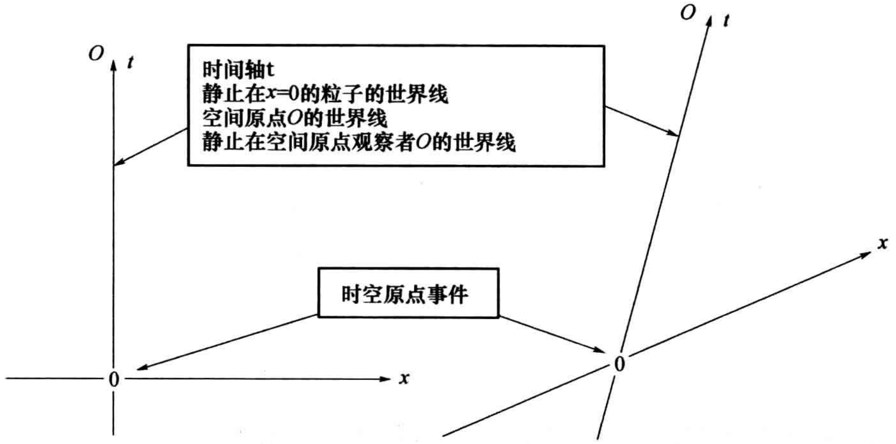


图 1.4.1

在讨论问题时，会用“O 的立场”或“O'的立场”的说法。以 O 的立场为例，其含义是：参考系 O 的立场，也是位于空间原点的观察者 O 的立场，当然与 O 相对静止的观者与 O 有着相同的立场。O 还是时间轴，时间轴 t 实际是空间原点的世界线。

1.5 光的世界线、光格与时空坐标的几何关系

闵氏几何时空图在 $c=1$ 单位的约束下，光的世界线与纸面上的竖直线与水平线均为欧氏几何的45°夹角关系。

光的世界线是有方向的，由于限定二维时空，且按照习惯，规定时间的正方向是向上的，空间的正方向是向右的。所以光的世界线也分为空间正方向光的世界线和空间反方向光的世界线，如图 1.5.1 所示。

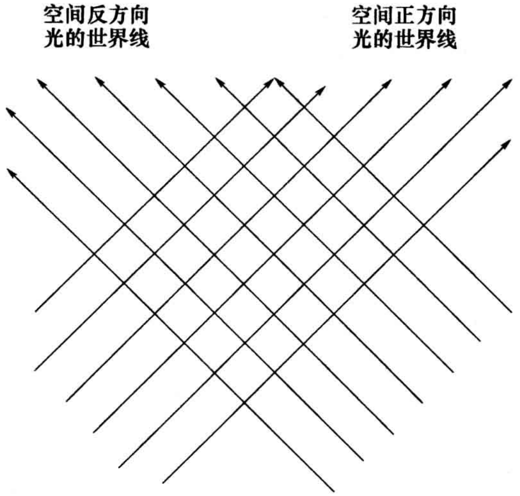


图 1.5.1

光速不变是时空图的基本依据，为准确标识时空图上的几何元素，例如不同参考系之间坐标的标度关系、事件的坐标映射、不同参考系的速度关系、以及不借助参考系确定直线段或曲线段的时空间隔，在时空图的背景上画出45°倾斜的两个方向的等距光的世界线组成的光格，作为以后确定其他时空几何元素的基准。

在随后的章节，可以了解到这些光格会起到“坐标基准”的作用，光格体现出

光速独立于参考系的含义，用直线来绘出光格还意味着闵氏时空是各向同性的。这也表明相对性原理和光速不变是闵氏几何的基础。

更进一步，第三章，我们将借助光格而不依赖参考系独立地确定时空图上的直线的线长，即时空间隔。此后再给出时空图，一般都会在背景上给出光格，作为坐标基准。

如图 1.5.2 所示，在光格的约束下，任意一条光的世界线应该与组成光格的直线重合或者平行。这些光的世界线上任意两个事件在任意参考系坐标系下，其坐标应满足以下关系

$$c = \Delta x/\Delta t = \pm 1 \tag{1.5.1}$$

在光的世界线约束下，任何参考系的时空坐标轴 t 和 x 应处于光的世界线的对称位置，以满足 $c = \pm 1$。这样，参考系的时空轴 t 和 x 之间可以是视觉垂直的，也可以不是视觉垂直的，但它们之间是正交的。时空图上判断两条直线是否正交完全依据这两条直线是否处于一条光的世界线的对称位置，即必有一条光的世界线应该是两条正交直线交角的角平分线。

由于采用 $c=1$ 单位制，闵氏时空几何还要求时空坐标 x 轴和 t 轴的单位 1 应该采用同长的几何线段来标度。

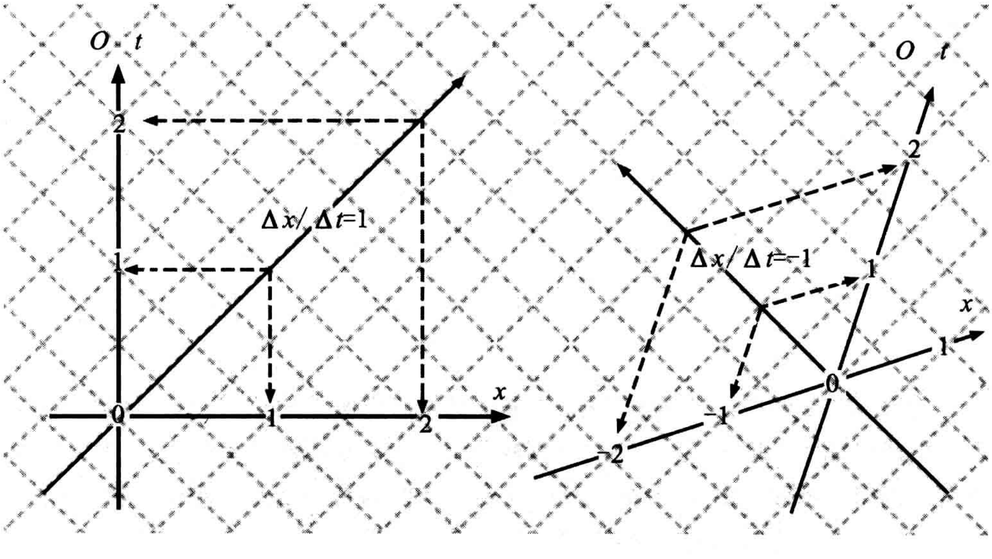


图 1.5.2

1.6 匀速运动粒子的世界线与参考系

一个静止在空间原点 O 的粒子或者观察者的世界线就是该粒子所在参考系的时间轴 t。t 轴与其相正交的空间坐标 x 轴组成一个时空坐标系，我们用 $O(t,x)$ 来表示，简称 O 系。这个静止在原点的粒子或观者不妨也称为 O。

一个相对 O 且过时空原点以速度 v 向 x 正方向运动的粒子 O' 的世界线也应该可以是这个粒子所在参考系的时间轴，这两个粒子之间的几何关系由洛伦兹变换确定。运动和静止是相对的，在 O' 的立场，O' 是静止的，即在 O' 立场粒子 O' 的世界线的空间坐标始终为 0，即 $x'=0$。也不妨将粒子 O' 所在的参考系称为 O' 系，将 $x'=0$ 代入洛伦兹变换 $x'=\gamma(x-vt)$，于是得到 t' 轴在 O 的方程为

$$0=\gamma(x-vt)\Rightarrow x=vt \tag{1.6.1}$$

依据此方程，在时空图上先给出 $O(t,x)$ 时空坐标轴，在这个坐标系 O 上绘出的直线方程 $x=vt$，就是 $O'(t',x')$ 的时间轴 t'。

如图 1.6.1 所示，O' 系时间轴 t' 与 O 系时间轴 t 的夹角 ϕ 在 O 系满足以下关

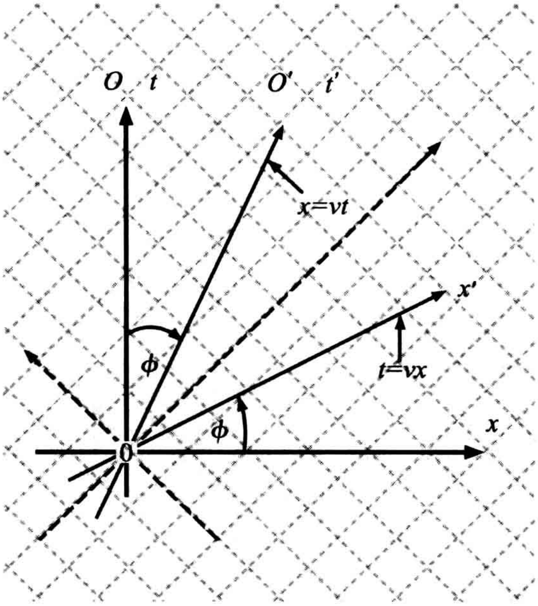


图 1.6.1

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com