丛书主编：余文森

新课程高考命题研究课题组\编

新课程

数学学科

高考能力标准

（含试题标准）解读

剖析各类能力层级

解析经典题例

举一反三·事半功倍

海峡出版发行集团 THE STRAITS PUBLISHING & DISTRIBUTING GROUP | 福建教育出版社

丛书主编：余文森
新课程高考命题研究课题组\编

新课程

数学学科

高考能力标准（含试题标准）解读

海峡出版发行集团 | 福建教育出版社
THE STRAITS PUBLISHING & DISTRIBUTING GROUP

总　　序

能力立意是高考命题的基本导向，能力立意也是素质教育和新课程理念的体现。能力立意不仅是高考命题的准则，也是高中教师教学和学生学习的指南。

能力立意的前提是能力概念和体系的构建，能力究竟是什么？新课程各学科都包含哪些类型和层次的能力？这些能力的内涵和外延又是什么？它们又是如何体现在高考命题中？我们组织开展的新课程各学科高考能力标准研究以及基于此而编写的这套丛书就是要回答这些问题的。

能力立意对应的是知识立意，那么知识与能力究竟是什么关系？从个体角度讲，两者既可能是正向的，即知识多、能力强，知识少、能力弱；又可能是反向的，即知识多、能力弱，知识少、能力强。现在高中生也都知道，有的同学只会死记硬背、勤学苦练，虽然考分高，但高分低能，没有发展后劲，因此不被大家认可；而有的同学虽然考分不高，但有想法，有主见，会办事，能力强，这些人进入社会适应性特好，因此很受大家青睐。从学校教育的使命和任务来看，我们要努力避免高分低能；坚决制止低分低能。高分低能则是学校教育的遗憾和尴尬，我们也要努力加以改进。高分高能才是我们学校的努力方向，也是能力立意的价值追求。

从心理学角度讲，能力来自知识又高于知识，能力是在对知识进行加工、建构和应用中形成和发展起来的。美国教育家布鲁姆依据知识加工、建构和应用的水平，把认知能力分为以下六个层次：

1. 知识（knowledge）。指对具体事物和普遍原理的回忆，对方法和过程的回忆，或者对一种模式、结构或框架的回忆。又分为：

①具体的知识；

②处理具体事物的方式方法的知识；

③学科领域中的普遍原理和抽象概念的知识。

2. 领会（comprehension）。这是最低层次的理解，包括转化、解释、推断。

3. 应用（application）。指在某些特定的和具体的情境里使用抽象概念。

4. 分析（analysis）。指将整体分解成各种组成要素或组成部分，以便弄清各种观念的有关层次，或者弄清所表达的各种观念之间的关系。包括要素分析、关系分析、组织原理分析。

5. 综合（synthesis）。指把各种要素和组成部分组合成一个整体。包括进行独特的交流、制定计划或操作步骤、指导出一套抽象关系。

6. 评价（evaluation）。指为了特定目的对材料和方法的价值做出判断。包括依据内在证据来判断、依据外部准则来判断。

范畴	**智能**
知识	a
领会	a＋b
应用	a＋b＋c
分析	a＋b＋c＋d
综合	a＋b＋c＋d＋e
评价	a＋b＋c＋d＋e＋f

知识、领会、应用、分析、综合、评价六个层次构成由简单到复杂的完整的认知能力目标体系。这种认知能力目标是确定考核目标的根据，考核就是要通过考试检测认知能力目标实现的程度。

这一分类具有普遍的指导意义和参考价值，是我们研究各学科能力标准的重要依据。当然，这只是从纵向角度对学习能力的一种分类，各学科还要根据自身的性质和任务，界定要培养和测量的各种能力，这可以看成是横向的一种分类。两种分类结合起来是我们构建能力标准的思路和方法。

能力标准及其解读只是一个尝试，目的是帮助教师和学生确立能力意识和标准意识，强化能力培养的自觉性。我们希望本套丛书不仅对高考复习，而且对教师平时教学和学生日常学习都能发挥积极的导向作用。

前　言

尽管以“能力立意”为导向的高考已经进行了多年，但是，从实际来看，许多师生对“能力立意”的新高考还不很适应。不适应的根本原因就在于对一些问题的认识还不清晰，如中学生数学学习的基本能力有哪些？其要素是什么？这些能力又是怎样体现在高考试题中？应如何有效地解决这些问题？等。为帮助广大师生更好地解决这些问题，尽快适应新高考，我们编写了《新课程数学学科高考能力标准》。

《新课程数学学科高考能力标准》根据美国教育家布鲁姆的认知能力理论，结合我省近年来新课程高考的实际，通过实例对《普通高等学校招生全国统一考试大纲·数学（2011年课程标准实验版）》、《普通高等学校招生全国统一考试福建省考试说明·数学（2011）》所规定的相关能力进行细化和解读。全书包含中学生数学学习能力标准体系、高考试卷结构标准、试题标准等三部分。

中学生数学学习能力标准体系对中学生数学学习的基本能力——空间想象能力、抽象概括能力、推理论证能力、运算求解能力、数据处理能力、应用意识、创新意识等进行了较为详细的界定，指出了各种能力的要素、组成、表现和观察点，并通过实例较为详尽地阐述了各种能力的情境（问题）表现和考查相关能力的试题编制；高考试卷结构标准对我省现行高考试卷的内容覆盖、能力要求、题型类型、难度预控、试卷结构、考试时间等进行了解读；试题标准则以题型为单位列举了足量的高考真题，并指出各道试题的能力取向、考查的知识点、参考答案以及解题思路与关键、可能的失误和原因分析、难度系数等。

《新课程数学学科高考能力标准》的编写是一项尝试性的工作，参考

资料较少，又加上时间仓促，不足之处在所难免，欢迎广大师生在使用过程中提出宝贵的意见和建议，以便再版时进一步完善，更好地发挥该书的应有作用。

编者

2011 年 12 月

目　　录

第一部分　中学生数学学习能力标准体系

一、数学科学习能力的类型

根据《普通高中数学课程标准（实验）》、《2011年普通高等学校招生全国统一考试大纲（课程标准实验版·理科数学）》和《2011年普通高等学校招生全国统一考试大纲（课程标准实验版·文科数学）》的界定，中学生数学学习能力是指空间想象能力、抽象概括能力、推理论证能力、运算求解能力、数据处理能力以及应用意识和创新意识.

二、数学科学习能力内涵的界定

（一）空间想象能力

1. 空间想象能力的界定

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学，空间想象能力是在研究现实世界空间形式的过程中产生并为之服务的. 正常条件下眼睛看到的事物是平面图，而事实是立体的，这就需要去思考事物的具体形状、位置. 这种想象就是空间想象，而想的与事实是否一致，就是空间想象能力的体现. 在一张平面的纸上画一张立体图，空间想象能力强的人马上就知道这个物体的具体形状. 特别是较复杂的图，所涉及的物体很多，形状各异，看这种图形时就需要较强的空间想象能力.

中学数学所研究的空间是现实空间，包括一维（直线）、二维（平面）、三维（立体）图形所反映的空间. 空间想象能力的特点是善于在头脑中构成研究对象的空间形状和简明的结构，形成空间表象，并对空间表

象进行加工、改造和创新. 同时能将对实物进行的一些操作，在头脑中进行相应的思考. 空间想象能力是指通过观察、触摸，以及实践经验得到的一种能思考物体形状、位置的能力，是对空间形式的观察、分析、抽象的能力，主要表现为识图、画图和对图形的想象能力.

2. 空间想象能力的要素、组成、表现和观察点

由空间想象能力的定义可知，空间想象能力是对空间形式的观察、分析、抽象的能力. 它主要包含识图、画图和对图形的想象能力.

识图能力是指通过观察研究所给的图形，能迅速、合理地把握所给图形的几何元素之间的相互关系的能力. 画图能力是指将文字语言和符号语言按照画法规则绘制相应的空间图形，转化为图形语言，以及对图形添加辅助图形或对图形进行分割、补全、折叠、展开等各种变换的能力. 对图形的想象主要包括有图想图和无图想图两种，是空间想象能力高层次的标志，是指能根据图形想象出空间图形直观形象，包括对空间基本图形的识记、再现和思考；能从复杂的图形中区分出基本的图形，正确地分析出图形中基本元素及其相互关系.

中学数学考评个体的空间想象能力主要从识图能力、画图能力和对图形的想象能力等三方面进行. 考评的主要观测点为：能根据条件作出正确的图形，根据图形想象出直观形象；能正确地分析出图形中基本元素及其相互关系；能对图形进行分解、组合；会运用图形与图表等手段形象地揭示问题的本质. 应该指出的是，在具体解决问题的过程中，识图能力、画图能力和对图形的想象能力往往并不是截然分开的，而是交织在一起，作为一个整体发生作用的.

3. 空间想象能力的情境（问题）表现和试题编制

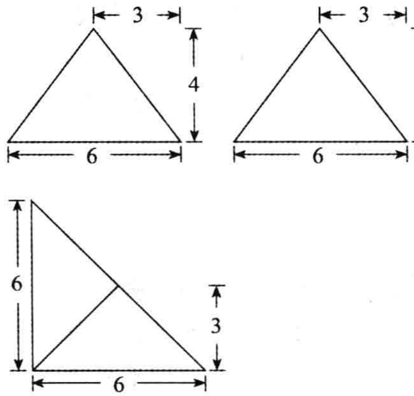
中学阶段对空间想象能力的考查主要是以立体几何为载体，着重从识图与画图的结合、概念与推理的结合、对图形的处理等三个方面进行.

①识图与画图的结合. 在立体几何中，强调对空间图形的整体认识和把握，强调从实物到图形，从三视图、直观图想象空间几何体，再从空间几何体的整体来把握直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系. 一方面，对基本的几何图形（平面或立体）要非常熟悉，能正确画图；另一方面，能正确识别图形，了解三视图和直观图的关系，分析几何图形中

各元素在空间中的形状、大小和位置关系，突破习惯看平面图形的思维定势.

［例 1］（2009 年高考海南与宁夏卷·理）

一个棱锥的三视图如图，则该棱锥的全面积（单位：cm^2）为（　　）.



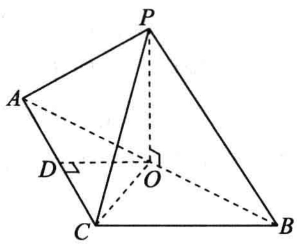
A. $48+12\sqrt{2}$

B. $48+24\sqrt{2}$

C. $36+12\sqrt{2}$

D. $36+24\sqrt{2}$

本题以几何体的三视图为载体，考查空间想象能力. 由题目给出的三视图，通过想象得出几何体是棱锥，其直观图如下，从而有 $PO=4$，$OD=3$，由勾股定理，得 $PD=5$，$AB=6\sqrt{2}$，全面积为：$\frac{1}{2}\times6\times6+2\times\frac{1}{2}\times6\times5+\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times4=48+12\sqrt{2}$，故选 A.



根据给出的三视图，通过画图、分析，想象出空间几何体，并找出两者的联系，是解题的关键.

［例 2］（2007 年高考浙江卷·理）

若 P 是两条异面直线 l，m 外的任意一点，则（　　）.

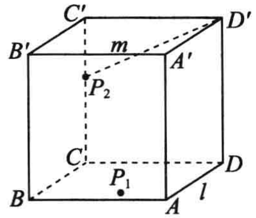
A. 过点 P 有且仅有一条直线与 l，m 都平行

B. 过点 P 有且仅有一条直线与 l，m 都垂直

C. 过点 P 有且仅有一条直线与 l，m 都相交

D. 过点 P 有且仅有一条直线与 l，m 都异面

本题考查直线的相交、平行和异面关系，考查作图、画图及空间想象能力．设过点 P 的直线为 n，若 n 与 l、m 都平行，则 l、m 平行，与已知矛盾，故选项 A 错误；由于 l、m 只有唯一的公垂线，而过点 P 与公垂线平行的直线只有一条，故 B 正确；



对于选项 C、D，可参考右图的正方体，设 AD 为直线 l，$A'B'$ 为直线 m．若点 P 在点 P_1 处，则显然无法作出直线与两直线都相交，故选项 C 错误；若点 P 在点 P_2 处，则由图可知直线 CC' 及 $D'P_2$ 均与 l、m 异面，故选项 D 错误．选 B.

本题是一道空间直线位置关系的判断问题，题目中只给出简单的文字描述，要求学生能够正确画出或想象出空间图形.

②概念与推理的结合．概念是抽象思维与逻辑思维的基本元素．立体几何是通过概念、公理来演绎的，对概念的理解是解题的基础．因此，要理解概念的本质，能够根据概念画出图形，借助图形思考，分解出解题所需的要素，从而进行推理和运算.

考题中，一般不给出图形或只给出最简单的图形及最基本的条件．解答时，需要以此为依托，根据定义和性质画出所需的线、面、角等几何要素，对照图形，将概念、性质灵活应用于图形.

[例 3]（2009 年高考广东卷·理）

给定下列四个命题：

①若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行，那么这两个平面相互平行；

②若一个平面经过另一个平面的垂线，那么这两个平面相互垂直；

③垂直于同一直线的两条直线相互平行；

④若两个平面垂直，那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直.

其中，为真命题的是（　　）.

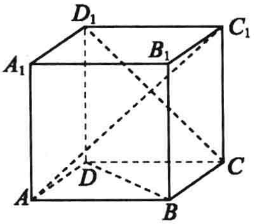
A. ①和②　　　　B. ②和③

C. ③和④　　　　D. ②和④

本题考查学生对几何概念本质的理解，要求能够根据概念画出图形，借助图形思考，分解出解题所需的要素，从而进行推理. 易知选 D.

[例 4]（2007 年高考四川卷·理）

如图，$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，下面结论错误的是（　　）.



A. $BD /\!/$ 平面 CB_1D_1

B. $AC_1 \perp BD$

C. $AC_1 \perp$ 平面 CB_1D_1

D. 异面直线 AD 与 CB_1 所成的角为 $60°$

本题依托正方体，通过考查有关线面平行、垂直的判定，线线垂直与异面直线所成角的概念，要求学生能够根据概念画出图形，借助图形进行思考，分解出解题所需的要素，并进而推理和运算，考查空间想象能力与推理论证能力. $\because BD /\!/ B_1D_1$，$\therefore BD /\!/$ 平面 CB_1D_1，A 正确；$\because BD \perp$ 面 ACC_1，$\therefore AC_1 \perp BD$，B 正确；$\because AC_1 \perp B_1D_1$，$\because B_1C \perp$ 面 ABC_1，$\therefore AC_1 \perp B_1C$，$\therefore AC_1 \perp$ 平面 CB_1D_1，C 正确；异面直线 AD 与 CB_1 所成的角转化为 BC 与 CB_1 所成的角，而 BC 与 CB_1 所成的角为 $45°$，故 D 错误. 选 D.

③对图形的处理. 为了使解题过程变得直观、简捷，我们常常需要对图形进行适当的构造与处理. 对图形常见的处理有：分割、补形、展开、平移和对称；添加辅助线、辅助面；将立体几何问题转化为平面问题等. 通过处理，使得复杂图形简单化、非标准图形标准化. 对空间图形的处理能力是空间想象能力深化的标志，是高考从深层次上考查空间想象能力的主要方面.

[例 5]（2008 年高考海南与宁夏卷·理）

某几何体的一条棱长为$\sqrt{7}$，在该几何体的正视图中，这条棱的投影是长为$\sqrt{6}$的线段，在该几何体的侧视图与俯视图中，这条棱的投影分别是长为 a 和 b 的线段，则 $a+b$ 的最大值为（　　）.

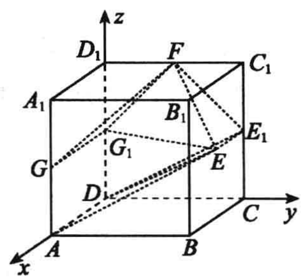
A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{5}$

本题以三视图为载体，考查考生对空间基本的几何图形（平面图形或立体图形）的熟悉程度．解答本题，必须想象出图形，借助图形思考．为了使得思考直观、简捷，需要对图形进行适当的构造，如：构造一个长方体，其一条对角线长为$\sqrt{7}$，其三个相邻面的对角线长分别为$\sqrt{6}$、a 和 b．设过长方体同一顶点的三条棱长分别是 x、y、z，则$\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\x^2+z^2=b^2,\\z^2+y^2=6,\end{cases}$所以 $2(x^2+y^2+z^2)=a^2+b^2+6$，可知 $a^2+b^2=8$，结合基本不等式得：$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leqslant 2(a^2+b^2)=16$．选 C.

本题在如何构造图形上是开放的，因此，构造的图形是否突出问题的本质，达到直观、简捷，体现了空间想象能力的差异．

［例 6］（2009 年高考广东卷·理）

如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 E 是正方形 BCC_1B_1 的中心，点 F、G 分别是棱 C_1D_1，AA_1 的中点．设点 E_1，G_1 分别是点 E，G 在平面 DCC_1D_1 内的正投影．



（Ⅰ）求以 E 为顶点，以四边形 $FGAE$ 在平面 DCC_1D_1 内的正投影为底面边界的棱锥的体积；

（Ⅱ）证明：直线 $FG_1\perp$平面 FEE_1；

（Ⅲ）求异面直线 E_1G_1 与 EA 所成角的正弦值．

本题主要考查空间几何体的体积计算及空间线面关系、空间向量的运算等基础知识，同时考查空间想象能力和推理论证能力．第（Ⅰ）问要根据题设条件作出点 E、G 在平面 DCC_1D_1 内的正投影 E_1、G_1，从而得出 E_1、G_1 分别为 CC_1、DD_1 的中点，再连结 EE_1、EG_1、ED、DE_1，则为所求四棱锥 $E\text{-}DE_1FG_1$，其底面 DE_1FG_1 面积为 $S_{DE_1FG_1}=S_{\mathrm{Rt}\triangle E_1FG_1}+$

$S_{\mathrm{Rt}\triangle DG_1E_1}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times1\times2=2$，又 $EE_1\perp$ 面 DE_1FG_1，$EE_1=1$，∴ $V_{E\text{-}DE_1FG_1}=\frac{1}{3}S_{DE_1FG_1}\cdot EE_1=\frac{2}{3}$. 第（Ⅱ）问，通过建立如上图所示的空间直角坐标系，易得 $\overrightarrow{FG_1}=(0,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{FE}=(1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{FE_1}=(0,\ 1,\ -1)$，∴ $\overrightarrow{FG_1}\cdot\overrightarrow{FE}=0+(-1)+1=0$，$\overrightarrow{FG_1}\cdot\overrightarrow{FE_1}=0+(-1)+1=0$，即 $FG_1\perp FE$，$FG_1\perp FE_1$，∴ $FG_1\perp$ 平面 FEE_1. 同理，第（Ⅲ）问有 $\overrightarrow{E_1G_1}=(0,\ -2,\ 0)$，$\overrightarrow{EA}=(1,\ -2,\ -1)$，则 $\cos\langle\overrightarrow{E_1G_1},\ \overrightarrow{EA}\rangle=\frac{\overrightarrow{E_1G_1}\cdot\overrightarrow{EA}}{|\overrightarrow{E_1G_1}||\overrightarrow{EA}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，从而异面直线 E_1G_1 与 EA 所成角的正弦值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解空间几何问题，绝不能脱离图形. 向量方法重在将几何问题代数化，借助代数方法分析解决几何问题，依然需要对图形进行观察、思考、推理、判断，要做到“眼里有图，脑中有图”，能把图形和概念联系起来，用图形思考问题. 在解题过程中，空间想象是前提，代数运算是关键.

（二）抽象概括能力

1. 抽象概括能力的界定

抽象是指舍弃事物非本质的属性，揭示其本质属性的思维过程，是人们在认识活动中运用概念、判断、推理等思维形式，对客观现实进行间接的、概括的反映的过程，属于理性认识阶段. 抽象凭借科学的抽象概念对事物的本质和客观世界发展的深远过程进行反映，使人们通过认识活动获得远远超出靠感觉器官直接感知的知识. 科学的抽象是在概念中反映自然界或社会物质过程的内在本质的思想，它是在对事物的本质属性进行分析、综合、比较的基础上，抽取出事物的本质属性，撇开其非本质属性，使认识从感性的具体进入抽象的规定，形成概念. 概括是指把仅仅属于某一类对象的共同属性区分出来的思维过程. 抽象和概括是相互联系的，没有抽象就不可能有概括，而概括必须在抽象的基础上得出某种观点或某个结论. 抽象与概括又是有区别的，其主要区别在于：概括过程中的对象保持不变，但对象的范围扩展了，并推广到同类的全体事物；而在抽象过程中，对象由具体的变为形式化的、一般化的.

中学数学中的抽象概括能力是指对具体、生动的实例，在抽象概括的过程中，能发现研究对象的本质，从给定的大量信息中，能概括出一些结论，并能将其应用于解决问题或作出新的判断的能力.

2. 抽象概括能力的要素、组成、表现和观察点

从上面的论述易知，抽象概括能力是与分析、综合、归纳、演绎等能力密切相关的. 分析是指把事物分解为各个部分分别加以考察，从而便于形成各个概念或便于确定概念间的关系的能力. 归纳是指通过思维，能够找出多个特殊性的具体事物的共同性的能力. 综合能力是指把事物的各个部分用形成的各个概念分别代表，形成原来的整体事物的概念或确定这些各个部分的概念的关系的能力. 演绎是指将事物的一般性返回应用到事物的具体的个别性的能力.

中学数学考评个体的抽象概括能力主要从数学语言的领悟、数学模式与数学模型的识别与应用等两方面进行. 考评的主要观测点为：能将题目的文字叙述、数学符号翻译成数学关系，并进行合理的数学加工；能条理清晰，层次分明，没有逻辑错误，准确规范地使用各种数学名词、术语和数学符号表达自己的解题过程；能把问题和解决问题的方法进行比较分类，抽象概括出一种数学结构形式，并利用这种结构形式来熟练地解决同类型的问题；能从现实问题中概括出具体的数学模型，并利用它来熟练地解决同类型的实际问题.

3. 抽象概括能力的情境（问题）表现和试题编制

中学阶段对抽象概括能力的考查主要从数学语言的领悟、数学模式与数学模型的识别与应用两方面进行.

①数学语言的领悟. 数学语言包括文字语言、符号语言和图形（图表）语言，它是数学化了的自然语言，是数学特有的形式化的符号体系.

语言是思维的载体，思维需要用语言或文字表达. 依靠数学语言进行思维能够使思维在可见的形式下再现出来. 高考数学试题主要是用文字语言和符号语言，辅之以图形（图表）语言表述、呈现其内容的. 高考考查的重点是领悟三种语言，并能够根据实际情况进行三种形式的语言间的转换. 对语言的考查包括两方面的要求：一是要求考生读懂题目的叙述，把所给的文字和数学符号翻译成数学关系输入大脑，以便于大脑加工；二是

要求考生有一定的语言表达能力，能清楚、准确、流畅地表达自己的解题过程，并要求表达条理清晰，层次分明，没有逻辑错误，能准确规范地使用各种数学名词、术语和数学符号.

[例 1]（2007 年高考湖南卷·理）

设集合 $A=\{(x,\ y)\mid y\geqslant\frac{1}{2}|x-2|\}$，$B=\{(x,\ y)\mid y\leqslant-|x|+b\}$，$A\cap B\neq\varnothing$.

（Ⅰ）b 的取值范围是________；

（Ⅱ）若 $(x,\ y)\in A\cap B$，且 $x+2y$ 的最大值为 9，则 b 的值是_____.

本题以数学符号语言为载体，重点考查三种语言的相互转化，考查抽象概括能力. 第（Ⅰ）问要能读懂有关集合的符号语言，理解集合 A、B 表示的区域. 把 A、B 对应的区域用图形表示出来，即把数学符号语言转化为图形语言：先画区域 A，以及 $b=0$ 时 B 表示的区域 $B=\{(x,\ y)\mid y\leqslant-|x|\}$，再把折线 $y=-|x|$ 上下平移，通过观察，易得 $b\geqslant1$ 时满足 $A\cap B\neq\varnothing$. 第（Ⅱ）问，令 $m=x+2y$，由线性规划知识知，直线 $m=x+2y$ 过点 $\left(0,\ \frac{9}{2}\right)$ 时，$x+2y$ 的最大值为 9，所以 $b=\frac{9}{2}$.

[例 2]（2009 年高考山东卷·理）

已知 α，β 表示两个不同的平面，m 为平面 α 内的一条直线，则"$\alpha\perp\beta$"是"$m\perp\beta$"的（　　）.

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

本题以立体几何中垂直关系的判定为载体，考查充分必要条件的概念. 问题的解决要能读懂题文给出的文字语言、数学符号语言的含义，并通过三种语言的相互转化，形成数学概念和空间图形，进行推理、判断：由平面与平面垂直的判定定理知，如果 m 为平面 α 内的一条直线，$m\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$，反过来则不一定成立. 所以"$\alpha\perp\beta$"是"$m\perp\beta$"的必要不充分

条件，选 B.

[例 3]（2009 年福建单科质检卷·文）

已知函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$，$x\in[0,1]$，对于满足 $0<x_1<x_2<1$ 的任意 x_1、x_2，给出下列结论：

①$(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]<0$；

②$x_2 f(x_1)<x_1 f(x_2)$；

③$f(x_2)-f(x_1)>x_2-x_1$；

④$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

其中正确结论的序号是（　　）.

A. ①②　　B. ①③　　C. ②④　　D. ③④

本题以函数符号语言为载体，考查数形结合思想. 问题的解决需要透过题文给出的符号语言，理解 4 个结论的实际含义，知道“$(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]<0$ 表达的是函数 $f(x)$ 的单调性，$x_2 f(x_1)<x_1 f(x_2)$ 表达的是函数 $f(x)$ 图象上的点 $(x_1,f(x_1))$、$(x_2,f(x_2))$ 与原点连线的斜率的大小关系，$f(x_2)-f(x_1)>x_2-x_1$ 表达的是函数 $f(x)$ 图象上的点 $(x_1,f(x_1))$、$(x_2,f(x_2))$ 的连线的斜率与 1 的大小关系，$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 表达的是函数 $f(x)$ 的凹凸性”，由数形结合，作出函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ 的图象解决问题，易知选 C.

[例 4]（2008 年福建质检卷·理）

下列不等式正确的是（　　）.

A. $\sin 1<3\sin\dfrac{1}{3}<5\sin\dfrac{1}{5}$　　B. $\sin 1>3\sin\dfrac{1}{3}>5\sin\dfrac{1}{5}$

C. $\sin 1<5\sin\dfrac{1}{5}<3\sin\dfrac{1}{3}$　　D. $\sin 1>5\sin\dfrac{1}{5}>3\sin\dfrac{1}{3}$