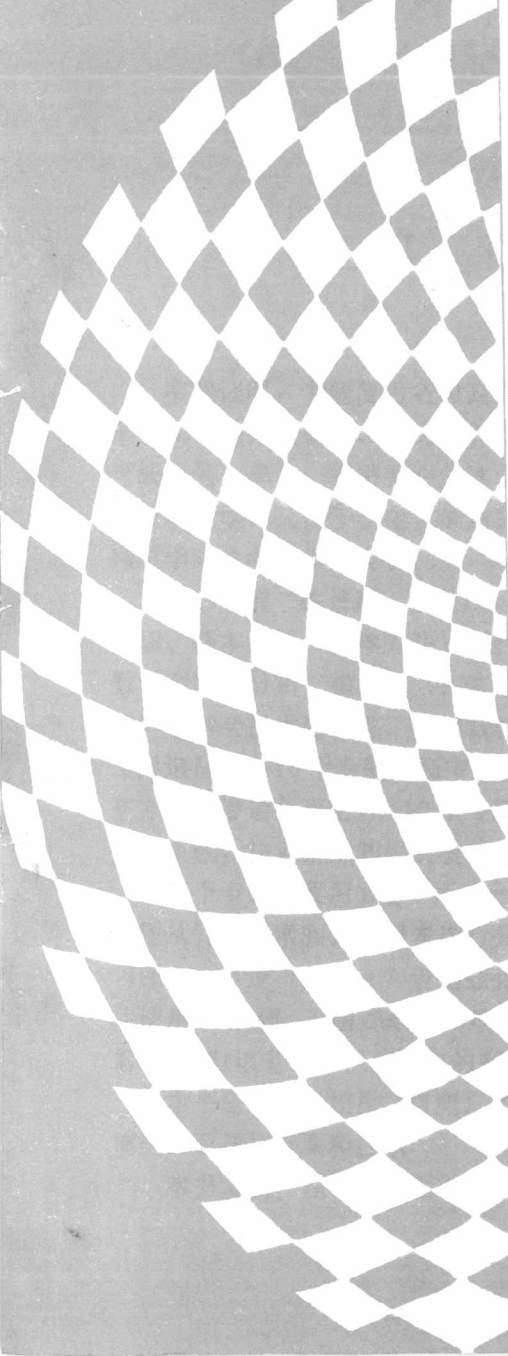


高中数学

重点知识与方法20讲

王希忠 编著

四川教育出版社



高中数学重点知识与方法20讲

王希忠 编著

四川教育出版社
一九九二年成都

(川)新登字 005 号

责任编辑:李岷聪

封面设计:田 丰

高中数学重点知识与方法 20 讲 王希忠 编著

四川教育出版社出版 (成都盐道街三号)

四川教育出版社发行 成都出版印刷职中印刷厂印刷
成都科大育才激光照排联合公司激光照排

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 11.25 插页 2 字数 245 千

1992 年 11 月第一版

1992 年 11 月第一次印刷

印数:1—10000 册

ISBN7—5408—1892—1/G · 1810

定价:3.80 元

目 录

第一章 重点知识

- (第一讲 从大纲、考纲和高考谈数学复习..... (1)
- (第二讲 函数..... (10)
- 第三讲 方程..... (23)
- 第四讲 三角函数..... (36)
- 第五讲 数列..... (49)
- 第六讲 不等式..... (61)
- 第七讲 复数..... (73)
- 第八讲 空间直线与平面..... (86)
- 第九讲 圆锥曲线..... (100)
- 第十讲 曲线与方程..... (120)

第二章 重要数学方法

- 第十一讲 数形结合法..... (134)
- 第十二讲 换元法..... (153)
- 第十三讲 配方法 待定系数法..... (166)
- 第十四讲 分类讨论法 (一) (182)
- 第十五讲 分类讨论法 (二) (196)
- 第十六讲 数学归纳法..... (211)
- 第十七讲 反证法..... (226)

第三章 解题指导

第十八讲	选择题的解法	(239)
第十九讲	填空题的解法	(257)
第二十讲	解答题的解法	(270)
附录一	1992年全国高考(理)数学试题及解答	(292)
附录二	习题答案及提示	(303)
附录三	高考数学(理科)难度曲线	(350)
附图1	近九年高考数学难度曲线	(350)
附图2	1992年高考(理科)数学难度曲线	(350)
附图3	1991年高考(理科)数学难度曲线	(351)
(82)		附二第
(83)		附四第
(84)		附五第
(85)		附六第
(86)		附七第
(87)		附八第
(88)		附九第
(89)		附十第
(90)		附十一第
(91)		附十二第
(92)		附十三第
(93)		附十四第
(94)		附十五第
(95)		附十六第
(96)		附十七第
(97)		附十八第
(98)		附十九第
(99)		附二十第
(100)		附二十一第
(101)		附二十二第
(102)		附二十三第
(103)		附二十四第
(104)		附二十五第
(105)		附二十六第
(106)		附二十七第
(107)		附二十八第
(108)		附二十九第
(109)		附三十第
(110)		附三十一第
(111)		附三十二第
(112)		附三十三第
(113)		附三十四第
(114)		附三十五第
(115)		附三十六第
(116)		附三十七第
(117)		附三十八第
(118)		附三十九第
(119)		附四十第
(120)		附四十一第
(121)		附四十二第
(122)		附四十三第
(123)		附四十四第
(124)		附四十五第
(125)		附四十六第
(126)		附四十七第
(127)		附四十八第
(128)		附四十九第
(129)		附五十第
(130)		附五十一第
(131)		附五十二第
(132)		附五十三第
(133)		附五十四第
(134)		附五十五第
(135)		附五十六第
(136)		附五十七第
(137)		附五十八第
(138)		附五十九第
(139)		附六十第
(140)		附六十一第
(141)		附六十二第
(142)		附六十三第
(143)		附六十四第
(144)		附六十五第
(145)		附六十六第
(146)		附六十七第
(147)		附六十八第
(148)		附六十九第
(149)		附七十第
(150)		附七十一第
(151)		附七十二第
(152)		附七十三第
(153)		附七十四第
(154)		附七十五第
(155)		附七十六第
(156)		附七十七第
(157)		附七十八第
(158)		附七十九第
(159)		附八十第
(160)		附八十一第
(161)		附八十二第
(162)		附八十三第
(163)		附八十四第
(164)		附八十五第
(165)		附八十六第
(166)		附八十七第
(167)		附八十八第
(168)		附八十九第
(169)		附九十第
(170)		附九十一第
(171)		附九十二第
(172)		附九十三第
(173)		附九十四第
(174)		附九十五第
(175)		附九十六第
(176)		附九十七第
(177)		附九十八第
(178)		附九十九第
(179)		附一百第
(180)		附一百零一第
(181)		附一百零二第
(182)		附一百零三第
(183)		附一百零四第
(184)		附一百零五第
(185)		附一百零六第
(186)		附一百零七第
(187)		附一百零八第
(188)		附一百零九第
(189)		附一百一十第
(190)		附一百一十一第
(191)		附一百一十二第
(192)		附一百一十三第
(193)		附一百一十四第
(194)		附一百一十五第
(195)		附一百一十六第
(196)		附一百一十七第
(197)		附一百一十八第
(198)		附一百一十九第
(199)		附一百二十第
(200)		附一百二十一第
(201)		附一百二十二第
(202)		附一百二十三第
(203)		附一百二十四第
(204)		附一百二十五第
(205)		附一百二十六第
(206)		附一百二十七第
(207)		附一百二十八第
(208)		附一百二十九第
(209)		附一百三十第
(210)		附一百三十一第
(211)		附一百三十二第
(212)		附一百三十三第
(213)		附一百三十四第
(214)		附一百三十五第
(215)		附一百三十六第
(216)		附一百三十七第
(217)		附一百三十八第
(218)		附一百三十九第
(219)		附一百四十第
(220)		附一百四十一第
(221)		附一百四十二第
(222)		附一百四十三第
(223)		附一百四十四第
(224)		附一百四十五第
(225)		附一百四十六第
(226)		附一百四十七第
(227)		附一百四十八第
(228)		附一百四十九第
(229)		附一百五十第
(230)		附一百五十一第
(231)		附一百五十二第
(232)		附一百五十三第
(233)		附一百五十四第
(234)		附一百五十五第
(235)		附一百五十六第
(236)		附一百五十七第
(237)		附一百五十八第
(238)		附一百五十九第
(239)		附一百六十第
(240)		附一百六十一第
(241)		附一百六十二第
(242)		附一百六十三第
(243)		附一百六十四第
(244)		附一百六十五第
(245)		附一百六十六第
(246)		附一百六十七第
(247)		附一百六十八第
(248)		附一百六十九第
(249)		附一百七十第
(250)		附一百七十一第
(251)		附一百七十二第
(252)		附一百七十三第
(253)		附一百七十四第
(254)		附一百七十五第
(255)		附一百七十六第
(256)		附一百七十七第
(257)		附一百七十八第
(258)		附一百七十九第
(259)		附一百八十第
(260)		附一百八十一第
(261)		附一百八十二第
(262)		附一百八十三第
(263)		附一百八十四第
(264)		附一百八十五第
(265)		附一百八十六第
(266)		附一百八十七第
(267)		附一百八十八第
(268)		附一百八十九第
(269)		附一百九十第
(270)		附一百九十一第
(271)		附一百九十二第
(272)		附一百九十三第
(273)		附一百九十四第
(274)		附一百九十五第
(275)		附一百九十六第
(276)		附一百九十七第
(277)		附一百九十八第
(278)		附一百九十九第
(279)		附二百第
(280)		附二百零一第
(281)		附二百零二第
(282)		附二百零三第
(283)		附二百零四第
(284)		附二百零五第
(285)		附二百零六第
(286)		附二百零七第
(287)		附二百零八第
(288)		附二百零九第
(289)		附二百一十第
(290)		附二百一十一第
(291)		附二百一十二第
(292)		附二百一十三第
(293)		附二百一十四第
(294)		附二百一十五第
(295)		附二百一十六第
(296)		附二百一十七第
(297)		附二百一十八第
(298)		附二百一十九第
(299)		附二百二十第
(300)		附二百二十一第
(301)		附二百二十二第
(302)		附二百二十三第
(303)		附二百二十四第
(304)		附二百二十五第
(305)		附二百二十六第
(306)		附二百二十七第
(307)		附二百二十八第
(308)		附二百二十九第
(309)		附二百三十第
(310)		附二百三十一第
(311)		附二百三十二第
(312)		附二百三十三第
(313)		附二百三十四第
(314)		附二百三十五第
(315)		附二百三十六第
(316)		附二百三十七第
(317)		附二百三十八第
(318)		附二百三十九第
(319)		附二百四十第
(320)		附二百四十一第
(321)		附二百四十二第
(322)		附二百四十三第
(323)		附二百四十四第
(324)		附二百四十五第
(325)		附二百四十六第
(326)		附二百四十七第
(327)		附二百四十八第
(328)		附二百四十九第
(329)		附二百五十第
(330)		附二百五十一第
(331)		附二百五十二第
(332)		附二百五十三第
(333)		附二百五十四第
(334)		附二百五十五第
(335)		附二百五十六第
(336)		附二百五十七第
(337)		附二百五十八第
(338)		附二百五十九第
(339)		附二百六十第
(340)		附二百六十一第
(341)		附二百六十二第
(342)		附二百六十三第
(343)		附二百六十四第
(344)		附二百六十五第
(345)		附二百六十六第
(346)		附二百六十七第
(347)		附二百六十八第
(348)		附二百六十九第
(349)		附二百七十第
(350)		附二百七十一第
(351)		附二百七十二第
(352)		附二百七十三第
(353)		附二百七十四第
(354)		附二百七十五第
(355)		附二百七十六第
(356)		附二百七十七第
(357)		附二百七十八第
(358)		附二百七十九第
(359)		附二百八十第
(360)		附二百八十一第
(361)		附二百八十二第
(362)		附二百八十三第
(363)		附二百八十四第
(364)		附二百八十五第
(365)		附二百八十六第
(366)		附二百八十七第
(367)		附二百八十八第
(368)		附二百八十九第
(369)		附二百九十第
(370)		附二百九十一第
(371)		附二百九十二第
(372)		附二百九十三第
(373)		附二百九十四第
(374)		附二百九十五第
(375)		附二百九十六第
(376)		附二百九十七第
(377)		附二百九十八第
(378)		附二百九十九第
(379)		附三百第
(380)		附三百零一第
(381)		附三百零二第
(382)		附三百零三第
(383)		附三百零四第
(384)		附三百零五第
(385)		附三百零六第
(386)		附三百零七第
(387)		附三百零八第
(388)		附三百零九第
(389)		附三百一十第
(390)		附三百一十一第
(391)		附三百一十二第
(392)		附三百一十三第
(393)		附三百一十四第
(394)		附三百一十五第
(395)		附三百一十六第
(396)		附三百一十七第
(397)		附三百一十八第
(398)		附三百一十九第
(399)		附三百二十第
(400)		附三百二十一第
(401)		附三百二十二第
(402)		附三百二十三第
(403)		附三百二十四第
(404)		附三百二十五第
(405)		附三百二十六第
(406)		附三百二十七第
(407)		附三百二十八第
(408)		附三百二十九第
(409)		附三百三十第
(410)		附三百三十一第
(411)		附三百三十二第
(412)		附三百三十三第
(413)		附三百三十四第
(414)		附三百三十五第
(415)		附三百三十六第
(416)		附三百三十七第
(417)		附三百三十八第
(418)		附三百三十九第
(419)		附三百四十第
(420)		附三百四十一第
(421)		附三百四十二第
(422)		附三百四十三第
(423)		附三百四十四第
(424)		附三百四十五第
(425)		附三百四十六第
(426)		附三百四十七第
(427)		附三百四十八第
(428)		附三百四十九第
(429)		附三百五十第
(430)		附三百五十一第
(431)		附三百五十二第
(432)		附三百五十三第
(433)		附三百五十四第
(434)		附三百五十五第
(435)		附三百五十六第
(436)		附三百五十七第
(437)		附三百五十八第
(438)		附三百五十九第
(439)		附三百六十第
(440)		附三百六十一第
(441)		附三百

第一章 重点知识

第一讲 从大纲、考纲和高考谈数学复习

教学大纲体现了国家对中学教学的具体要求. 教学大纲、课本和考试大纲 (即考试说明) 既是高考复习的依据, 也是高考命题的依据. 本讲从近几年高考理科数学试题分析中提炼出的信息, 结合教学大纲、考试大纲和现行课本, 对高考数学复习谈几点看法, 愿对读者有所帮助.

(一) 近几年高考数学试题的特点

高考数学命题的指导思想是两个“有利”(高校选材, 中学教学); 命题原则是范围不超出中学教学大纲, 试题内容的要求不超过中学所用教材所能达到的程度. 近几年的高考数学试题都严格地遵循上述指导思想和命题原则, 并具有如下特点:

1. 题型稳定

题型结构已经稳定. 试题分选择题、填空题和解答题三种题型. 选择题是四选一型的单项选择; 填空题只要求直接填写结果, 不必写出计算过程或推证过程; 解答题包括计算题、证明题和应用题等. 三种题型分数的百分比大致为: 选择题 45%, 填空题 15%, 解答题 40%.

2. 覆盖面宽

高考数学试题在突出考查重点的同时，加大对知识的覆盖面，使考查基础知识、基本能力、基本联系、基本方法落到实处。高考数学试题对高中课本本章的覆盖率为100%，对课本小节的覆盖率为70%左右，对高中教学大纲规定的128个知识点的覆盖率为62.5%（年平均覆盖率）。

3. 重点突出

“重点知识，重点考查”。坚持考查基本数学思想方法，题目不追求特殊的技巧，而是考查学生必须掌握的通性通法。如数形结合法、待定系数法、分类讨论法、数学归纳法、换元法、配方法、反证法、等价转换思想等。

试题考查热点（出现频数多）和重点（占分比重大）越来越集中在下列知识内容上。

在代数部分，试题侧重考查“四大重点”：函数（含方程，每年19分左右），不等式（每年11分左右），数列（每年12分左右），复数（每年10分左右），突出对函数性态的研究（定义域、值域、单调性、奇偶性、最值、图象、周期）和函数运算的考查，其中主要是幂函数、指数函数、对数函数和二次函数。不等式的考查重点主要是解法，其次是证明。数列的考查重点是等差数列和等比数列。复数的考查重点是复数的基本概念和基本运算。

在三角部分，重点考查和差倍半、和积互化等公式在三角函数式的恒等变形、求值化简中的应用。其次是三角函数的概念和性质。

在立体几何部分，试题明显侧重于对直线和平面关系，尤其是垂直关系的考查，即立体几何试题以线面垂直为主线，平

垂角距每年都考. 一些常见的多面体和旋转体性质、面积、体积也是考查的热点.

在解析几何部分, 重点考查直线与二次曲线的位置关系, 椭圆、双曲线、抛物线的定义、方程、性质及其应用. 解析几何知识和代数知识常被综合起来作为压轴题.

4. 搭配合理

代数、三角、立体几何和解析几何所占分数的百分比与它们在教学中所占课时的百分比大致相同, 分别约占 36%, 24%, 20%, 20%.

5. 源于课本

为引导中学教学注重基础和重视课本, 每年试题中有一部分摘自课本或由课本例题、习题改编而来, 几乎每一道试题都能在课本上找到原型. 摘自课本的高考数学解答题举例见表 1-1, 选择题和填空题更不胜数.

6. 难度合适

高考数学试题由易到难安排, 整个试卷的梯度很明显, 难度曲线总的趋势由高到低逐渐下降, 如 1992 年试题 (见附图 2), 1991 年试题 (见附图 3), 试题越难, P 值越小, 难度曲线下降.

从难度曲线上我们还可以看出两点: 一是选择题、填空题中有难度中等的题, 解答题中有容易题; 二是难度曲线并不单调, 在三类题型的衔接处附近出现波谷, 这表明选择题的最后一二题比紧靠它的填空题要难, 填空题的最后一二道题比紧靠它的解答题要难.

试卷总体难度符合考生实际, 符合考纲规定 (在 0.55 左右), 见附图 1 (近九年高考理科数学试卷总体难度曲线), 只

是 1992 年试卷总体难度稍偏易。

(二) 高考数学复习的基本要求

通过复习, 进一步加强对基本概念、基础知识、基本计算技能、基本解题和证题方法的掌握以及基本逻辑思维的训练; 提高运用数学思想方法的能力; 提高灵活和综合运用知识的能力。

(三) 三阶段(或两阶段)的复习方法

高考复习一开始, 就得在老师的指导下, 结合自己实际, 拟出复习计划。复习要课内、外结合, 要注意与老师的复习教学同步。

实践表明, 三阶段的复习方法是行之有效的。

第一阶段, 基础复习阶段。全面系统、夯实基础, 以课本单元知识为序对知识作纵向复习。

在这个阶段内, 复习的重点是把课本上的知识内容, 从“基础”这一要求上, 作系统的全面的温习, 整理一遍。首先要解决的是对概念、定义、定理、公式等必须彻底弄清、弄懂、记准、记牢, 否则其它要求就谈不上了。深刻理解数学概念的含义、定理的条件、结论、证明的思路, 深入搞清公式、规律的来龙去脉以及它们的条件范围等等, 要使众多而又庞杂的知识方法等, 通过这样的知识串连和方法总结, 变成较少而有条理的知识能力之链; 要在头脑中形成清清楚楚的几条线, 而不是模模糊糊一大片; 使厚书变成簿本。这是第一阶段的复习要求与任务, 这个阶段花的时间最长。

第二阶段, 专题复习阶段。专题讲练, 强化重点, 以高

考重点知识和重要方法为单元，对知识作横向复习。本书正是为配合这个阶段复习而编写的，为这个阶段的复习教学提供一本既便于学生自学又便于教师教学的资料。

在这个阶段内，复习的重点是以重点知识和重要方法为专题，要从“巩固、深化、综合、灵活”这一要求上，对知识和技能的内在联系及数学思想方法进行较为深入地剖析，围绕专题进行集中的训练，进一步巩固深化基本概念；熟练基本技能；掌握基本方法；领会数学思想。围绕专题，注意把初中和高中，代数和几何的有关知识综合起来，如将二次函数、一元二次方程、二次三项式、一元二次不等式、二次曲线，这五个“二”放在一起进行类比，以典型例题为载体，从知识因素和方法因素探求解决此类问题的一般规律。

根据上述对高考试题的分析，特别注意分支内知识的综合，打破课本章节界限，如函数知识在数列、不等式、方程中的应用；又如复角公式在三角函数中的应用，再如解析几何基本公式在圆锥曲线中的应用等等。

对于第一阶段复习后存在的薄弱环节，也要作为重点，采取措施。

这个阶段要练一定数量的中等难度的习题，注意培养书面语言表达能力和正确使用数学符号。

第三阶段，模拟练习阶段。模拟考试，适应训练，以成套的试题为单元，对知识作纵向（纵、横）复习。

为提高应试能力，尽量减少偶发因素对考生的心理影响，考前进行成套试题的模拟训练是十分必要的。做模拟练习题一定要定时，要有高考的情景和气氛。若是老师组织的，要认真听评讲课，要认真校对答案及解题过程，注意解题后的

回顾与总结（见第二十讲中解题总结）。有错的地方用红笔作上记号并注明错误原因。特别注意过失性失分问题和答题格式的规范化。

通过模拟训练，不仅强化了基础，提高了能力，而且可以达了解试卷结构、强化应试能力、合理分配时间、设计解题程序、熟悉答题要求等目的。通过训练，努力做到考试时沉着冷静、答题迅速、有良好的心理素质。

根据实际，也可以把第一、第二阶段合并在一起进行。

临考前1~2周的时间，停止练题。这时已不允许你花过多的时间复习数学，但数学也不能丢，怎么办？不同程度的考生都要做好三件事：一是回归课本，再读课本。安排时间首先把课本上的定义、公式、定理等默写几遍，做到准确、熟练。其次把课本例题、习题浏览一遍，遇到“卡壳”的地方认真做一做。二是翻阅练过的模拟题，原来做有记号的地方要想一想，做一做，警惕再错。三是作好高考准备。

（四）高考复习中应注意的几个问题

1. 要高度重视课本

数学课本既是高考数学命题的依据，又是高考数学试题的素材库。许多高考数学试题直接摘自课本或在计算上作某些简化或进行合理推广、拼合、重组而成。从近几年高考数学试题答卷来看，仅举解答题为例，以课本例题、习题作为高考题的得分率不如人意（见表1-1），引起反思。

重视课本，要努力做到“四过关”：准确理解课本上每一个概念；能独立证明课本上每一个定理；熟练求解课本中所有例题；掌握课本中所有习题的类型和解法。

表 1-1

	1992 年	1992 年	1991 年	1991 年
高考题号	(理) 26	(文) 25	(理) 24	(理) 21
乙种本题号	P ₄₂ 例题 2	P ₁₇₇ 复习 题 14 (1)	P ₄₂ 习题 7	P ₅₁ 习题 12
试题内容	异面直线上两 点距离公式	复数方程	函数单调性	等差数列 等比数列
得分率	72%	68%	62% *	70%

2. 注意“双纲”对一些问题的限制

注意教学大纲和考试大纲对一些问题的明确规定和限制，把握好复习的深难度。现摘抄如下，小括号内的内容系作者所加。

(1) 对于用递推公式给出的数列，限于要求根据递推公式写出数列的前几项。(由递推公式求通项不作要求。但是猜想出通项，再用数学归纳法证明仍要要求)

(2) 会求函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的周期，或者经过简单的恒等变形可化为上述函数的三角函数的周期。(也就是说，求三角函数的周期仅限于经过简单的恒等变形后用公式

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} \text{ 或 } T = \frac{\pi}{|\omega|}.$$

(3) 对于异面直线的距离，只要求会计算已给出公垂线时的距离。(“已给出”理解为“已作出”或“易作出”)

(4) 对于截面问题，只要求会解决几种特殊的截面以及已给出图形或它的全部顶点的截面的有关问题。

(5) 球缺体积公式不要求记住。

(6) 理解充分条件、必要条件、充要条件的意义,能够初步判断给定的两个命题的充要关系。(考纲比大纲具体)

(7) 不要求利用曲线的参数方程或极坐标方程求两条曲线的交点.

3. 重视提高运算能力

数学教学大纲上第一个能力的要求就是运算能力,包括数字运算、代数式运算、指对数运算、三角式运算等.近几年来,运算已成为得分的主要手段,甚至立体几何的解答题也是既证又算.每年试题中通过运算得分占 80% 左右.

数学运算远不同于会计账目的计算,它包含了概念、判断、公式、推理、方法等一系列知识和技能.复习时,注意准确理解、牢固掌握数学概念,这是进行正确运算的前提;注意从数学概念和基本方法中不断提高运算技巧;要在选用方法的合理性,推导过程的正确性,书写表述的规范性以及运算推理的时效性上下功夫.

4. 克服解题中存在的不良倾向

高考复习中要做一定数量的习题.为什么有的人题“做”得不少,收获不大?究其原因,一是侥幸心理,认为这道题不会遇到,故不去解答,或解答不出来也不去“打破砂锅问到底”;二是眼高手低,只“看”题,知道大概思路就过去了,一看就“懂”,一做就错;三是一解了之,解出一道题之后,在喜挂眉梢的同时,把它束之高阁.克服前两者要多动笔,克服后者要多总结、多消化(见第二十讲),这样才能以少胜多,“解”有所获.

5. 时间分配

根据教学大纲安排的课时比和高考数学各分支所占分值

比，总复习时间的大致分配为，《代数》、《三角》、《立体几何》、《解析几何》按2:1:1:1安排。（但《三角》可占五分之一弱，《解析几何》占五分之一强）

6. 总体难度

考试大纲规定数学试卷总体难度控制在 0.55 左右。故 1993 年高考数学总复习的总体难度把握在 1991 年（而不是 1992 年）高考数学试卷的总体难度水平上为宜。

第二讲 函 数

复习导言

函数是中学数学的重要内容之一，它贯穿于数学理论和应用的每一个场合，既是整个中学代数的一条主线，又是进一步学习高等数学必备的基础知识。“高考数学试题以函数为纲”，足见其重要性。

在全面系统地复习了函数的概念之后，这里复习的重点应该是深化对函数定义域和值域、单调性和奇偶性、最大值和最小值等概念的理解；对二次函数、幂函数、指数函数、对数函数的概念、图象和性质作进一步的研究；注意函数思想在方程、不等式、数列以及三角和解析几何中的运用；会用运动、变化的观点分析具体问题中变量间的函数关系；进一步探索函数思想、数形结合的方法在中学数学中的应用。

集合，也是本专题内容之一。

范例分析

例1 已知集合 $A, B, C: A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$,
 $B = \{x | \log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\}$, $C = \{x | x^2 + 2x - 8 = 0\}$,
且 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, 求 a 的值。

解 $\because B = \{2, 3\}$, $C = \{-4, 2\}$.

又 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$.

$\therefore 3 \in A$.

把 $x=3$ 代入 $x^2 - ax + a^2 - 19 = 0$ (*), 于是

$$a^2 - 3a - 10 = 0,$$

$\therefore a = -2$ 或 5 .

若 $a = -2$, 代入 (*), 有 $x^2 + 2x - 15 = 0$, 这时

$$A = \{-5, 3\},$$

若 $a = 5$, 代入 (*), 有

$$x^2 - 5x + 6 = 0, \text{ 这时 } A = \{2, 3\},$$

但 $A \cap C = \{2\} \neq \emptyset$, 这与题设矛盾, 故 $a = 5$ 舍去.

$\therefore a$ 的值为 -2 .

注意 求出 a 值以后, 代入 (*) 进行检验. 否则会错误地认为 $a = -2$ 或 5 .

例 2 如图 2-1, $\triangle OAB$ 是边长为 3 的正三角形, 直线 $x=t$ 与 OA 相交. (1) 求阴影部分的面积 S 随 t 变化的关系式; (2) 画出 $S(t)$ 的图象.

分析 这是由实际问题建立函数关系式. 这里当直线 $x=t$ 沿 x 轴正方向运动, 经过 B 点以后, 阴影部分面积不再是三角形的面积 (如图 2-2), 故面积 S 是 t 的分段函数.

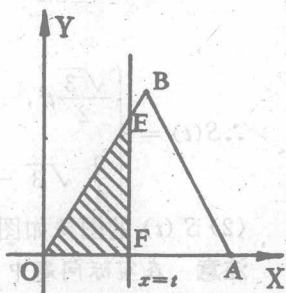


图 2-1

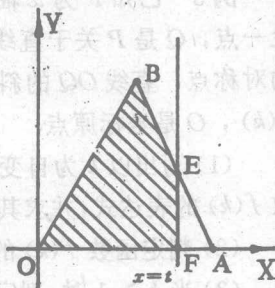


图 2-2

解 (1) 设直线 $x = t$ 与 $\triangle OAB$ 相交于 E, F 两点.

当 $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ 时, $S(t) = S_{\triangle OEF} = \frac{1}{2} |OF| \cdot |EF|$

$$= \frac{1}{2} t \cdot t \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} t^2.$$

当 $\frac{3}{2} < t \leq 3$ 时, $S(t) = S_{\triangle OAB} - S_{\triangle AEF}$

$$= \frac{9}{4} \sqrt{3} - \frac{1}{2} (3-t) \cdot (3-t) \tan 60^\circ$$

$$= \frac{9}{4} \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} (3-t)^2.$$

$$\therefore S(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} t^2, & (0 \leq t \leq \frac{3}{2}) \\ \frac{9}{4} \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} (3-t)^2, & (\frac{3}{2} < t \leq 3) \end{cases}$$

(2) $S(t)$ 的图象如图 2-3.

注意 在实际问题中, 要考虑到自变量 x 所代表的具体量的允许值范围 (如这里 $0 \leq t \leq 3$).

例 3 已知 P 为 x 轴正半轴上一点, Q 是 P 关于直线 $y = kx$ 的对称点, 直线 OQ 的斜率记作 $f(k)$, O 是坐标原点.

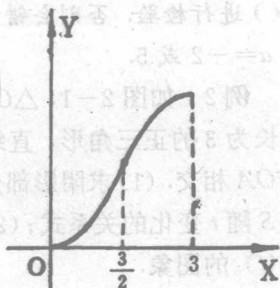


图 2-3

(1) 写出以 k 为自变量的函数 $f(k)$ 的表达式, 并求其定义域;

(2) 判定函数 $f(k)$ 的奇偶性;

(3) 当 $k > 1$ 时, 判定 $f(k)$ 的增减性.

解 (1) 设直线 $y = kx$ 的倾斜角为 θ , 如图 2-4,