北大燕园

李永乐·李正元考研数学①

2005年版

数学复习全书

【理工类】

主编　北京大学 李正元
　　　清华大学 李永乐
　　　中国人民大学 袁荫棠

策划　高联

国家行政学院出版社

李永乐·李正元考研数学①（2005年版）

数学复习全书

【理工类】

主编　北京大学　李正元
清华大学　李永乐
中国人民大学　袁荫棠
编者　（按姓氏笔画）
北京大学　李正元
清华大学　李永乐
北京大学　刘西垣
中国人民大学　严　颖
北京大学　范培华
中国人民大学　袁荫棠
空军雷达学院　徐宝庆
东北财经大学　龚兆仁
天津财经学院　鹿立江
策划　高联

国家行政学院出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

2000年全国硕士研究生入学考试数学复习全书:理工类/李正元等主编.
-北京:国家行政学院出版社,1999.4
ISBN 7-80140-053-4

Ⅰ.20… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-学习参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第09620号

数学复习全书(2005年版)

[理工类]

李正元 李永乐 袁荫棠 主编

*

国家行政学院出版社出版发行

北京市海淀区长春桥路6号

邮政编码:100089

发行部电话:68920615

新华书店经销

北京市朝阳印刷厂印刷

*

787×1092 1/16开本 37.25印张 1000千字

2004年2月第6版 2004年2月第1次印刷

ISBN 7-80140-053-4/O·1 定价:49.80元

第六版前言

6.7

本书出版、修订五年多来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同
肯定，认为本书在编写体例上有"特色"，在内容讲解、试题分析与解答上
透彻、易懂，较"适合考生的需要"。我们从反馈的信息中获悉，除报考硕士
生的考生将本书用作应试复习参考书外，工科类在读大学生也将本书作为数学
习辅导资料，而教师则作为主要的教学参考用书之一。这既是对我们工作的肯
鼓励，也是一种鞭策，促使我们对本书进行一次全面修订，以便及时反映当前
生最新考试信息，更好地适应和满足广大考生和读者考试复习的需要。2005 年《全
书》（修订第六版）将以更高的质量和新的面貌呈现在广大学生的面前。

本书 2005 年版是在 2004 年版的基础上进行修订的，更加完善，更具有针对性和适用性。

高等数学部分： 按考试大纲的要求及绝大多数考生系统复习的需要，本书进行了大幅度调整，宗旨是重点内容重点讲解，如：求极限的方法，求积分（一元、多元函数）的方法，二重积分的计算与应用，泰勒公式及其应用，数学建模，求幂级数的收敛域或收敛区间，幂级数的求和，求函数的幂级数展开式等单独分离出来进行举例讲解，同时调换并增加了若干典型例题，并修改了部分例题的解法，使之更简捷，更易掌握。

线性代数部分： 主要是针对一些重点概念和公式的运用，调换并增加了若干例题进行讲解，使考生对这些重点概念和公式能彻底理解、吃透，对一些常考题型，如：抽象行列式的计算，有关伴随矩阵的命题，n 阶矩阵的特征值和特征向量以及线性相关与无关的证明、基础解系的证明等题型的解题方法和技巧进一步作了较详尽的归纳总结，并给典型例题进行讲解，消除考生对这些重要概念和公式的运用和常考题型解题方法的疑惑，以便考生在考试中应对自如，提高应试水平。

概率统计部分： 与高等数学部分一样也进行了大幅度调整，调整后更适合考生进行系统复习，同时对重点概念、公式和常考题型从多角度命制典型例题进行讲解，以提高考生运用概念、公式综合分析能力，从而取得好成绩。

本书的高等数学部分由**北京大学李正元**修改完成，线性代数部分由**清华大学李永乐**修改完成，概率论与数理统计部分由**中国人民大学袁荫棠**修改完成。

编者

2004 年 2 月

前　言

为了使考研同学能在较短时间内全面复习数学，达到硕士学习阶段应具备的数
力，提高考研应试水平，以合格的数学成绩任国家挑选，作者根据教育部制订
数学考试大纲》的要求和最新精神，深入研究了近年来考研命题的特点及动
并结合作者多年来数学阅卷以及全国大部分城市“考研班”辅导的经验，编写
本《考研数学复习全书》及其姊妹篇《考研数学全真模拟经典400题》。在编
，作者特别注重与学生的实际相结合，注重与考研的要求相结合。

本书每章均由以下四个部分构成：

一、内容概要与重难点提示——编写该部分的目的主要使考生能明确本章的重点、难点及常考点，让考生弄清各知识点之间的相互联系，以便对本章内容有一个全局性的认识和把握。

二、考核知识要点讲解——本部分对大纲所要求的知识点进行了全面地阐述，并对考试重点、难点以及常考点进行了剖析，指出了历届考生在运用基本概念、公式、定理等知识解题时普遍存在的问题及常犯的错误，同时给出了相应的注意事项，以加深考生对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

三、常考题型及其解题方法与技巧——本部分对历年统考中常见题型进行了归纳分类，归纳总结了各种题型的解题方法，注重一题多解，以期开阔考生的解题思路，使所学知识融会贯通，并能综合、灵活地解决问题。

四、题型训练及参考答案——本部分精选了适量的自测题，并附有参考答案和解题提示。只有适量的练习才能巩固所学知识，复习数学必须做题。为了让考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，作者特优化设计了与真题相仿的实战训练题编写在《考研数学全真模拟经典400题》一书中，以供考生选用。

特别需要强调的是，在’98北大百年校庆之际，我们北大数学系63届校友聚会于北大燕园，畅谈中得知我们当中许多同学都在从事本科及研究生数学教学与数学研究工作，并有多年考研辅导的经验以及参加研究生入学考试阅卷的经历，对各类院校的考生有广泛的接触与了解，深知考生在考研数学备考中所面临的困惑。为了帮助考生全面系统并有针对性地复习，在大家的一致建议下，由我们执笔编写了这本《考研数学复习全书》及其姊妹篇《考研数学全真模拟经典400题》，期望对广大考生备考能有所裨益。

本书是考研应试者的良师益友，也是各类院校的学生自学数学、提高数学水平和教师进行教学辅导的一本极有价值的参考书。

由于时间仓促，书中疏漏之处在所难免，诚请专家和读者指正。

编　者

1999年4月于北大燕园

目录

第一篇　高等数学

第二篇 线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限、连续与求极限的方法

内容概要与重难点提示

1. 微积分中研究的对象是函数. 函数概念的实质是变量之间确定的对应关系. 变量之间是否有函数关系,就看是否存在一种对应规则,使得其中一个量或几个量定了,另一个量也就被唯一确定,前者是一元函数,后者是多元函数.

函数这部分的重点是:复合函数、反函数和分段函数及函数记号的运算.

2. 极限是微积分的理论基础. 研究函数的性质实质上是研究各种类型的极限,如连续、导数、定积分、级数等等. 由此可见极限的重要性. 本章的重点内容是极限. 既要准确理解极限的概念,性质和极限存在的条件,又要能准确地求出各种极限. 求极限的方法很多,综合起来主要有:

① 利用极限的四则运算与幂指数运算法则;　② 利用函数的连续性;

③ 利用变量替换与两个重要极限;　④ 利用等价无穷小因子替换;

⑤ 利用洛必达法则;　⑥ 分别求左、右极限;

⑦ 数列极限转化为函数极限;　⑧ 利用夹逼定理;

⑨ 对递归数列先证明极限存在(常用到"单调有界数列有极限"的准则),再利用递归关系求出极限;

⑩ 利用定积分求和式的极限;　⑪ 利用泰勒公式;

⑫ 利用导数的定义求极限.

3. 无穷小就是极限为零的变量. 极限问题可归结为无穷小问题. 极限方法的重要部分是无穷小分析,或说无穷小阶的估计与分析. 要理解无穷小及其阶的概念,学会比较无穷小的阶及确定无穷小阶的方法,会用等价无穷小因子替换求极限.

4. 我们研究的对象是连续函数或除若干点外是连续的函数. 由于函数的连续性是通过极限定义的,所以判断函数是否连续及函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限. 因此这部分也是本章的重点. 要掌握判断函数连续性及间断点类型的方法,特别是分段函数在连接点处的连续性.

考核知识要点讲解

一、函　　数

(一) 函数概念

函数关系的实质是变量之间的一种确定的对应关系. 定义域与对应规则是决定因素,有了它们函数的值域就自然被确定.

函数不依赖于对应规则的表现形式. 一个函数可能没有表达式,即使有表达式也可能在整个定义域上在自变量的不同变化范围,对应规则用不同的式子来表示,这就是所谓分段函数.

常量与变量,自变量与因变量是相对的. 一个量在某个过程中是常量,在另一过程中可以是变量,

一个量在某个过程中是自变量，在另一过程中可以是因变量，这一点既简单又重要．例如：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

在极限过程 $\Delta x \to 0$ 中 x 是常量．求完了极限，x 可以是变量，$f'(x)$ 成为 x 的函数，它是 $f(x)$ 的导函数．$y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 的复合函数中 u 是中间变量，它在函数 f 中是自变量，在函数 g 中是因变量．

（二）几类常见的函数

1. 有界函数　若存在正数 M 使得 $\forall x \in X$ 有 $|f(x)| \leq M$，则称 $f(x)$ 是 X 上的有界函数或 $f(x)$ 在 X 上有界．它的几何意义是：函数图形界于直线 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间．

2. 奇函数与偶函数　设区间 X 关于原点对称（若 $x \in X$，则 $-x \in X$），若 $\forall x \in X$，有 $f(x) = f(-x)$（$f(x) = -f(-x)$），则称 $f(x)$ 在 X 上是偶函数（奇函数）．它的几何意义是：奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称．

3. 单调函数　设 $f(x)$ 定义在区间 X 上，$\forall x_1, x_2 \in X$，若 $x_1 < x_2$，有 $f(x_1) < f(x_2)$（$f(x_1) > f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 X 上单调增加（单调减少）．它们统称为单调函数．$\forall x_1, x_2 \in X$，若 $x_1 < x_2$，有 $f(x_1) \leq f(x_2)$（$f(x_1) \geq f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 X 上单调不减（单调不增）．

4. 周期函数　设 $f(x)$ 定义在 X 上，若存在常数 $T \neq 0$，满足：$\forall x \in X$，有 $x \pm T \in X$ 且 $f(x+T) = f(x)$（$\forall x \in X$），则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期．它的几何意义是：自变量每增加或减少一固定的距离 T 后，图形重复出现．

若 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $f(x)$ 有无穷多个周期，$nT(n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 均为周期．若 $f(x)$ 的无穷多个正周期中存在最小数，称它为 $f(x)$ 的最小正周期，简称**最小周期或周期**．

【例 1.1】　设 $f(x) = x\tan x e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是（　　）．

（A）偶函数　　（B）无界函数　　（C）周期函数　　（D）单调函数

【分析一】　由 $e^{\sin x}$ 有正下界：$e^{\sin x} \geq e^{-1}$ 及 $x\tan x$ 无界，可证 $f(x)$ 无界．

因 $x\tan x$ 无界，则 $\forall M > 0$，$\exists x_0 \in$ 定义域，$|x_0 \tan x_0| > Me$，进而 $|f(x_0)| = |x_0 \tan x_0 e^{\sin x_0}| \geq Me \cdot e^{-1} = M$，即 $f(x)$ 无界．因此选（B）．

【分析二】（排除法）　由于 $f(-x) = (-x)\tan(-x)e^{\sin(-x)} = x\tan x e^{-\sin x} \neq f(x)$，当 $\sin x \neq 0$ 时，$f(x)$ 不是偶函数．由 $f(0) = f(\pi) = 0$，知 $f(x)$ 不是单调函数．又 $f(x)$ 也不是周期函数，因此选（B）．

（三）复合函数

设函数 $y = f(u)$，定义域 $D_f = U$，又有函数 $u = g(x)$，定义域 $D_g = X$，值域 $R_g = U'$．若 $U' \subset U$，可以在 X 上确定一个函数 $y = f(g(x))$，称为 $u = g(x)$ 与 $y = f(u)$ 的复合函数．

若 $R_g \cap D_f = \varnothing$，则不能构成复合函数 $y = f(g(x))$；

若 $R_g \subset D_f$，则可构成复合函数 $y = f(g(x))$，定义域为 X；

若 $R_g \cap D_f \neq \varnothing$，$R_g \not\subset D_f$，则可构成复合函数 $y = f(g(x))$，定义域包含在 X 中，但 $\neq X$．

【例 1.2】　设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases}$　$g(x) = e^x$，　求 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$．

【解】　基本思路是弄清两个函数定义域与值域的关系．

$$g(f(x)) = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$$

求 $f(g(x))$ 时，首先要考察：x 在什么范围内 $|g(x)| = e^x < 1$，> 1 或 $= 1$．

由于 $|g(x)| = e^x \begin{cases} <1 & , x<0, \\ =1 & , x=0, \\ >1 & , x>0, \end{cases}$ 因此 $f(g(x)) = \begin{cases} 1 & , x<0, \\ 0 & , x=0, \\ -1 & , x>0. \end{cases}$

（四）反函数

设有 $y=f(x)$，$D_f = X$，$R_f = Y$，若 $\forall y \in Y$，有唯一确定的 $x \in X$ 使得 $f(x)=y$，由此对应关系在 Y 上确定一个函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上，记 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$.

$y=f(x)$，$x \in X$ 且存在反函数 $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 特别地，若 $y=f(x)$ 在 X 上单调，则 $y=f(x)$ 在 X 上 $\exists$ 反函数. 存在 唯一对应

函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 有如下关系：

1° 若 $D_f = X$，$R_f = Y$，则 $D_{f^{-1}} = Y$，$R_{f^{-1}} = X$；

2° $f(f^{-1}(y)) = y \ (\forall y \in Y)$，$f^{-1}(f(x)) = x \ (\forall x \in D_f)$；

3° $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于 $y=x$ 对称，而 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形重合.

【例 1.3】 求 $y=f(x)= \begin{cases} 1-2x^2 & , x<-1 \\ x^3 & , -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 12x-16 & , x>2 \end{cases}$ 的反函数.

【解】 当 $x<-1$ 时，$y=1-2x^2<-1$，则 $x=-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}$（另一舍去）；

当 $-1 \leqslant x \leqslant 2$ 时，$y=x^3 \in [-1,8]$. $\forall y \in [-1,8]$，由 $y=x^3$，知 $x=\sqrt[3]{y}$；

当 $x>2$ 时，$y=12x-16>8$. $\forall y>8$，$y=12x-16$，知 $x=\dfrac{y+16}{12}$.

因此，反函数 $y=f^{-1}(x)= \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{1-x}{2}} & , x<-1, \\ \sqrt[3]{x} & , -1 \leqslant x \leqslant 8, \\ \dfrac{x+16}{12} & , x>8. \end{cases}$

（五）初等函数

由六类基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算而得到的一切函数称为初等函数.

六类基本初等函数即指：

$y=c$（常数）； $y=x^\alpha$； $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$； $y=\log_a x\ (a>0, a \neq 1)$；

$y=\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$； $y=\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$.

（六）常见的函数形式

初等函数，隐函数 $(x-y+e^{xy}=0)$，由参数方程确定的函数 $(x=\cos^3 t, y=\sin^3 t)$，由变限积分确定的函数 $\left(y=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt\right)$，分段函数，由函数项级数确定的函数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 以及由极限确定的函数等等.

二、极限的概念与性质

（一）极限的定义

【定义 1.1】 $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$： $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $|a_n - A| < \varepsilon$.

若 a_n 存在极限（有限数），又称 $\{a_n\}$ 收敛，否则称 $\{a_n\}$ 发散.

【定义 1.2】 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$：$\forall \varepsilon > 0, \exists$ 正数 X，当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

类似可定义：$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A, \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

【定义 1.3】 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$： $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 正数 δ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

类似可定义：$f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$， $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

（二）极限的基本性质与两个重要极限

1. 数列极限的基本性质

【定理 1.1】（极限的不等式性质） 设 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a, \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = b$.

若 $a > b$，则 $\exists N$，当 $n > N$ 时，$x_n > y_n$； 若 $n > N$ 时，$x_n \geqslant y_n$，则 $a \geqslant b$.

【定理 1.2】（极限的唯一性） 设 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a, \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = b$，则 $a = b$.

【定理 1.3】（收敛数列的有界性） 设 x_n 收敛，则 x_n 有界（即 $\exists$ 常数 $M > 0$，$|x_n| \leqslant M, n = 1,2,\cdots$）.

2. 函数极限的基本性质

【定理 1.4】（极限的不等式性质） 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$.

若 $A > B$，则 $\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) > g(x)$；

若 $f(x) \geqslant g(x)$ $(0 < |x - x_0| < \delta)$，则 $A \geqslant B$.

【推论】（极限的保号性） 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. 若 $A > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) > 0$. 若 $f(x) \geqslant 0$ $(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow A \geqslant 0$.

【定理 1.5】（极限的唯一性） 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$，则 $A = B$.

【定理 1.6】（存在极限的函数局部有界性） 设存在极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $U_0(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界，即 $\exists \delta > 0, M > 0$ 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x)| \leqslant M$.

【注】 其他的极限过程如 $x \to x_0 + 0, x \to x_0 - 0, x \to +\infty, x \to -\infty$ 等等也有类似的结论.

3. 两个重要极限

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e} \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1 \tag{1.1}$$

【例1.4】 求下列极限：(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 \sin \frac{1}{x} + 2\sin x}{x}$； (2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x \ln a}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} + \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2\sin x}{x} = 3 + 0 = 3$； (2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x \ln a} \xlongequal{t = a^x - 1} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{\ln(1 + t)} = 1$.

评注 要注意重要极限成立的条件，不要混淆，应熟悉等价表达式.

三、极限的存在与不存在问题

（一）数列敛散性的判别

【定理 1.7】（夹逼定理） 若 $\exists N$，当 $n > N$ 时，$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且有 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$，则

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a.$$

【定理 1.8】（单调有界数列必收敛定理） 若数列 x_n 单调上升有上界，即 $x_{n+1} \geqslant x_n$ $(n = 1,2,\cdots)$ 并存在一个数 M 使得对一切的 n 有 $x_n \leqslant M$，则 x_n 收敛．即存在一个数 a，使得

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a，且有 x_n \leqslant a \ (n = 1,2,\cdots).$$

若数列 x_n 单调下降有下界，即 $x_{n+1} \leqslant x_n (n = 1,2,\cdots)$，并存在一个数 m，使得对一切的 n 有 $x_n \geqslant m$，则 x_n 收敛．即存在一个数 a 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$，且有 $x_n \geqslant a \ (n = 1,2,\cdots)$．

此外，还可通过数列与级数的关系讨论敛散性：x_n 的敛散性与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 的敛散性相同．因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 的部分和数列是 $\{x_{n+1} - x_1\}$．

$a_n \leqslant a_{n+1}$．单调

【例 1.5】 设 $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$， 试证：$\{a_n\}$ 收敛．

【证明】 易见 $a_n \leqslant a_{n+1}$ $(n = 1,2,\cdots)$，只须再证 a_n 有上界：

$$a_n \leqslant 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

因此，利用单调有界数列必收敛定理即得结论．

（二）函数 $y = f(x)$ 的极限的存在与不存在问题

【定理 1.9】（夹逼定理） 设 $\exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，又 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$．

【注】 其他的极限过程也有类似的结论．

【定理 1.10】（单侧极限与双侧极限的关系） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$．

对于分段函数 $f(x) = \begin{cases} g(x), & x_0 - \delta < x < x_0, \\ h(x), & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases}$ 考察 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在就要分别求

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} h(x) \quad 与 \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} g(x).$$

【例 1.6】 设 $f(x) = \begin{cases} a\dfrac{\sin x - x}{x^3}, & x > 0, \\ \dfrac{1}{x}\left(2\sin x - \displaystyle\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t\right), & x < 0, \end{cases}$ 问 a 为何值时 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在．

【分析】 分别求右、左极限 $f(0+0)$ 与 $f(0-0)$，由 $f(0+0) = f(0-0)$ 定出 a 值．

【解】 $f(0+0) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+}\left(a\dfrac{\sin x - x}{x^3}\right) \xlongequal{\frac{0}{0}型} \lim\limits_{x\to 0+} a\dfrac{\cos x - 1}{3x^2} = -\dfrac{a}{6}$，

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0-} f(x) = 2 - \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t\right)'}{(x)'} = 2 - \lim_{x\to 0}\sin x^2 = 2.$$

由 $f(0+0)=f(0-0)$，得 $-\frac{a}{6}=2$，即 $a=-12$. 因此，仅当 $a=-12$ 时，存在 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$.

【例 1.7】 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2e^{\frac{1}{x-1}}$ 是(　　).

(A) 0　　(B) $-\infty$　　(C) $+\infty$　　(D) 不存在但不是 ∞

【分析】 因 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty$，$\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$. 故要分别考察左、右极限.

【解】 $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^2e^{\frac{1}{x-1}}\xlongequal{t=\frac{1}{x-1}}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^2}=+\infty$，　$\lim\limits_{x\to 1-0}(x-1)^2e^{\frac{1}{x-1}}\xlongequal{t=\frac{1}{x-1}}\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{e^t}{t^2}=0$.

因此选(D).

评注　证明一元函数 $f(x)$ 的极限不存在常用的两种方法是：

1°　若 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在. 当 $x\to\infty$ 时的极限式中含有 $a^x(a>0,a\neq 1)$，或 $\arctan x$，$\text{arccot}x$，一定要分别求出 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 的极限值，若两者相等，则 $x\to\infty$ 时的极限存在，否则不存在.

2°　若 $\exists x_n\to x_0$，$x_n\neq x_0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$ 不存在或 $\exists x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$，$y_n\to x_0(y_n\neq x_0)$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to+\infty}f(y_n)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

【例 1.8】　证明　$\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在.

【证明】 取 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$，　$y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则均有 $x_n\to 0$，$y_n\to 0$ $(n\to+\infty)$，但

$$\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{1}{x_n}=1,\quad \lim_{n\to+\infty}\cos\frac{1}{y_n}=0.\quad 因此\quad \lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}\ 不存在.$$

四、无穷小及其阶

(一) 无穷小与无穷大的定义

【定义 1.4】　在某一极限过程中以零为极限的变量称为无穷小(量).

(1) 称 x_n 为无穷小，若 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$(记为 $x_n=o(1)$ $(n\to+\infty)$)；

(2) 称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷小，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$(记为 $f(x)=o(1)$，$x\to x_0$).

【定义 1.5】 (1) 称 x_n 为**无穷大(量)**($\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\infty$)，若 $\forall M>0$，$\exists$ 自然数 N，当 $n>N$ 时，$|x_n|>M$.

(2) 称 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 为**无穷大(量)**($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$)，若 $\forall M>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，$|f(x)|>M$.

(3) 称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为**无穷大(量)**($\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$)，若 $\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|f(x)|>M.$$

类似可定义正无穷大(量)和负无穷大(量).

注意：我们说 x_n 存在极限，即指 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 为有限值. 若 x_n 为无穷大量，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\infty$，则 x_n 是属于极限不存在的情形.

（二）无穷小与无穷大、无穷小与极限的关系

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

在同一个极限过程中，$\begin{cases} f(x)\text{ 为无穷小}, f(x)\neq 0, \text{则}\dfrac{1}{f(x)}\text{ 为无穷大}. \\ f(x)\text{ 为无穷大}, \text{则}\dfrac{1}{f(x)}\text{ 为无穷小}. \end{cases}$

（三）无穷小阶的概念

【定义 1.6】 设在同一个极限过程中，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 为无穷小且存在极限 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l$.

(1) 若 $l\neq 0$，称 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 在该极限过程中为**同阶无穷小**；

(2) 若 $l=1$，称 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 在该极限过程中为**等价无穷小**，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$（极限过程）；

(3) 若 $l=0$，称在该极限过程中 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的**高阶无穷小**，记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$（极限过程）.

若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在（不为 ∞），称 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 不可比较.　　低阶无穷小

【定义 1.7】 设在同一个极限过程中 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 为无穷小，以 $\alpha(x)$ 为基本无穷小. 若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha^k(x)}=l\neq 0$ （即 $\beta(x)$ 与 $\alpha^k(x)$ 为同阶无穷小），称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 ***k* 阶无穷小**.

（四）重要的等价无穷小

$x\to 0$ 时			
$\sin x\sim x$,	$\ln(1+x)\sim x$,	$\tan x\sim x$,	$\arcsin x\sim x$,
$e^x-1\sim x$,	$\arctan x\sim x$,	$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,	
$a^x-1\sim x\ln a$,	$(1+\beta x)^\alpha-1\sim\alpha\beta x$.		

βx α　$(1+\beta x)$

(1.2)

$a^x-1\sim x\ln a$　　e　　a^x

（五）等价无穷小的重要性质

1° 若 $x\to a$ 时，$\alpha(x)\sim\alpha^*(x)$，$\beta(x)\sim\beta^*(x)$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}. \tag{1.3}$$

该结论表明：在求极限过程中等价无穷小因子可以替换.

2° $\alpha(x)\sim\beta(x)\ (x\to a)\Leftrightarrow\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x))\ (x\to a)$.

【例 1.9】 求 $w=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{x^2}$.

【解】 $x\to 0$ 时，$t=(1+x)^x-1\to 0$，则 $(1+x)^x-1=t\sim\ln(1+t)=\ln(1+x)^x=x\ln(1+x)$，用等价无穷小因子替换得

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{x^2}=1.$$

评注 ① 这是$\dfrac{0}{0}$型极限，若用洛必达法则需要求导：

$$((1+x)^x)'=(e^{x\ln(1+x)})'=(1+x)^x\left(\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right).$$

于是 $w = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{((1+x)^x)'}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x\left[\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}\right]}{2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)\ln(1+x)+x}{2x} = 1.$

② 在求极限过程中，积、商可用等价无穷小替换，等价无穷小因子替换常会给计算带来方便.

(六) 确定无穷小阶的方法

设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$，如何确定 $f(x)$ 是 $x-a$ 的几阶无穷小？常用如下方法：

1° **利用洛必达法则** 确定 $k>0$ 使得 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^k} = A \neq 0$，则 $x\to a$ 时，$f(x)$ 是 $x-a$ 的 k 阶无穷小.

2° **用泰勒公式** （见第五章三（二））

3° **利用无穷小阶的运算性质**

如若 $x\to a$ 时，$f(x)$，$g(x)$ 分别是 $x-a$ 的 n 阶与 m 阶无穷小，则 $f(x)g(x)$ 是 $x-a$ 的 $(n+m)$ 阶无穷小. 当 $n<m$ 时，$f(x)+g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小.

判断 $x\to a$ 时，无穷小 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否同阶、等价的最基本方法是求 $\dfrac{0}{0}$ 型极限，即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l\neq 0 \text{ 且 } \neq 1, & \text{同阶而不等价}, \\ 1, & \text{等价}, \\ 0, & f(x)\text{ 比 } g(x)\text{ 高阶}, \\ \infty, & g(x)\text{ 比 } f(x)\text{ 高阶}. \end{cases} \tag{1.4}$$

【例 1.10】 当 $x\to 0$ 时 $f(x) = \int_0^{\sin x}\sin t^2\,dt$ 与 $g(x) = x^3 + x^4$ 比较是（　　）的无穷小.

（A） 等价　　（B） 同阶非等价　　（C） 高阶　　（D） 低阶

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} \xlongequal{\frac{0}{0}\text{型}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin^2 x)\cos x}{3x^2} = 1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2} = \dfrac{1}{3}.$ 因此选(B).

【注】 计算中除了用洛必达法则外，还用了等价无穷小因子替换：

$g(x)\sim x^3$，$\sin(\sin^2 x)\sim\sin^2 x\ (x\to 0)$.

五、函数的连续性及其判断

(一) 连续性概念

【定义 1.8】

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，称 $f(x)$ 在 x_0 连续.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ （$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$），称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 右（左）连续.

(3) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内任一点均连续，称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

(4) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 连续，在 $x=a$ 右连续，在 $x=b$ 左连续，称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

【定理 1.11】（单双侧连续性的关系） $f(x)$ 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 既左连续又右连续.