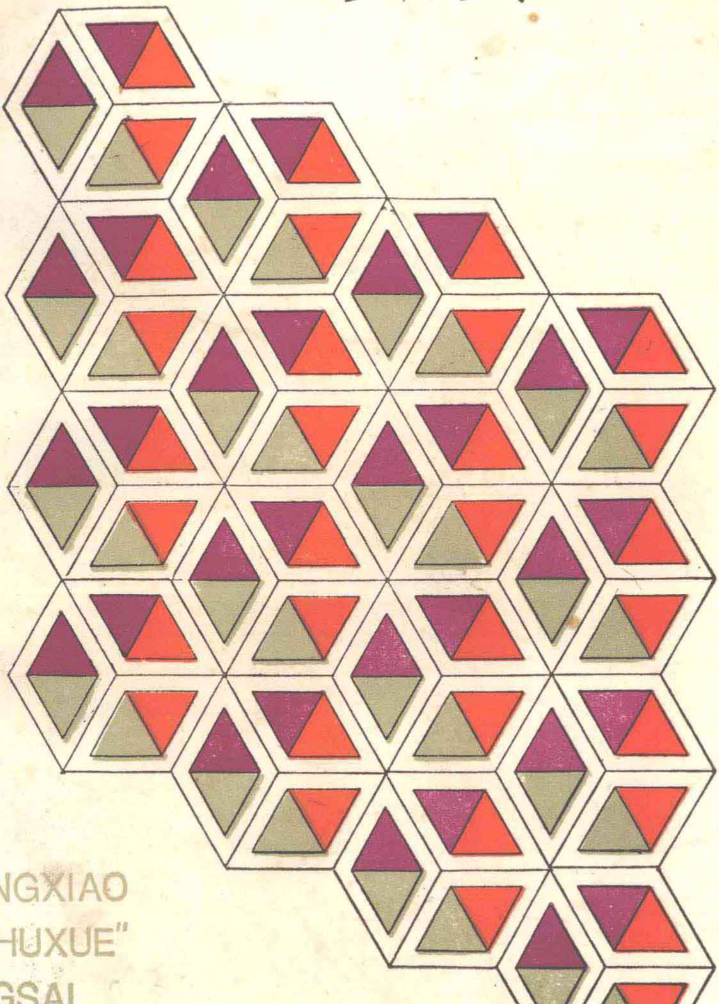
“从小爱数学”竞赛入门



'CONGXIAO AISHUXUE" JINGSAI RUMEN

上海教育出版社

“从小爱数学”竞赛入门

程 忠 恕 主编

上 海 教 育 出 版 社

(沪)新登字107号

“从小爱数学”竞赛入门

程忠恕 主编

上海教育出版社出版发行

(上海永福路123号)

各地新华书店经销　江苏启东印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张9.75　字数214,000

1994年10月第1版　1994年10月第1次印刷

印数1-　20,200本

ISBN 7-5320-3670-7/G·3580　定价 6.30 元

目　　录

第一讲　算式谜……………………………… 1
第二讲　连环算式谜与数阵图………………20
第三讲　数字串………………………………33
第四讲　奇数和偶数、自然数乘方问题………48
第五讲　整除问题……………………………70
第六讲　有余数的除法………………………94
第七讲　逐步调整法………………………… 108
第八讲　穷举法和树形图…………………… 120
第九讲　乘法原理…………………………… 135
第十讲　加法原理…………………………… 145
第十一讲　抽屉原则………………………… 155
第十二讲　重叠问题………………………… 170
第十三讲　图形的计算……………………… 184
第十四讲　图形的割补与染色……………… 209
第十五讲　数列求和(一)…………………… 221
第十六讲　数列求和(二)…………………… 232
第十七讲　逻辑推理问题…………………… 247
第十八讲　空间想象问题…………………… 275
附：练习答案………………………………… 285
编后的话……………………………………… 305

第一讲　算式谜

在数学竞赛中，常有这样的题目：对于给定的算术运算的竖式或横式，其中某些数字，或者运算符号是未知的，要求我们依据运算法则，进行适当的推理、判断，把待定的数字或符号确定出来。这就是所谓"算式谜"（或称数字谜）。

例 1　下面的算式里，四个小纸片各盖住了一个数字。被盖住的四个数字的总和是多少？

$$\begin{array}{r} \square\square \\ +\ \square\square \\ \hline 149 \end{array}$$

请看，四个数字被盖住了，又要求出它们的和，不正是一个"谜"吗？我们的任务就是解开这个谜。

解　由于两个个位数相加得 9，就不可能进位，所以两个个位数字的和也一定是 9。这样，两个十位数字的和就是 14。故四个数字的总和是：$14+9=23$。

例 2　下式是两个三位数相减的算式，每个方框代表一个数字。问这 6 个方框中的数字连乘积是多少。

$$\begin{array}{r} \square\square\square \\ -\ \square\square\square \\ \hline 894 \end{array}$$

解一　要求出 6 个方框中的数字连乘积，一般得知道 6 个方框中的每一个数字是多少。

由于两个三位数相减等于 894，被减数的最高位（百位）上的数字只能是 9，同时减数最高位上的数字也只能为 1，因

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

为只有 $9-1=8$。被减数的十位上的数字也只能是 9，这样只有 $9-0=9$，即减数的十位上的数字是“0”。由于所求连乘积的 6 个因数中出现了“0”，因此其它数位上的数字就不用求出了，这个连乘积必然是“0”。即这 6 个方框中的数字连乘积是“0”。

解二 注意到两个三位数的差是 894，被减数最大只能取得 999，最小可能取得 994，从而减数只能是 100～105 之间的任意一个三位数。这样，减数的十位数字只能是“0”。所以这 6 个方框中的所有数字的连乘积是“0”。

本例因为推断出“0”是数字连乘积中的一个因数，它乘以任何一个数都等于“0”，所以并不需要最终求出所有的数字，就能解开这个算式谜。但它告诉我们，有时候一个算式谜的解法并不是唯一的。

例 3 有一个四位数，在它的某位数字前面加一个小数点，再和这个四位数相加，得数是 2000.81。求这个四位数。

解一 从得数是 2000.81 可知，这个四位数的末两位数是81，小数点应加在数字 8 的前面。

假设这个四位数的前两个数字分别为 x 和 y，那么这个四位数可以写成 $\overline{xy81}$。根据题意可列式：

$$\begin{array}{r} x\,y\,8\,1 \\ +\quad x\,y.8\,1 \\ \hline 2\,0\,0\,0.8\,1 \end{array}$$

现在来求出 x、y 等于多少。由于个位上 $1+y$ 和为“0”，可以知道 $y=9$。于是加数十位上要加上进位的 1，即是 $8+x+1$，和的十位上的数字也是 0，显然 $x=1$。因此这个四位数是 1981。

这种待定数字的“算式谜”，运用列方程来解，可以比较方

便地求出这个四位数。

解二 假设这个四位数的前两个数字依次为 x 和 y。根据题意有

$$xy81+xy.81=2000.81。$$

也就是 $$xy00+81+xy+0.81=2000.81,$$

$$xy00+xy=2000.81-81.81,$$

即 $$xy00+xy=1919,$$

也就是 $$xy=19。$$

所以这个四位数是1981。

通过上述三例的分析和解答说明，在关于加法和减法的算式谜里，要认真分析已知算式中给出的各种数量关系，并能根据这些数量关系去找解决问题的突破口。“进位”特征是引起我们分析、推理，寻找突破口的重要因素。

练一练

1．在下左面的算式里，四个方框中的数字总和是多少？

$$\begin{array}{r} \square\ \square \\ +\ \square\ \square \\ \hline 1\ 6.9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \square\ \square\ \square\ \square \\ -\ 8\ 7\ 2\ 6 \\ \hline 7\ 7\ 7 \end{array}$$

2．上右式中，每个方框代表一个数字。问这四个方框中的数字连乘积是多少。

3．在（　）里填上适当的数。

$$\begin{array}{r} 8\ (\ \ )\ 2 \\ -\ (\ \ )\ 3\ 9 \\ \hline 4\ \ 8\ (\ \ ) \end{array} \qquad \begin{array}{r} (\ \ )(\ \ )(\ \ )\ 8 \\ -\ (\ \ )\ 8\ (\ \ ) \\ \hline 8\ \ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3\ (\ \ )\ 3 \\ +\ (\ \ )\ 4\ (\ \ ) \\ \hline (\ \ )\ 3\ \ 3\ \ 4 \end{array}$$

例 4 填出下面竖式中□里的数。

(1)

$$\begin{array}{rrrr} & & 6 & 7 \\ \times & & \square & \square \\ \hline & & \square & \square \\ & \square & \square & \\ \hline & \square & \square & \square \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rrrrr} & & 6 & \square & \square \\ \times & & & 5 & 7 \\ \hline & \square & 3 & \square & 9 \\ \square & \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & 3 & 9 \end{array}$$

解 解这类算式谜，首先要根据题目所给的条件，选择一个突破口，由此逐步扩大成果，从而取得完整答案。

第(1)题从哪里突破呢？我们来看这道题有什么特点？被乘数67与乘数的个位数相乘，所得的积还是一个两位数。这正是一个突破口。因为这种情况下，乘数个位上的数字只能是1，这样第一个部分积是67。同理，乘数十位上的数字也是1。因此本题的正确答案如右。

$$\begin{array}{rrrr} & & 6 & 7 \\ \times & & 1 & 1 \\ \hline & & 6 & 7 \\ & 6 & 7 & \\ \hline & 7 & 3 & 7 \end{array}$$

解第(2)题的关键是推算出被乘数。根据题中提供的已知数，它的突破口可以选在填出被乘数个位上的数。由第一个部分积的末位数字是9，乘数个位上的数字是7，即7×（ ）＝□9，可推出被乘数个位上的数字只能是7。再用乘数个位上的7与被乘数百位上的6相乘，可知第一个部分积最高位上的数字是4。所以上式变为：

$$\begin{array}{rrrrr} & & 6 & \square & 7 \\ \times & & & 5 & 7 \\ \hline & 4 & 3 & \square & 9 \\ \square & \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & 3 & 9 \end{array}$$

再填第二个部分积末尾的数字，然后填被乘数十位上的数字。被乘数个位上的7与乘数十位上的5相乘得35，可知第二个部分积的末尾的数字是5。又因最后乘积的十位上

$$\begin{array}{rrrrr} & & 6 & 2 & 7 \\ \times & & & 5 & 7 \\ \hline & 4 & 3 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 3 & 5 & \\ \hline 3 & 5 & 7 & 3 & 9 \end{array}$$

的数字是 3，它是 5 与第一个部分积的十位数字之和的末尾数字。因为 $8+5=13$，所以第一个部分积的十位数一定是 8。再看乘数的个位 7 与被乘数的百位 6 相乘得 42 个百，而第一个部分积是 4389，说明十位相乘向百位进 1；因此被乘数的十位数只能是 2，由 $2\times7=14$，再加个位进过来的 4 是 18。至此，乘数和被乘数都知道了，就好填了。原式如上页。

例 5 在下列算式的各□内，各填一个合适的数字，使算式成立。

$$
\begin{array}{r}
7\ \square \\
\square\ 7\ \overline{)\,1\ \square\ \square\ 1} \\
\underline{\square\ 8\ \square} \\
8\ \square \\
\underline{\square\ \square} \\
0
\end{array}
$$

解 由商的十位上的 7 与除数相乘得□8□，注意到 $7\times7=49$，而被除数的前三位是 1□□，可以得知□8□应为 189，同时可以确定除数应是 27。

由被除数的前三位 1□□减 189 后得 8，可知被除数的前三位数是 $189+8=197$，因此被除数是 1971。从而推算出商的个位是 3。全式如右。

$$
\begin{array}{r}
7\ 3 \\
2\ 7\ \overline{)\,1\ 9\ 7\ 1} \\
\underline{1\ 8\ 9} \\
8\ 1 \\
\underline{8\ 1} \\
0
\end{array}
$$

以上三例突破口的选择，基本上是根据所给条件，以及乘法口诀中数字之间的特征、乘除法之间的关系来确定的，再通过分析、推理，最后找到答案。

练一练

1. 请在□里填上适当的数字，使算式成立。

$$
\begin{array}{r}
\square\,1\,\square \\
\times\,3\,\square\,2 \\
\hline
\square\,3\,\square \\
3\,\square\,2\,\square \\
\square\,2\,\square\,5 \\
\hline
1\,\square\,8\,\square\,3\,\square
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\square\,\square\,7 \\
\times\,3\,\square\,\square \\
\hline
\square\,\square\,\square\,3 \\
\square\,1\,\square \\
\square\,5\,\square \\
\hline
\square\,7\,\square\,\square\,3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
1\,\square\,\square \\
325\;\overline{)\,\square\,2\,\square\,5\,\square} \\
\square\,\square\,\square \\
\hline
\square\,0\,\square\,\square \\
\square\,9\,\square\,\square \\
\hline
\square\,5\,\square \\
\square\,5\,\square \\
\hline
0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\square\,\square \\
7\,\square\,\square\;\overline{)\,8\,\square\,\square\,\square} \\
\square\,\square\,3 \\
\hline
\square\,\square\,\square\,\square \\
\square\,\square\,6\,\square \\
\hline
0
\end{array}
$$

例 6 有一个六位数，它的个位数字是 6，如果将 6 移至第一位前面时，所得的新的六位数是原来的 4 倍。求这个六位数。

解一 设这个六位数是 $\overline{abcde6}$，那么有 $\overline{abcde6}\times 4=6\overline{abcde}$。用竖式表示是：

$$
\begin{array}{r}
abcde\,6 \\
\times\qquad 4 \\
\hline
6\,abcde
\end{array}
$$

我们用逆推的方法来求得原数。因为 4 乘 6 的积的个位数是 4，所以 $e=4$。从而可以逐个推出：$d=8$，$c=3$，$b=5$，$a=1$。于是可知，这个六位数是：153846。

解二 这题也可以用方程来解答。设这个六位数为 $\overline{abcde6}$，令 $\overline{abcde}=x$。则

$$(10x+6)\times 4=600000+x,$$

$$40x+24=600000+x,$$

$$39x = 599976,$$

$$x = 15384。$$

即这个六位数为 153846。

例 7 下面的算式中，不同的字母表示不同的数字，相同的字母表示相同的数字。每个字母各代表什么数字？

$$\begin{array}{r} A\ B\ C \\ \times\ A\ C\ D \\ \hline E\ A\ D \\ C\ E\ F\ \ \ \\ A\ B\ C\ \ \ \ \ \ \\ \hline A\ E\ E\ G\ D \end{array}$$

解 算式中，由于第三个部分积 ABC 与被乘数相同，可知 $A=1$。式中 C 出现的次数较多，突破口可以定为 C。由第二个部分积的末尾（即 $C \times C$ 的个位数字）是 F 而不是 C，可知 C 不可能是 5 或 6。又因为 $C \times D$ 的末尾是 D，由 $C \neq 6$，所以 $D=5$。进一步分析：C 只能是 3。否则，$B \times D$ 的积的个位数加上 $C \times D$ 的积的十位数不能得出 $A=1$ 来。从而 $F=9$，$G=0$。从 $E+E+C+1$ 的和的个位是 E，可以推出 $E+C=9$，可知 $E=6$，$B=2$。

综合上述结果，得到 $A=1$，$B=2$，$C=3$，$D=5$，$E=6$，$F=9$，$G=0$。

例 8 下列算式中不同的汉字表示不同的数字，相同的汉字表示相同的数字。这是个怎样的算式？

$$\begin{array}{r} \text{赞从小爱数学} \\ \times\qquad\qquad \text{好} \\ \hline \text{从小爱数学赞} \end{array}$$

解 从算式看，六位数与一位数相乘得六位数，显然“好”与“赞”的积不能超过 9，“好”字还不能等于“0”或“1”。当“好”

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

取比1大的数字时，“赞”只能取 1、2、3、4。特别，当“好”取5、6、8时，“赞”只能取1；但这时“学”取任何数字，总不能与“好”相乘使乘积的末位数字是1。因此“好”$\neq$5、6、8。当“好”=4，与上同理“赞”$\neq$1，“赞”只能取2，从而“从”不小于8，这时乘积将过六位数，因此“好”$\neq$4。当“好”=9时，“赞”=1，于是“学”只能是9，这样重复出现数字9也不行。当“好”=7时，“赞”=1，这时“学”必须取3，根据“好”与“数”之积的末位数字是3－2＝1，于是“数”也只能取3，又重复出现数字3也不行。当“好”=2时，“赞”只能取偶数4，于是“学”必须取7，于是“数”=3或8，但这时“爱”取什么数字也不能与“好”相乘之积的个位数字是3或者8－1＝7。综上所述，“好”只可能等于3。当“好”=3时，分两种情况讨论。

(1) 取“赞”=1。于是有“学”=7，“数”=5，“爱”=8，“小”=2，“从”=4。

(2) 取“赞”=2。于是有“学”=4，“数”=1，“爱”=7，“小”=5，“从”=8。

所以本题有两解。将数字代入原算式为：

(1)
$$\begin{array}{r} 142857 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline 428571 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} 285714 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline 857142 \end{array}$$

通过上面例题的分析和解答，我们可以得出有关解算式谜的基本思路：关键是认真分析算式中给出的各数之间的关系，根据这些关系选择解答问题的突破口。突破口的选择，常常是从确定一个数（如加数、和、乘数、被乘数、积、某一部分积、除数、商或某一个余数）的个位、首位或其它位上的数字入手。运用整除的特征，以及数字运算的特性，进行分析、判断，直至解决问题。有时还可利用列方程的办法来

解答。

练一练

1. 下列算式中，每个字母在同一个算式中代表一个数字，相同的字母表示相同的数字，不同的字母表示不同的数字。请把字母翻译成数字。

$$\begin{array}{r} 9\;7\;7\;6 \\ -\quad A\;A\;A \\ \hline A\;A\;A\;A \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} A\;B\;8\;A \\ A\;B\;C\;8 \\ +\;A\;C\;A\;D \\ \hline 1\;A\;7\;A\;0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A\;B \\ \times\;C\;B \\ \hline C\;D\;D \\ A\;B \\ \hline F\;E\;D \end{array}$$

2. 算式中不同的汉字代表不同的数字，相同的汉字表示相同的数字。试问：式中各汉字分别是什么数字时算式成立。

$$\begin{array}{r} \text{从小爱数学} \\ \times\qquad\quad\text{要} \\ \hline \text{学数爱小从} \end{array}$$

例 9 从 1～9 这九个数字中选出八个数字，分别填在下面八个□中，使算式的结果是整数，计算结果最大是多少？

$$[\square\div\square\times(\square+\square)]-(\square\times\square+\square-\square)=?$$

解 要使算式结果尽可能大，就要使算式中中括号内的计算结果(即被减数)尽可能大，后面的小括号内的算式计算结果(即减数)尽可能小。因此在表示被减数的算式中，被除数要尽可能大，要使除以除数的商也尽可能大，除数就要尽可能小。于是被除数只能是 9，除数只能是 1。同理，前面小括

号内两个加数也应尽可能大，可分别为 8 和 7。在表示减数的算式中，两个因数又要尽可能小，在剩下的数中只能分别是 2 和 3。同理加数为 4。为了使整个小括号所表示的减数尽可能小，其中最后的一个减数在剩下的 5 和 6 两个数中，只有选最大的 6 才能符合题意。因此本题的解为：

$$[9\div1\times(8+7)]-(2\times3+4-6)=131。$$

通过上面例子的分析与解答，可以看出，根据题目的条件，应用试一试的方法，借助估算与分析，缩小数字的取值范围，确定每个数字在算式中的位置，是解答数字谜不可少的一种方法。

练一练

1．用 0～9 这十个数字组成等式。（在每一个等式中，每个数字都要出一次，并且只能出现一次。）

(1) □+□+□=□

(2) □+□=□+□

2．在○里分别填上 1～9 的九个数字，使算式成立。

(○+○+○+○+○)÷(○+○+○+○)=2。

3．把 1～9 九个数填入方框内，使等式成立。

□□□×□□=□□×□□=5568。

例 10 把 20 以内的质数分别填入下式的□中（每个质数只用一次），使 A 是整数。A 最大是多少？

$$A=\frac{\square+\square+\square+\square+\square+\square+\square}{\square}。$$

解 我们知道，20 以内的质数是 2、3、5、7、11、13、17、19 八个，其和是 77。本题可以转化为，从上述质数中选出一个

质数 x，使

$$A=\frac{77-x}{x}=\frac{77}{x}-1$$

是整数，且使 A 最大。

要使 A 是整数，质数 x 只能取 7 或 11。(只有 7 和 11 能整除 77)为要使 A 最大，故取 $x=7$。因此本题的解为：

$$A=\frac{2+3+5+11+13+17+19}{7}=10。$$

例 11 请找出 6 个不同的自然数，分别填入下式 6 个方框中，使这个等式成立。

$$\frac{1}{\square}+\frac{1}{\square}+\frac{1}{\square}+\frac{1}{\square}+\frac{1}{\square}+\frac{1}{\square}=1。$$

解一 本题有许多解，这里只要求写出一组解。举例如下。

比如，首先要注意

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{4}。\quad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

在这个等式两边同除以 3，就得

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}=\frac{1}{4}。\quad\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

把①式与②式等号两边各自相加，得

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}=1。$$

所以 3、4、6、9、12、18 为所求的一组自然数。

这种解法，首先考虑一个由几个分数相加的算式，一般使它的项数为所求算式项数的一半；然后把这个算式各项除以一个数又得一个和，要使这两个和为 1，就能解出所求的问

题了。

解二 本题我们还可以利用

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}(n\text{是自然数})$$

的公式来解答。

我们不妨由最简单的$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$开始，逐渐扩展。

利用上面的公式可得，$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$。而$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$，$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$；$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$。于是得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=1。$$

所以，2、5、7、12、20、42 也是符合条件的一组自然数。

本题的解法还有多种。同学们有兴趣，不妨自己想一想。

例 12 下面算式中，所有分母都是四位数。请在每个方格中各填入一个数字，使等式成立。

$$\frac{1}{\square\square\square\square}+\frac{1}{1988}=\frac{1}{\square\square\square\square}$$

解一 本题有多种答案，但题目只要求写出一组答案就可以了。先把 1988 分解为

$$1988=2\times2\times7\times71=4\times497。$$

根据$\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$，把它的两边同乘以$\frac{1}{497}$，有

$$\frac{1}{12\times497}+\frac{1}{4\times497}=\frac{1}{3\times497},$$

即

$$\frac{1}{5964}+\frac{1}{1988}=\frac{1}{1491}。$$

解二　再比如，$1988=14\times142$。根据$\frac{1}{35}+\frac{1}{14}=\frac{1}{10}$，两边同乘以$\frac{1}{142}$，有

$$\frac{1}{35\times142}+\frac{1}{14\times142}=\frac{1}{10\times142},$$

即
$$\frac{1}{4970}+\frac{1}{1988}=\frac{1}{1420}。$$

实际上本题还有两个答案：

$$\frac{1}{3053}+\frac{1}{1988}=\frac{1}{1204};$$

$$\frac{1}{8094}+\frac{1}{1988}=\frac{1}{1596}。$$

这里，解决问题的突破口常常是一个简单的等式。一般地，怎样才能“凑”出一个解来呢？我们仅借助例 12，提供两种思路。

第一种思路。就利用$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n\times(n+1)}$($n$是自然数)。注意到$1988=2\times2\times7\times71$，这样可取$n+1=4$，那么$n=3, n\times(n+1)=12$，从而有$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$。等式两边同乘以$\frac{1}{7\times71}=\frac{1}{497}$，即得一解。

第二种思路。如果a是$(b+c)$的倍数，可记作$a=k\times(b+c)$(k是自然数)，就有$abc=k(b+c)bc$，$\frac{b+c}{abc}=\frac{1}{kbc}$，即$\frac{1}{a\times b}+\frac{1}{a\times c}=\frac{1}{k\times b\times c}$。将上例看成

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com