

SHUXUE
JIAOYU
XUE

涂世泽 主 审

数 学 教 育 学

郑君文 张恩华 涂荣豹
编 著

河 海 大 学 出 版 社

数 学 教 育 学

郑君文 张恩华 涂荣豹 编著
涂世泽 主审

河海大学出版社

内 容 提 要

本书运用教育学、心理学、逻辑学、思维科学、科学方法论、数学思想史等方面的有关思想、原理和方法,结合优秀数学教师的先进经验,综合研究数学教育,阐述中学数学的教育目标和教学内容、数学学习与研究中的一般科学方法、数学中的逻辑概要、数学学习过程、数学解题及其教学、中学数学的教学原则和教学方法、数学教学过程以及数学教师的知识结构和能力结构。各章均配备了习题。

本书可作为高师本科或专科院校,教育学院,教师进修学院,函授大学等单位有关课程的教学用书,也可供广大中学和中师数学教师参考或进修之用。

责任编辑:龚俊

特约编辑:范惠民

数 学 教 育 学

郑君文 张思华 涂荣豹 编著

涂世泽 主审

*

河海大学出版社 出版

(南京西康路1号)

河海大学出版社 发行

江宁县印刷厂 印装

*

开本 787×1092毫米 1/32 印张 9.125 字数 206千字

1989年2月第1版 1989年2月第1次印刷

印数 1—4000

ISBN 7—5630—0079—8/O·1

定价 2.20元

前 言

数学教育学是学科教育学之一，它广泛地运用教育学、心理学、逻辑学、思维科学、科学方法论、数学思想史等方面的有关思想、原理、方法，结合优秀数学教师的先进经验，来综合研究数学教育。

数学教育学作为高等师范院校数学系的一门课程，其研究对象主要是中学数学教育，它为培养合格的中学数学师资服务。

近几年来，我们在探索“中学数学教材教法”课的改革的过程中，逐渐感到有必要更新内容，编写数学教育学讲义，以供教学之用。我们编写的数学教育学讲义，已经三届学生试用，并作过数次修改；今又进行较多的充实和较大的修订，成此《数学教育学》一书。本书首先从国内外数学教育的发展来阐明数学教育学的研究对象和方法，并且结合社会需要和时代要求阐述了中学数学的教育目标和教学内容；接着，展现数学学习与研究中的一般科学方法与逻辑原理，从而指出数学教学不仅是数学知识的传授，而且更重要的是在于数学的精神、思想和方法对学生的熏陶；然后，揭示学习数学的心理过程和解题的思维过程；再在上述几方面内容的基础上探讨“怎样教”的问题，包括数学教学的原则、方法和过程；最后，介绍数学教师的知识结构与能力结构。以上各部分内容，涉及课程论、学习论和教学论，它们互相联系且各有侧重，组成一个有机的整体。我们在编写时，力图使本书立意新颖、理论性强，既注意反映国内外数学教育科学的新成果，又注意联系我国中学数学

教育的实际，做到理论性与实用性相结合。但囿于水平，恐不能遂愿，定有疏误之处，企望有识之士与广大读者批评、指正，不吝赐教。

本书可作为高师本、专科院校，教育学院，教师进修学院，函授大学等单位有关数学教育课程的教学用书，也可供广大中学和中师数学教师参考或进修之用。

我们在写作过程中，曾参阅了大量书籍与文章，书名与文题恕不一一列出。这里，谨向有关作者致谢。

此书的编写、出版，得到南京师范大学数学系领导的关心和支持，以及该系沈超、涂世泽、吴蔚先、刘云章等正、副教授的鼓励与帮助。涂世泽先生反复审阅了书稿，提出了不少指导性建议和具体修改意见。另外，承蒙河海大学出版社的大力支持，使本书得以问世。在这完稿付印之时，一并表示衷心感谢。

编著者

1988年6月于南京师大

目 录

第一章 绪论	(1)
§ 1 我国数学教育发展的概况.....	(1)
§ 2 数学教育现代化运动简介.....	(6)
§ 3 数学教育学研究的对象、意义与方法.....	(10)
习题一.....	(15)
第二章 中学数学的教育目标和教学内容	(17)
§ 1 确定中学数学教育目标的依据.....	(17)
§ 2 中学数学教育目标.....	(21)
§ 3 作为中学课程的数学.....	(26)
§ 4 中学数学的教学内容.....	(28)
习题二.....	(32)
第三章 数学学习与研究中的一般科学方法	(33)
§ 1 观察和实验.....	(33)
§ 2 比较和分类.....	(37)
§ 3 类比和联想.....	(41)
§ 4 归纳和演绎.....	(45)
§ 5 分析和综合.....	(56)
§ 6 抽象和概括.....	(60)
§ 7 RMI原理简介.....	(65)
习题三.....	(71)

第四章 数学中的逻辑概要	(75)
§ 1 概念	(75)
§ 2 命题与联结词	(86)
§ 3 条件命题	(91)
§ 4 重言式与推理格式	(100)
§ 5 谓词与量词	(111)
§ 6 普遍有效公式与推理格式	(114)
§ 7 数学命题的证明	(120)
习题四	(133)
第五章 数学学习过程	(139)
§ 1 有意义学习和认知结构	(139)
§ 2 数学知识和技能的学习	(142)
§ 3 思维发展与数学学习	(153)
§ 4 思维与数学思维	(157)
§ 5 一般能力与数学能力	(167)
§ 6 数学学习中的非智力因素	(176)
习题五	(181)
第六章 数学解题及教学	(183)
§ 1 数学解题的意义	(183)
§ 2 数学解题的理论	(185)
§ 3 数学解题的方法	(194)
§ 4 数学解题的思维过程	(201)
§ 5 数学解题的教学	(208)
习题六	(223)

第七章 中学数学的教学原则和教学方法	(225)
§ 1 数学教学原则	(225)
§ 2 数学教学方法	(234)
§ 3 教学方法的优选	(248)
习题七	(250)
第八章 数学教学过程	(251)
§ 1 数学课的类型和结构	(251)
§ 2 备课与上课	(253)
§ 3 数学课外活动	(263)
§ 4 学习成绩的考核	(264)
§ 5 教学研究	(270)
习题八	(272)
第九章 数学教师的知识结构和能力结构	(274)
习题九	(283)

第一章 绪 论

本章先对国内外数学教育发展作一简单历史回顾，其重点是介绍现代数学教育的发展情况，然后再就数学教育学的研究对象、方法和学习意义作些简要的说明，使读者对全书能有一个概括的了解。

§ 1 我国数学教育发展的概况

一、我国数学教育有着悠久的历史，根据典籍记载，周代就开始有了数学教育，到了隋唐时代已建立起数学教育制度。

①唐代初由于数学教学的需要，李淳风等人奉勅注释并校订了《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《张邱建算经》、《周髀算经》、《五经算术》、《缀术》、《缉古算经》以及《夏侯阳算经》等十部数学书，定作数学学习的主要书籍。这时已明确规定学习数学的年限、课程安排和考试制度，数学教学注意实际应用和计算技能的培养。

我国传统数学发展到宋元时代，达到了它的极盛时期，与此同时，数学教育也在前进并向着普及方向发展。在这一时期不仅涌现出一批杰出的数学家，而且也出现了杰出的数学教育家，如特别重视普及数学教育的杨辉，他对数学教材要求紧密联系实践，内容以社会实践中提出的具体计算问题为主。他的著作有许多是为普及数学教育而编写的教科书。在教学方法

①参考中外数学简史编写组：《中国数学简史》，228—232页、304—306页，山东教育出版社，1986年版。

上，杨辉主张循序渐进、打好基础；对不同的学习阶段，提出不同的学习要求；重视计算能力的培养；注重引导和启发，他说：“好学君子自动触类而考，何必尽传。”在学习方法上，杨辉提倡熟读精思，融会贯通；他反对死记硬背，主张弄清道理，在理解的基础上记忆，在广博的基础上深入。杨辉治学严谨，对教学一丝不苟。他的教育思想和方法是值得我们借鉴的。

明清时代欧洲逐渐步入资本主义，而我国仍然停滞在封建社会，加上受到了资本主义列强的侵略和奴役，致使我国数学和数学教育长期处于停滞落后状况。

二、晚清末年，我国的教育制度有所改变。如：废除科举，兴办学校；1902年，参照西方的成法，规定了学校教育制度，次年又作了修改。这时，中小学所开设的数学课程与现在开设的大体相同，并已开始有了翻译的及我国人自己新编的数学教科书。

辛亥革命后，我国的数学教育有了很大的发展。中学数学教材，除翻译的或直接采用欧美的教本外，我国数学教育工作者根据自己的教学经验编写的数学教科书也有了增加；其中，不仅有按分科编写的，而且也还有过把算术、代数、几何、三角等混合编写的教材，例如《初级混合法算学》和《初级混合数学》等。

同时在教学法方面，从事研究的人员不仅有直接在中学任教的数学教师，而且还有高师的教师。当时高师开设有各学科通用的“教学法”课程；就高师数学系来说，开设这门课程的用意，在于“使数学系的学生，通过与数学特点相结合，独立地研究中学数学的教学法，付诸于数学教学的实施。”

①这时，主要研究的是如何教才能使学生容易理解和掌握数学知识。

在这一段时期，无论是数学教材还是数学教学方法，都完全受欧美影响，而对自己教学实践经验的总结还比较粗浅。

三、新中国成立后，我国数学教育得到蓬勃发展，取得了巨大成就，但走过的道路是曲折的，其间还遭受过严重的挫折。

建国初期，除东北地区于1950年开始采用苏联教材外，其它各地区仍继续沿用旧课本或作些精简。

1952年至1957年全面学习苏联。中学数学教学大纲和教材，都以苏联十年制学校中学数学教学大纲和教材为蓝本进行制订和编写；同时中学数学教学方法也以苏联中学数学教学方法为学习模式，但在学习苏联的过程中，也总结了自己的一些实践经验。这时高师数学系专门开设了“中学数学教学法”课，比之以前，也在数学教学的原理和方法方面研究得较为系统、深入，而且加强了数学教育的思想性、目的性和科学性；不过，所采用的教材也还是苏联的课本，如柏拉基斯的《中学数学教学法》。总之，我国数学教育在学习和研究苏联的过程中，已逐步走上正轨，可以说，“这一时期中国数学教育比起解放前来有了翻天覆地的变化，把半殖民地、半封建性质的数学教育改造为新式的社会主义性质的数学教育。尽管当时在较多方面向苏联看齐，但也学到了很多”。②应当指出，在学

①钟善基：《关于目前数学教育研究的主要任务的一点看法》，《数学通报》，1987年11期。

②中外数学简史编写组：《中国数学简史》，568页，山东教育出版社1986年版。

习苏联的过程中，也存在一些脱离了我国实际的现象，如把苏联十年制的数学教材照搬到我国十二年制的学校来，不仅延长了学习时间，而且还取消了平面解析几何，造成了我国中学生数学水平的下降。

1958年至1960年，我国掀起了大规模的教育改革运动，严厉批判中学数学教材内容陈旧落后、脱离政治、脱离实际和严重存在着少慢差费，提出大破旧的中学数学教材体系和打倒“欧家店”的口号，并以现代化、高精尖和多快好省作为改革的目标。当时各地相继编写出这样那样的“中小学数学课本”，如《九年一贯制中小学数学试用课本》、《五年制中学数学课本(试用本)》等。这些新编出的教材，一方面削减原中学教本的内容，特别是欧氏几何；另一方面大量增加新的内容，如解析几何、微积分、概率统计、制图以及计算数学初步等，从而对教和学都造成困难，再加上其他原因，出现了数学教学质量下降。

到了1961年，在“调整、巩固、充实、提高”的方针指引下，数学教育走上了正确的道路。在广泛调查研究的基础上重新制订《全日制中学数学教学大纲(草案)》和重新编写全日制十二年制中小学数学课本。这时，中学阶段确定不再开设算术，同时增设平面解析几何；在教学大纲中强调搞好基础知识教学和基本技能的训练，并明确地提出要培养学生的计算能力、逻辑推理能力和空间想象能力。在教学方法上，则提倡少而精、启发式。对高师数学系的中学数学教学法课，认为“应多讲原理，而教学方法的讲授，只论及典型的就可以了，”

“并把课名改为‘数学教材教法’”。^①其教学内容，着重结合

^①钟善基：《关于目前数学教育研究的主要任务的一点看法》，《数学通报》，1987年11期。

中学课本，对教材各章节的地位、作用和重点、难点、关键进行分析；至于教法，则侧重于研究对教学原则和启发式的贯彻。

1966年至1976年，出现十年动乱，数学教育遭到空前的破坏，学生的数学水平严重下降，已到了取消数学教育的边缘。

1977年以后，我国数学教育很快得到恢复，并且迅速走上了蓬勃发展的道路。一方面重新制订了《全日制十年制学校中学数学教学大纲（试行草案）》，编写了全国通用的数学教本；另一方面，还编写了几种中学数学实验教材；同时高师院校也编写了不少“中学数学教材教法”的讲义、教材，还翻译出版了有关“数学教学法”与“数学教育学”方面的书籍；数学教育日益走上了正轨。由于四化建设的需要和国际交往的增多，数学教育研究开始突破原有的框框，向着更为深广的方向推进。在教法改革的研究方面，开始进行了教学实验，总结了一些新的教学方法。关于数学能力的培养问题已普遍受到重视，并在教学实践中初步总结出一些经验和规律。对于学生学习数学的规律开始受到了人们的重视；关于数学思维的研究也已展开。数学教育已开始运用教育学、心理学、逻辑学、思维科学、科学方法等多门学科的有关原理和方法来进行研究。不少高师院校近年来也从培养中学师资的这一目标出发，开设了一些有关数学教育的选修课，如数学教育学选讲、中学数学的现代思想、数学史、数学方法论等；这些虽然还处于开始阶段，但也已丰富了高师数学系教学的内容，开阔了学生的眼界。为适应教育改革的深入开展，对高师“中学数学教材教法”课从内容到方法也在进行不断改革。如在内容上，不仅讨论教师怎样教，而且还讨论学生怎样学；不仅介绍具体的经验方法，而且还在理论上进行探讨等；内容日益更新扩大，越来越

越超出了原“教材教法”的界限。此外，在教学上，也要求注重对高师学生能力的培养，加强实践环节，使他们能具有从事数学教学的基本能力，以适应今后工作的需要。建立具有中国特色的数学教育学这一任务，从1981年十三所院校在苏州召开“数学教材教法”教材讨论会时开始酝酿，到1982年郑州会议正式提出，而后积极进行了各方面的研究、创建，现已取得了不少成绩。因此，创立数学教育学的条件已日趋成熟。

§ 2 数学教育现代化运动简介

19世纪末20世纪初，欧洲一些进步的数学家与数学教育家已逐步认识到中学数学教育存在着教学内容贫乏、忽视实际应用和教学方法呆板等的弊病，他们倡导开展数学教育改革。这时由德国数学家克莱茵和英国数学教育家贝利倡导的数学教育改革运动，在国际上有很大影响。克莱茵主张：“（1）提倡数学理论应用于实际；（2）教材内容应以函数概念为中心；（3）应该运用教育学和心理学的观点指导教学活动。”^①这一主张涉及到数学教育的目的、内容和教学活动的理论，代表着当时数学教育的新思想与数学教育改革的主要精神。但是，由于在许多国家没有得到官方的承认与支持，加上两次世界大战，数学教育改革处于中断。所以在世界范围内，这场数学教育改革运动没有能产生好的结果，但作为数学教育改革的方向来说，则是有参考意义的。

从本世纪40年代到50年代，出现了原子能、电子计算机和空间技术，开始了内容极其丰富的、影响极为深远的新的一次

^①张弓等：《中国现代数学教育历史概述》，《数学教学》，1985年4期。

技术革命，人类逐渐步入了“航天时代”。由于生产、科技的迅速发展，迫切要求教育迅速跟上它的步伐。到了50年代后期，先在美国开始，然后波及其它许多国家，掀起了一个声势浩大的数学教育现代化运动，即所谓“新数学”运动。从数学教育本身来看，它产生的背景是：数学科学的迅速发展，数学在生产、科技等各领域日益广泛的应用，从而迫切要求提高社会各成员的数学知识水平和素养，而传统的中学数学内容陈旧落后，教学质量低劣，教学方法不当，数学教育理论贫乏，与现代社会对数学教育的要求极不适应，形成了尖锐矛盾，急需彻底解决。作为产生运动的直接原因，则是：1957年苏联第一颗人造地球卫星的上天，它引起了美国朝野震惊，深感美国科技人才缺乏，空间技术落后于苏联，认为这主要是教育特别是数学教育的保守落后所造成的。这样，就导致了“新数学”运动迅速兴起。

在美国“新数学”运动的代表组织是“学校数学研究组”（School Mathematics Search Group），它在政府的协助下，负责实验研究和教材编写工作。在这改革过程中，具有重大意义的一次会议，是1959年美国“全国科学院”在伍兹霍尔召开的一次会议。会上讨论如何改革中小学数理学科的教育，集中研究了课程改革的指导思想，其中心思想是：“第一，学习任何学科，主要是要使学生掌握这一学科的基本结构，同时也要掌握研究这一学科的基本态度或方法。第二，任何学科的基本原理都可以用某种形式教给任何年龄的学生，例如高等数学知识也可以用直观的方式教给小学低年级学生。第三，过去在教学中只注意发展学生的分析思维能力，今后应重视发展直觉思维能力。在发现、发明、解决问题的过程中常常是由直觉思维推测出正确的答案，然后由分析思维去检验它，证明它。

第四，学习的最好动机，乃是对所学材料本身发生兴趣，不宜过分重视奖励、竞争之类的外在刺激。”^①这四者就是通常所说的“结构思想”、“早期教育思想”、“培养直觉思维能力”和“教材的趣味性”。在此期间，编写出版了大量“新数学”教材，如美国的《统一的现代数学》、英国的SMP教材等。这些教材具有新内容、新体系、新处理的特点。从内容上看，它大量增加近代和现代数学的内容，如集合论初步、数理逻辑基础，微积分，近世代数，概率统计，程序设计和算法语言等，大大削弱传统的中学数学内容，基本上砍掉了传统的欧几里得几何。从体系上说，它用结构思想把保留的传统中学数学内容与新增加的内容统一组成一个体系，代数、几何、三角不再分科设置，抽象化的程度大为提高。在教材的处理上，强调趣味性和直觉思维，主张采用发现法来编写教材，例如让学生通过实验、观察、分析、综合去发现规律，概括成数学命题等。

值得注意的是：“新数学”运动从一开始就存在激烈的争论，其争论的中心之一，就是怎样处理传统的欧几里得几何，即是否保留欧几里得几何，应保留多少？需要引进什么新方法，是几何变换或是向量还是别的什么方法？由于看法各异，编写出的教材也大不一样。

六十年代，“新数学”运动达到高潮。到七十年代，人们发现学习“新数学”的学生数学成绩严重下降，“新数学”运动并没有带来所预期那样的效果。于是，“新数学”运动在一些改革激进的国家（如美国、英国等）受到广泛谴责，反对

^①[美]布鲁纳著《教育过程》，1—2页。文化教育出版社，1982年版。

“新数学”运动的呼声很高，很多人提出了“回到基础”的口号。从对“新数学”的批评意见来看，它的主要问题是：教材过分强调结构化、抽象化；增加的现代数学的内容过多；抽象概念引入过早；从而造成学生难以接受，出现大批差生的现象。另外，教材只强调抽象理论，忽视数学的应用；只强调理解，忽视基本技能的训练，造成学生计算能力差，逻辑推理能力下降。人们认为数学教学应面向全体学生，而不是培养数学家；数学不能割断历史，传统的中学数学还是最基本的，不能大删。当然，“新数学”运动还存在其它一些严重问题，如教师的培训、数学教学参考资料的准备等没有及时跟上；改革方案未作系统的实验，就迅速广泛流行开来等。虽然世界各国对“新数学”运动的评价尚存在着肯定或否定的不同看法与争论，但是也应该看到：由于情况的复杂，评之者不宜只求简单地作出成功或失败的结论，而要根据这场教育改革的思想、观点，直至教学改革实践等作具体分析，实事求是地加以总结，这样才有利于把数学教育改革引向深入。总之，这样大规模地向着传统的数学教育思想、教学内容和方法的冲击，引起全社会的关注，其意义与影响将是十分深远的。

进入八十年代，世界各国在总结“新数学”运动的经验教训的基础上，结合本国的实际情况，提出各种不同的改革措施。如加强数学基本技能的训练；重视培养和增进学生的数学能力；增加应用性的数学知识；设置数学选修课，开设电子计算机（微机）课；引入计算机辅助教学，改进教学方法等。总之，数学教育的改革正在积极进行深入探索，以适应飞速发展的生产、科技等的需要。

应该看到，自“新数学”运动以来，数学教育不仅已普遍引起人们的关注，而且它自身也已发生质的变化。“一部分数