高考数学命题新思维

GAOKAO SHUXUE MINGTI XIN SIWEI

主编 虞 涛

高考精神新透视

高考命题新走向

高考应试新思想

高考试题新剖析

高考高分新策略

汉语大词典出版社

高考数学命题新思维

主编 虞 涛

编者 虞 涛 刘爱学
王一治 翟立安

汉语大词典出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学命题新思维 / 虞涛主编;王一治等编著.—上海:汉语大词典出版社,2004.5

ISBN 7-5432-1018-5

Ⅰ.高... Ⅱ.①虞...②王... Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 021329 号

责任编辑 余佐赞
特约编辑 胡化平
装帧设计 钱自成
技术编辑 徐雅清

高考数学命题新思维
虞 涛 主编
世 纪 出 版 集 团
汉语大词典出版社 出版、发行
(200001 上海福建中路 193 号 www.ewen.cc)
各地新华书店经销 上海商务联西印刷厂印刷
开本 787×1092 1/16 印张 12.75 字数 310 千字
2004 年 7 月第 1 版 2004 年 7 月第 1 次印刷
印数:0 001—6 000
ISBN 7-5432-1018-5/G·495
定价:18.50 元

前　　言

近几年高考数学命题的理念已经发生了重大的变化，教育界通常称这个变化为“从知识立意转向能力立意”，即突破传统的运算能力、逻辑推理能力和空间想象能力等三大能力，提倡数学特殊能力的学习和培养。这是有着深刻意义的，因为数学能力不仅仅是这三大能力，还应该包含人的核心能力，即创新能力。传统的数学教学理念只强调三大能力，将创新能力排除在外，这是极不科学的。

当前的中学数学教学存在着许多问题，如学生学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学的能力、数学创新能力和数学研究性学习能力，等等，都没有得到应有的重视。而引导中学数学教育方向的高考数学命题已经在这一方面迈出了一大步，为了顺应高考数学理念的改变，一批在教学一线的数学教育先锋围绕着数学创新能力进行了不懈的研究和探索，因此有了这本《高考数学命题新思维》。

目前市场上几乎没有一本专门探讨数学创新能力方面的书籍，针对高中教师、学生教学和学习的更是凤毛麟角，为了引导师生超越传统数学只强调三大能力的教学学习模式，提高高中学生，特别是高三学生的数学综合能力和创新能力，适应高考命题新思路，我们向广大读者奉献了这一本书。

本书在成书的过程中，得到了许多同志的帮助和支持，李萍、杨曼倩、杨晓红、洪萍、陆志丽等老师也参加了部分内容的编写、整理和校对工作，在此一并致谢。

本书有许多问题和方法具有原创性，精到的分析和颇有创意的编写使得本书又极具操作性。由于时间仓促，加上可资借鉴的东西不多，所以书中难免会有不足之处，欢迎师生在使用过程中能给予指正。

作者

2004.5

内容提要

高考数学方向已从知识立意转向了能力立意。由于分类的标准不同，数学能力的说法也不同，一般认为数学能力应包括数学抽象能力、数学符号变换能力和数学应用能力。其实数学能力还应包括数学的特殊能力，即包括学习新的数学知识的能力、探究数学问题的能力、应用数学知识解决实际问题的能力和数学创新能力。更具体地说，高中数学不仅培养学生计算、演绎等具有根本意义的严格推理能力，还要培养学生预感试验、尝试归纳、假设检验、类似联想等非形式推理和似真推理的能力。高考数学命题把考查学生的这种能力作为主攻方向，目前这一命题特色已成为高考的一个重要的亮丽的风景线，值得我们高度重视。

本书通过"思路剖析"、"方法点评"、"相关链接"和"类比训练""专题实践"等系列过程讲授高中数学各种能力型问题的解题策略、思维方法、训练技巧，剖析了高中数学能力的新要求，通过"背景探源"对高考数学命题的新精神、新走向和新题型作了透视和剖析，在实践过程中实现数学思维能力的创新。全书围绕现行高中数学课本的知识体系和序列结构，特别有利于高三学生的数学综合能力，尤其是创新能力的培养。

目　　录

第一章　学习新知识的能力

学习新的数学知识的能力是指通过阅读、理解、迁移、学习，将过去没有学过的数学知识，如新的概念、定理、公式和法则等进行及时性学习并能运用它们作进一步的运算、推理和迁移，以解决有关问题的能力，这是一种学会学习的能力。这里我们简称为学习能力。

学习能力的培养载体是学习能力型问题。这类问题通常具有"开放"、"迁移"的特点，问题类型丰富多彩，可以是新概念型、方法型、迁移型等多种形式。

学习能力型问题的解决策略：注重阅读理解，将关键的字、词、短句以及整段文字进行字面理解，读懂含义，同时作深层理解，要求深入理解新的概念的本质属性，分清新的定理的条件和结论，理解新的方法的关键，在此基础上进行迁移式的运用，特别要注意问题的开放特征。

第一节　集合为背景的知识学习

案例精选 1

设符号"$*$"是数集 A 中元素的一种运算。如果对于任意的 x、$y\in A$，都有 $x*y\in A$，集合则称运算"$*$"对集合 A 是封闭的。

(1) 设 $A=\{x\mid x=m+\sqrt{2}n, m, n\in\mathbf{Z}\}$，判断 A 对通常的实数的乘法运算是否封闭？

(2) 设 $B=\{x\mid x=m+\sqrt{2}n, m, n\in\mathbf{Z}, 且\ n\neq 0\}$，问 B 对通常的数的乘法是否封闭？试证明你的结论。

【思路剖析】

(1) 根据定义，可设 $x=m_1+\sqrt{2}n_1$，$y=m_2+\sqrt{2}n_2$，那么 $x*y=(m_1m_2+2n_1n_2)+(m_1n_2+m_2n_1)\sqrt{2}$可以说明 A 对通常的数的乘法运算是封闭的。

(2) 举反例：若 $x=2+\sqrt{2}$，$y=2-\sqrt{2}$，则 x、$y\in B$，$x*y=2\notin B$。$\therefore B$ 对通常的数的乘法不封闭。

【方法点评】

题(1)、(2)只有一个细小的差别，但结论完全不同，搞清数集的概念和注意特殊情况十分重要。通过本题对学生在学习过程中养成严谨的作风是很有益的。

【背景探源】

由于实际应用和数学本身发展的需要，数的概念逐步扩展，从小学到初中，同学们学习过自然数集、整数集、有理数集和实数集，到高中又要学习复数集。数集的每一次扩展，所得到的新数集都保留了原来数集的运算性质，同时又增加了一些新的性质。本题谈到的数集 A 是具有某种特征的数集，对通常的数的乘法是封闭的。

【相关链接】

不难证明，例 1 中的数集 A 除了乘法以外，对通常意义上的数的加法、减法、乘方都是封闭的，但对除法不封闭。

如果把题中的数集 A 改为 $A=\{x\mid x=a+b\sqrt{2},a,b\in Q\}$（$Q$ 为有理数集），那么该数集对通常意义上的数的除法（分母不为零）也是封闭的。证明如下：

设 $x_1=a_1+b_1\sqrt{2}$，$x_2=a_2+b_2\sqrt{2}$，$a_1,b_1,a_2,b_2\in Q$，且 a_2、b_2 不同时为零，那么 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\cdot\sqrt{2}$，若 a_2、b_2 中有且只有一个为 0，显然 $a_2^2-2b_2^2\neq 0$；若 a_2、b_2 都是非零有理数，那么也有 $a_2^2-2b_2^2\neq 0$；若不然，则 $\left(\dfrac{a_2}{b_2}\right)^2=2$，$\dfrac{a_2}{b_2}=\pm\sqrt{2}$，但这是不可能的。因为有理数除以非零有理数仍得到有理数，而 $\pm\sqrt{2}$ 是无理数，而 $\dfrac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}$ 和 $\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}$ 都是有理数，因此出现矛盾。从而得证。

【类比训练】

1. 设“$*$”是集合 A 中元素的一种运算，如果对于任意的 $x,y\in A$，都有 $x*y\in A$，则称运算“$*$”对集合 A 是封闭的。若 $M=\{x\mid x=a+b\sqrt{2},a,b\in\mathbf{Z}\}$，$Z$ 是整数集，则对集合 M 不封闭的运算是（　　）

A. 减法　　B. 乘法　　C. 除法　　D. 乘方

2. 设绝对值小于 1 的全体实数的集合为 S，在 S 中定义一种运算 $*$，使得 $a*b=\dfrac{a+b}{1+ab}$。

(1) 证明：如果 a 与 b 属于 S，那么 $a*b$ 也属于 S；

(2) 证明：结合律 $(a*b)*c=a*(b*c)$ 成立。

案例精选 2

设 M、P 是两个非空集合，定义 M 与 P 的差集运算为 $M-P=\{x\mid x\in M,且\ x\notin P\}$。设集合 $B=\{2,4,6,8\}$，请你写出一个集合 A，使得 $A-B=\{5\}$，$A=$ ________。

【思路剖析】

阅读差集的定义，知道两个非空集合 M 与 P 的差集是由属于 M 但不属于 P 的所有元素组成的集合。由题意知，$5\in A$，且 A 不再含有 $\overline{B}$ 中的其它任何元素，而是否再含有 B 中的各个元素不影响等式 $A-B=\{5\}$，$\therefore A=\{5\}$ 或 $\{5,2\}$ 或 $\{5,2,4\}$ 等中的任意一个。

【方法点评】

从定义可知，差集是两个给定集合运算的结果。差集 $M-P$ 的意义与从小学开始就学的普通意义上的两个数的差的意义有相同之处和不同之处。相同之处是 $M-P$ 中不再含有 P 中的任意元素，即要在 M 中把 P 中也有的元素都删减掉；不同之处是集合 B 和集合 A 可以没有包含或被包含的关系。普通意义上的两数之差是数字之差，其结果可能是负数，而差集不是数字相减的含义，不存在负的含义。

【背景探源】

现实生活中存在由属于集合 M 但不属于集合 P 的所有元素组成一个集合的情况。差集这一概念的出现是实际应用的需要。

【相关链接】

1. 对称差的概念。如题:对任意两个集合 X 和 Y, $X-Y$ 是指所有属于 X 但不属于 Y 的元素的集合,集合 X 和 Y 的对称差 $X\Delta Y$ 规定为 $X\Delta Y=(X-Y)\cup(Y-X)$。设 $A=\{y\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y\mid y=3\sin x,x\in\mathbf{R}\}$,求 $A\Delta B$。

解答:$A=[0,+\infty)$, $B=[-3,3]$, $A\Delta B=[-3,0)\cup(3,+\infty)$。

2. 定义运算"$\boxed{\times}$"。设 $M=\{(x,y)\mid Ax+By+C=0\}$,在点集 M 上定义运算"$\boxed{\times}$",对于任意$(x_1,y_1)\in M$, $(x_2,y_2)\in M$,则$(x_1,y_1)\boxed{\times}(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2$。已知 M 是直线 $x-y+3=0$ 上所有点的集合,$(3,a)\in M$, $(b,5)\in M$, $(a、b\in\mathbf{R})$,计算$(3,a)\boxed{\times}(b,5)=$ ________。

解答:36。

3. 设 $P=\{4,5,6,7\}$, $Q=\{3,4,5\}$,定义 $P※Q=\{(a,b)\mid a\in P,b\in Q\}$,则集合 $P※Q$ 元素个数是(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 7　　D. 12

解答:$4\times3=12$　选 D。

【类比训练】

1. 已知非空集合 M 和 N,规定 $M-N=\{x\mid x\in M,但\ x\notin N\}$,则 $M-(M-N)$等于(　　)

A. $M\cup N$　　B. $M\cap N$　　C. M　　D. N

2. 定义集合 A 与 B 的差集 $A-B=\{x\mid x\in A,且\ x\notin B\}$,若 $A=[-2,+\infty)$, $B=(-2,0)$,则 $A-B=$ ________。

3. 符号"$*$"使下列算式成立:$2*4=8$, $5*3=13$, $3*5=11$, $9*7=25$,则 $7*3=$ ________。

4. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$,对 $X\subseteq A$,定义 $S(X)$为这个子集 X 中所有元素的和,求全体 $S(X)$的总和。

5. 记满足下列条件的函数 $f(x)$的集合为 M:当 $|x_1|\leqslant1$, $|x_2|\leqslant1$ 时,$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant4|x_1-x_2|$。又令 $g(x)=x^2+2x-1$,则 $g(x)$与 M 的关系是(　　)

A. $g(x)\subset M$　　B. $g(x)\in M$

C. $g(x)\notin M$　　D. $g(x)$与 M 的关系不能确定

第二节　函数为背景的知识学习

案例精选 1

对于函数 $f(x)$与 $g(x)$规定:

$$f(x)*g(x)=\begin{cases}f(x) & (f(x)\leqslant g(x))\\ g(x) & (f(x)>g(x))\end{cases}$$

已知 $f(x)=3-x$, $g(x)=\sqrt{2x+5}$,则 $f(x)*g(x)$的最大值为 ________。

【思路剖析】

在同一坐标系内分别画出 $f(x)$、$g(x)$的图象,可得 $f(x)*g(x)$的图象,如图 1-2-1 中实线部分。由方程 $3-x=\sqrt{2x+5}$ 解得 $x=4-2\sqrt{3}$,所以当 $x=4-2\sqrt{3}$时,$f(x)*g(x)$

的最大值为 $y=2\sqrt{3}-1$

【方法点评】

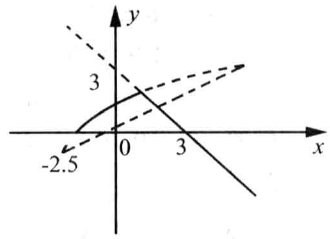

图 1-2-1

本题及时定义了一种新的函数，即 $\max[f(x),g(x)]$或$\min[f(x),g(x)]$型函数。它表示在定义域的不同部分，函数取这两个或两个以上函数值最大的函数式(或最小的函数式)。解答这类问题的基本思路是认识函数的图象和性质——数形结合——构造新函数。

【背景探源】

高考是要为高等院校选拔值得进一步深造的合格人才，因此特别注重对学习潜能的考查。而学习潜能的一个重要方面就是对新知识、新理论、新情境的阅读、理解、接受和运用能力。因此近几年考试题特别表现在新概念上的考察，即新定义一个概念与术语，要求学生通过阅读、分析、联想旧知识，在理解新信息本质的基础上，紧扣新信息的意义，把自己所学得的知识消化到问题中，从而使问题获解。

【相关链接】

设椭圆 C_1 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，曲线 C_2 的方程为 $y=\frac{1}{x}$，且 C_1 与 C_2 在第一象限内只有一个公共点 P。

(1) 试用 a 表示点 P 的坐标；

(2) 设 A、B 是椭圆 C_1 的两个焦点，当 a 变化时，求$\triangle ABP$ 的面积函数 $S(a)$的值域；

(3) 记 $\min\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 中最小的一个。设 $g(a)$是以椭圆 C_1 的半焦距为边长的正方形的面积，试求函数 $f(a)=\min\{g(a),S(a)\}$的表达式。

解答：(1) 将 $y=\frac{1}{x}$代入椭圆方程，化简得 $b^2x^4-a^2b^2x^2-4a^2=0$。

由 $\Delta=a^4b^4-4a^2b^2=0$，得 $ab=2$。于是可由方程解得 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$，$x=-\frac{a}{\sqrt{2}}$(舍去)。

故 P 的坐标为$\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}}{a}\right)$；

(2) 在$\triangle ABP$ 中，$|AB|=2\sqrt{a^2-b^2}$，高为$\frac{\sqrt{2}}{a}$，于是

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2-b^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2\left(1-\frac{4}{a^4}\right)}$$

$\because a>b>0, b\ \frac{2}{a}, \therefore a>\frac{2}{a}$，即 $a>\sqrt{2}$，得 $0<\frac{4}{a^4}<1$，于是 $0<S(a)<\sqrt{2}$，故$\triangle ABP$ 的面积函数$S(a)$的值域$(0,\sqrt{2})$；

(3) $g(a)=c^2=a^2-b^2=a^2-\frac{4}{a^2}$，解不等式 $g(a)\geqslant S(a)$，即 $a^2-\frac{4}{a^2}\geqslant\sqrt{2\left(1-\frac{4}{a^4}\right)}$，整理得 $a^8-10a^4+24\geqslant 0$，即$(a^4-4)(a^4-6)\geqslant 0$，解得 $a\leqslant\sqrt{2}$(舍去)，或 $a\geqslant\sqrt[4]{6}$，故

$$f(a)=\min\{g(a),S(a)\}=\begin{cases}a^2-\frac{4}{a^2} & (\sqrt{2}<a\leqslant\sqrt[4]{6})\\ \sqrt{2\left(1-\frac{4}{a^4}\right)} & (a>\sqrt[4]{6})\end{cases}$$

【类比训练】

1. 已知函数 $f(x)=2^x-1,g(x)=1-x^2$。构造函数 $F(x)$ 如下,当 $|f(x)|\geqslant g(x)$ 时,$F(x)=|f(x)|$,当 $|f(x)|<g(x)$ 时,$F(x)=-g(x)$,那么 $F(x)$ 有(　　)

A. 有最小值 0,无最大值　　B. 有最小值 -1,无最大值

C. 有最大值 1,无最小值　　D. 无最小值也无最大值

2. 对每一个实数,设 $f(x)$ 取 $4x+1,x+2,-2x+4$ 三者中的最小值,那么 $f(x)$ 的最大值是(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{5}{2}$

3. 记 $\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中最小的一个。

求证:(1) $\min\{x^2,x-1\}=x-1$。

(2) 设 a、$b\in\mathbf{R}^+$,$\min\left\{a,\frac{b}{4a^2+b^2}\right\}\leqslant\frac{1}{2}$。

案例精选 2

记函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在 $x_0\in D$,使 $f(x_0)=x_0$ 成立,则称以 (x_0,x_0) 为坐标的点为函数 $f(x)$ 图象上的不动点。

(1) 若函数 $f(x)=\frac{3x+a}{x+b}$ 图象上有两个关于原点对称的不动点,求 a,b 应满足的条件;

(2) 在(1)的条件下,若 $a=8$,记函数 $f(x)$ 图象上的两个不动点分别为 A 和 A',P 为函数 $f(x)$ 图象上的另一点,且其纵坐标为 $y_p>3$,求 $\triangle PAA'$ 面积的最小值及取得最小值时点 P 的坐标;

(3) 命题"若定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 图象上存在有限个不动点,则不动点有奇数个。"是否正确。若正确,请给予证明;若不正确,请举一反例。

【思路剖析】

(1) 设 (x_0,x_0) 是 $f(x)$ 的不动点,那么 $f(x_0)=\frac{3x_0+a}{x_0+b}=x_0$,即 $x_0^2+(b-3)x_0-a=0$。

由题意得 $b=3,a>0$。此时 $f(x)=\frac{3x+a}{x+3},x\neq-3$。

而当 $x=-3$ 时,得 $a=9$。因此 a、b 应满足 $b=3,a>0$ 且 $a\neq9$;

(2) 当 $a=8$ 时,$f(x)=\frac{3x+8}{x+3}>3,x<-3$。$f(x)=x$ 的两根为 $x=\pm2\sqrt{2}$,两个不动点为 $A(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$,$A'(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2})$,$|AA'|=8$,$P$ 点到直线 AA' 的距离为

$$d=\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|x-\frac{3x+8}{x+3}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|(-x-3)+\frac{1}{(-x-3)}+6\right|\geqslant4\sqrt{2}$$

而且仅当 $-x-3=\frac{1}{-x-3}$,即 $x=-4$ 时等号成立,d 取得最小值 $4\sqrt{2}$。

当 P 点为 $(-4,4)$ 时,

$$(S_{\triangle PAA'})_{\min}=\frac{1}{2}\times8\times4\sqrt{2}=16\sqrt{2}$$

(3) 命题正确。$\because f(x)$ 是奇函数,$\therefore f(-x)=-f(x)$。$\because x\in\mathbf{R}$,$\therefore f(0)=0$,因此原点

$(0,0)$是函数 $f(x)$的一个不动点。

设 $c\neq0$，(c,c)是奇函数 $f(x)$的一个不动点，则 $f(c)=c$。$\because f(-c)=-f(c)=-c$，因此$(-c,-c)$也是奇函数 $f(x)$的一个不动点。

这说明奇函数 $f(x)$的非零不动点如果存在，则必成对出现。根据题意，$f(x)$只有有限个不动点，故该函数的不动点个数是奇数。

【方法点评】

本题的定义中是把定义域内满足等式 $f(x)=x$ 的 x_0 所对应的点(x_0,y_0)称为函数 $f(x)$图象上的不动点，也有直接把 $x=x_0$ 就称为 $f(x)$图象不动点的定义。函数 $y=f(x)$图象的不动点实际上就是函数 $y=f(x)$图象与直线 $y=x$ 的交点。

【背景探源】

所谓“不动点”是荷兰数学家布劳威尔提出的不动点定理：“假如 X 是一个既紧又凸的拓扑空间，又设 f 是一个映 X 到自身的连续变换，则 f 在 x 中有一个不动点，即在 x 中有一点 x_0 使 $f(x_0)=x_0$”。2001 年全国高考理科数学第 20 题就是以高等数学 e 的发现过程为背景，融排列、组合二项式定理、不等式等知识于一体的绝妙好题。上海市近两年高考以“不动点”理论为背景的试题也频频出现。以此为素材设计的高考试题设问情境新颖、别致，它与函数、数列、不等式、解析几何等知识融为一体，具有很强的时代气息。

“不动点”是现代数学中的有趣概念，现代数学中不少分支都从不同的角度研究与它有关的问题：一般对这一问题的研究分两个方面：

研究不动点的存在问题，即“不动点理论”。不动点理论虽然告知不动点的存在，却没说究竟在哪里，这个问题竟然困扰数学家达半个世纪，1967 年，美国耶鲁大学的斯卡弗教授，在不动点由未知转向已知方面取得重大突破，他提出了一种用有限点列逼近不动点的算法，使不动点的应用取得了一系列卓越的成果。

研究不动点个数问题，即“不动点类理论”。在这方面，我国数学家做出了出色的贡献，江泽涵教授所著《不动点类理论》就是研究这方面的拓扑学专著。

近几年数学高考出现了以高等数学知识为背景的试题，被人们称之为“高观点”题。“高观点”题是指对于后续学习作用较大，而用初等数学知识又可解决的一类试题。它的主要特点是用新的“假定”、“指令”“构造数列发生器，规定其工作原理”等，定义新概念、创设新情景。考生首先要读懂新概念，理解新情景，获取有用新信息，然后才能综合运用数学知识分析、解决问题。其目的是考查综合能力和素质。是“出活题、考能力”在新形势下的发展，是值得关注的命题动向。

【相关链接】

(2002 上海春季高考试题)对于函数 $f(x)$，若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $f(x_0)=x_0$ 成立，则称 x_0 为 $f(x)$的不动点。已知函数 $f(x)=ax^2+(b+1)x+(b-1)(a\neq0)$；

(1) 当 $a=1,b=-2$ 时，求函数 $f(x)$的不动点；

(2) 若对任意实数 b，函数 $f(x)$恒有两个相异的不动点，求 a 的取值范围；

(3) 在(2)的条件下，若 $y=f(x)$图象上 A、B 两点的横坐标是函数$f(x)$的不动点，且 A、B 两点关于直线 $y=kx+\dfrac{1}{2a^2+1}$对称，求 b 的最小值。

分析：(1) 当 $a=1,b=-2$ 时，$f(x)=x^2-x-3$。

由题意可知 $x=x^2-x-3$，得 $x=-1$ 或 3。

故当 $a=1,b=-2$ 时，$f(x)$ 的两个不动点为 -1、3。

(2) 因为 $f(x)=ax^2+(b+1)x+(b-1)(a\neq0)$ 恒有两个不动点，所以 $f(x)=x$，即 $ax^2+(b+1)x+(b-1)=x$，即 $ax^2+bx+(b-1)=0$ 恒有两个相异的实数根，于是 $\Delta=b^2-4ab+4a>0(b\in\mathbf{R})$ 恒成立，于是 $\Delta=(4a)^2-16a<0$，解得 $0<a<1$。

故当 $b\in\mathbf{R}$，$f(x)$ 恒有两个相异的不动点时，a 的取值范围为 $0<a<1$。

(3) 由题意，A、B 两点应在直线 $y=x$ 上。设 $A(x_1,x_1)$、$B(x_2,x_2)$，AB 的中点为 $M(x',y')$。

由 x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+(b-1)=0$ 的两个根，知道 $x'=y'=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b}{2a}$。

因为点 A、B 关于直线 $y=kx+\dfrac{1}{2a^2+1}$ 对称，所以 $k=-1$。于是，点 M 在直线 $y=-x+\dfrac{1}{2a^2+1}$ 上，代入 M 点的坐标得 $b=-\dfrac{a}{2a^2+1}=-\dfrac{1}{2a+\dfrac{1}{a}}$。

因为 $a>0$，$2a+\dfrac{1}{a}\geqslant2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in(0,1)$ 时取等号。

故 b 的最小值为 $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$。

评注：这是通过阅读理解函数不动点的新概念，综合运用新旧知识解决面临的新问题的创新实践。这里解决第(3)小题的关键是深刻理解函数 $f(x)$ 的不动点，即方程 $f(x)=x$ 的解必在直线 $y=x$ 上，建立 b 与 a 的函数关系求出 b 的最小值。

【类比训练】

1. 对于定义在 R 的函数 $f(x)$，若实数 x_0 满足 $f(x_0)=x_0$，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个不动点。若二次函数 $f(x)=x^2+ax+1$ 没有不动点，则实数 a 的取值范围是________。

2. 对于任意定义在区间 D 上的函数 $f(x)$，若实数 $x_0\in D$ 满足 $f(x_0)=x_0$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个不动点。

(1) 求 $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}-2$ 在 $(0,+\infty)$ 上的不动点；

(2) 若函数 $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}+a$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有不动点，求 a 的取值范围。

3. 已知函数 $f(x)=6x-6x^2$，记函数 $g_1(x)=f(x)$，$g_2(x)=f[g_1(x)]$，$g_3(x)=f[g_2(x)]$，……$g_n(x)=f[g_{n-1}(x)]$，……

(1) 求证：如果存在一个实数 x_0，满足 $g_1(x_0)=x_0$，那么对一切 $n\in\mathbf{N}$，$g_n(x_0)=x_0$ 都成立。

(2) 若实数 x_0，$g_n(x_0)=x_0$，则称 x_0 为稳定不动点，试求出所有这些稳定不动点。

(3) 考察区间 $A=(-\infty,0)$，对于任意实数 $x_1\in A$，有 $g_1(x)=f(x)=a<0$，$g_2(x)=f[g_1(x)]=f(a)<0$，且 $n\geqslant2$ 时，$g_n(x)<0$，试问是否存在区间 $B(A\cap B=\varnothing)$，对于区间 B 内的任意实数 x，只要 $n\geqslant2$，都有 $g_n(x)<0$。

案例精选 3

(1) 阅读不等式 $2^x+1>3^x$ 的解法:

设 $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x$,因为函数 $y_1=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 和 $y_2=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 R 上单调递减,若任取 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1<x_2$,则

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1}>\left(\frac{2}{3}\right)^{x_2},\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}>\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2},\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}>\left(\frac{2}{3}\right)^{x_2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}$$

即有 $f(x_1)>f(x_2)$,因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内都单调递减。

$\because f(1)=1$,$\therefore$ 当 $x<1$ 时,$f(x)>1$;当 $x>1$ 时,$f(x)<1$。

$\therefore f(x)>1$ 的解为 $x<1$,故不等式 $2^x+1>3^x$ 的解为 $x<1$。

试用上面的方法解不等式 $3^x+4^x\geqslant5^x$。

(2) 证明:$3^x+4^x=5^x$ 有且仅有一个实数解 $x=2$。

【思路剖析】

(1) $3^x+4^x\geqslant5^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$,设函数 $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$,因为函数 $y_1=\left(\frac{3}{5}\right)^x$ 和 $y_2=\left(\frac{4}{5}\right)^x$ 在 R 上都是单调递减。在 R 上任取 x_1、x_2 且 $x_1<x_2$,则

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2},\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2},\therefore\quad\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2},$$

即 $f(x_1)>f(x_2)$,$\therefore f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$ 在 R 上单调递减。

又 $\because\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$,即 $f(2)=1$,$\therefore$ 当 $x<2$ 时,$f(x)>1$;当 $x>2$ 时,$f(x)<1$。

故不等式 $3^x+4^x\geqslant5^x$ 的解为 $x\leqslant2$。

(2) 方程 $3^x+4^x=5^x$ 等价于 $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$,由(1)的过程可知后式有且只有一个实数根 2,$\therefore$ 前式有且只有一个实数根 2。

【方法点评】

用函数的单调性求解方程、不等式(组),构造恰当的函数是解决问题的关键。因此,要特别注意观察方程、不等式(组)的特征,进行适当的变形,引进函数帮助解决问题。

【背景探源】

学习不仅是去获得经过分类的系统性知识,更重要的是为了掌握获得知识和解决问题的手段。学习数学思维方法十分重要。本题中,展现了等价变换的思想,即解 $2^x+1>3^x$ 等价于解 $\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x>1$;展现了构建函数的思想,设 $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x$,然后利用函数的性质切入本题的要害。解决本题最重要的手段是用到了函数的单调性,体现了变而不变的关系,动与静的关系,函数值 y 随自变量 x 的增大而减小,不断地变小,递减的趋势没有变。$f(1)=1$,即当 $x=1$ 时,$\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x=1$,这样就找到了重要的比照数,立即得到了结论。读懂了例子,学到了思维方式,虽然第(2)小题不是随手可解,却根据函数的单调性、一个特殊值以及等价变换的思想,不难到达解决问题的彼岸。

【相关链接】

已知 $n\in\mathbf{N}^*$，求解关于 x 的方程：$(1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}=4^n$。

解：原方程可变形为 $\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1-x}{2}\right)^{2n}=1$。

（1）当 $-1<x<1$ 时，$0<\frac{1+x}{2}<1$，$0<\frac{1-x}{2}<1$。

设 $f(x)=\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1-x}{2}\right)^{2n}$。因为 $2n>1$，所以由函数的单调性知 $f(x)<\left(\frac{1+x}{2}\right)^{1}+\left(\frac{1-x}{2}\right)^{1}=1$；

（2）当 $x>1$ 时，$\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n}>1$，$\left(\frac{1-x}{2}\right)^{2n}>0$。所以 $f(x)>1$；

（3）当 $x<-1$ 时，$\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n}>0$，$\left(\frac{1-x}{2}\right)^{2n}>1$。所以 $f(x)>1$；

（4）当 $x=\pm 1$ 时，$f(x)=1$。

故原方程的解为 $x=\pm 1$。

【类比训练】

1. 求证：使等式 $3^x+4^x+12^x=13^x$ 成立的实数有且只有一个，这个数是2。

2. 阅读不等式 $2^x+1>3^x$ 的解法：

设 $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x$，函数 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内都单调递减。

若 $x_1<x_2$，则 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1}>\left(\frac{2}{3}\right)^{x_2}$，$\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}>\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}$，即有 $f(x_1)>f(x_2)$，因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内都单调递减。

$\because f(1)=1$，$\therefore$ 当 $x<1$ 时，$f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x>1$；当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x\leqslant 1$。

$\because 3^x>0$，$\therefore$ 不等式 $2^x+1>3^x$ 的解为 $x<1$。

试用上面的方法解不等式 $2^x+3^x\geqslant 5^x$。

（2）证明：$2^x+3^x=5^x$ 有且仅有一个实数解 $x=1$。

3. 设 x 与 y 是实数，且满足

$$\begin{cases}(x-1)^3+1997(x-1)=-1\\(y-1)^3+1997(y-1)=1\end{cases}$$

求 $x+y$ 的值。

第三节 不等式为背景的知识学习

案例精选 1

对于函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，规定当 $f(x)\leqslant g(x)$ 时，$f(x)¤g(x)=f(x)$；当 $f(x)>g(x)$ 时，$f(x)¤g(x)=g(x)$。若 $f(x)=\sqrt{x+3}$，$g(x)=-x+3$，则 $f(x)¤g(x)$ 的最大值为________。

【思路剖析】

这里的新定义用已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的函数值的大小比较来确定 $f(x)¤g(x)$。阅

读题目后，理解 $f(x)¤g(x)$ 是取 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在同一 x 值对应的函数值中的较小的一个。

比较 $f(x)=\sqrt{x+3}$ 和 $g(x)=-x+3$ 的大小，解 $\sqrt{x+3}\leqslant -x+3$，得 $-3\leqslant x\leqslant 1$，

因此 $$f(x)¤g(x)=\begin{cases}\sqrt{x+3} & -3\leqslant x\leqslant 1\\ -x+3 & x>1\end{cases}$$

最后就是来求它的最大值。由于在区间 $[-3,1]$ 上 $f(x)¤g(x)$ 是递增的，在区间 $(1,+\infty)$ 上该函数是递减的，因此 $f(x)¤g(x)$ 在 $x=1$ 时取最大值 2。

【方法点评】

为求 $f(x)¤g(x)$ 的最大值，不能也不可能将所有的定义域 $[-3,+\infty)$ 上的 x 值对应的函数值列举出来后取最大值，而是通过解不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 和 $f(x)>g(x)$ 来确定什么时候 $f(x)¤g(x)=f(x)$，什么时候 $f(x)¤g(x)=g(x)$，从而写出按照自变量 x 值划分范围来确定的分段函数。

【背景探源】

题中由新定义引出新概念，从而写出以自变量 x 的取值范围为划分依据的分段函数。

【相关链接】

定义在正实数集合上一个运算 $*$，其规则为：当 $a>b$ 时，$a*b=b^3$；当 $a<b$ 时，$a*b=b^2$。根据这个规则，方程 $3*x=27$ 的解为________。

解答：$3\sqrt{3}$。

2. 已知函数 $f(x)=x$，$g(x)=2^{x-1}$，$h(x)=6-x$，对于一切实数 x，规定 $f(x)¤g(x)¤h(x)=\min[f(x),g(x),h(x)]$，求 $f(x)¤g(x)¤h(x)$ 的最大值。

解答：3。

3. 记 $\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中最小的一个。求证：

(1) $\min\{x^2,x-1\}=x-1$。

(2) 设 a、$b\in\mathbf{R}^+$，$\min\left\{a,\dfrac{b}{4a^2+b^2}\right\}\leqslant\dfrac{1}{2}$。

解答：(1) $\because x^2-(x-1)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，$\therefore x^2>x-1$。(2) 若 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$，显然命题成立；若 $a>\dfrac{1}{2}$，$4a^2+b^2\geqslant 4ab$，$\therefore 0<\dfrac{b}{4a^2+b^2}\leqslant\dfrac{b}{4ab}=\dfrac{1}{4a}<\dfrac{1}{2}$。

【类比训练】

1. 对于函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，规定当 $f(x)\geqslant g(x)$ 时，$f(x)*g(x)=f(x)$；当 $f(x)<g(x)$ 时，$f(x)*g(x)=g(x)$。现设 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，则 $f(x)*g(x)$ 的最小值为________。

2. 已知函数 $f(x)=2x+3$，$g(x)=x+3$，$h(x)=5-x$，设 $M(x)=\min[f(x),g(x),h(x)]$，求 $M(x)$ 的最大值。

案例精选 2

定义：若对 x 任意 $x_1,x_2\in(a,b)$ 恒有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上为“凹函数”。已知“凹函数”有如下性质：对任意的 $x_i\in(a,b)(i=1,2,\cdots,n)$，必有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}$ 成立，其中等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=$