

5

上冊

第 10 - 13 章

高中數學新探索

(必修部分)

顧問 張百康 孫淑南
編著 管俊傑 張美華 莊書榮 蔡銘哲

香港教育圖書公司

新高中適用

5

上冊

第 10 - 13 章

高中數學新探索

(必修部分)

顧問 張百康 孫淑南
編著 管俊傑 張美華 莊書榮 蔡銘哲

香港教育圖書公司

新高中適用

高中數學新探索

5

上冊

第10-13章

必修部分

本書遵照香港課程發展議會與香港考試及評核局聯合於2007年頒佈之《數學課程及評估指引（中四至中六）》編寫。

- 顧問 張百康 孫淑南
- 編著者 管俊傑 張美華 莊書榮 蔡銘哲
- 出版者 香港教育圖書公司
〔商務印書館（香港）有限公司全資附屬機構〕
香港筲箕灣耀興道3號東匯廣場8樓
電話：2565 1371
網址：<http://www.hkep.com>
- 印刷者 中華商務彩色印刷有限公司
新界大埔汀麗路36號中華商務印刷大廈14字樓
- 發行者 香港聯合書刊物流有限公司
新界大埔汀麗路36號中華商務印刷大廈3字樓
電話：2150 2100
網址：<http://www.commercialpress.com.hk>

2010年初版

2011年重印

© 2010 2011 香港教育圖書公司

ISBN 978-988-200-909-7

版權所有，如未經本公司書面批准，不得以任何方式，在世界任何地區，以中文或任何文字翻印、仿製或轉載本書圖版和文字之一部分或全部。

- 學校查詢 香港教育圖書公司市場部
電話：2887 8018
電郵：sales@hkep.com
網址：<http://www.hkep.com>

編寫說明

《高中數學新探索（必修部分）》是根據香港課程發展議會與香港考試及評核局聯合於2007年頒佈之《數學課程及評估指引（中四至中六）》編寫。全套教科書共分五冊，按六個階段供學生使用。

- 第4冊：** 第一階段 實數及複數、一元二次方程、函數及其圖像 (1)、
函數及其圖像 (2)、指數及對數函數
第二階段 直線方程、圓的基本性質 (1)、圓的基本性質 (2)、
數學的進一步應用 (1)
- 第5冊：** 第三階段 續多項式、續方程 (1)、續方程 (2)、變分
第四階段 三角學 (1)、三角學 (2)、三角學 (3)、數學的進一步應用 (2)
- 第6A冊：** 第五階段 等差與等比數列、排列與組合、續概率、離差的量度、
統計的應用及誤用
第六階段 軌跡、不等式與線性規劃、數學的進一步應用 (3)
- 第6B及6C冊：** 涵蓋整個初中數學科課程及高中數學科課程的必修部分的內容。提供精簡的溫習提要及解題示範，並配合不同程度的練習。

本書旨在：

- (a) 發展學生的數學知識、技能、概念及培養對學習數學的興趣；
- (b) 提升學生在生活中運用數學解決問題的能力和信心；以及
- (c) 著重學生理解及運用數學知識，以協助其日後升學及就業。

此外，透過書中多元化的內容如**數學工作坊**、**簡例示範**、**課堂練習**、**例題**及**跟進練習**等，協助學生鞏固所學及提升學習效益。

在編寫本教科書時，難免有疏漏及未盡完善之處。我們歡迎各位老師、同學及使用本教科書的人士不吝賜教，提供寶貴意見，至深銘感。

香港教育圖書公司
編輯出版部

承蒙各顧問及教師提供寶貴意見，使本系列數學教科書之內容充實及準確無誤，本社謹致以衷心謝意。

顧問

張百康先生
港島民生書院

孫淑南先生
資深數學科教師

編審

廖蔡生博士
華東師範大學數學系

審校老師

李永揚先生
順德聯誼總會鄭裕彤中學

卓永康先生
景嶺書院

林振雄先生
基督教四方福音會深培中學

陳百源先生
明愛沙田馬登基金中學

陳詠詩女士
嶺南中學

董志良先生
基督教四方福音會深培中學

潘嘉亮先生
港島民生書院

鄧俊偉先生
宣道會鄭榮之中學

本書內所引用的香港中學會考及香港高級程度會考試題，蒙香港考試及評核局准予使用，特此致謝。

本書內所引用的 GCE Ordinary Level Mathematics Examination 試題，蒙 University of Cambridge Local Examinations Syndicate 准予使用，特此致謝。（University of Cambridge Local Examinations Syndicate 對答案的準確性概不負責，有關責任由本公司承擔。）

對於提供相片版權的人士，以及未能取得聯絡或無由查詢之相片版權持有者，本公司謹致以衷心謝意。若有疏漏之處，請合法之相片版權持有者與本公司聯絡。

本書特色

本章概要

扼要列出每章課題。

導言

引發同學對學習數學的興趣。

個案研究

提供與課題相關的現實生活個案，讓同學對相關數學概念及其應用建立初步的認識。

10 續多項式

本章概要	
導言及個案研究	P2
10.1 多項式及其圖解	P3
10.2 多項式的特法	P3
10.3 軸式定理	P11
10.4 因式定理及其應用	P17
10.5 多項式的最大公因式及最小公倍式	P25
10.6 代數分式	P30
內容摘要	P34
綜合練習	P38
數學研習課	P40
本章流程	
10.1	10.3
10.2	10.4
	10.5

導言

在日常生活中，多項式可用來表示不同變數之間的關係。例如，把一處於停止狀態的物件從高處放下，該物件所下落的距離 x ，可利用一個以下落時間 t 為變數的多項式 $x = 5t^2$ 表示。此外，對於一個半徑為 r 的球體，其體積亦可以用多項式 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 來表示。



個案研究



在以上例子中，我們可以 r (為球體的半徑) 及多項式的形式表示石柱的球體部分及柱體部分的體積。由於我們已知石柱的體積，因此可以建立一條包含 r 的方程。當我們解此方程後，便可得知石柱球體部分的半徑。但一般涉及以半徑表示體積的方程的次數均為 3，這些方程並不容易求解。我們將在第 10.4 節學習解這類方程的方法。

建立一條聯繫石柱體積與半徑 r 的方程，所得方程的次數為何？



課程內的「非基礎部分」會以特別符號標示出來。

想一想

提供配合個案研究的思考題，以引起學習動機。

小回顧

讓學生重溫及鞏固在低年級，或在先前的章節所學的知識。

小回顧

1. 率

率是兩個不同變量的比較，且它具有單位。

例如，設李先生在兩小時內駕車行駛了 160 公里。

$$\text{他的車速} = \frac{160 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 80 \text{ km/h}$$

這就是說車速的平均速率是每小時 80 km 公里。

2. 比

比是用來比較兩個或多個變量的量，它沒有單位。

例如，若中四甲班有 28 名女生及 12 名男生，則男生及女生之

$$\text{比} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} \text{ 或 } 7:3$$

此外，若已知三個項的比如 $a:b:c = 1:2:3$ ，則

$$a:b = 1:2$$

在這兩個例子中，我們比較汽車所行駛的距離和時間。

簡例示範

提供清晰及簡易的範例，展示如何應用所學。

簡例示範

求下列各三角比的值。

(a) $\sin 160^\circ$

(b) $\tan 245^\circ$

(c) $\cos (-123^\circ)$

(d) $\sin (-246^\circ)$

(答案須準確至三位有效數字。)

解：

(a) $\sin 160^\circ = 0.342$ (準確至三位有效數字)

(b) $\tan 245^\circ = 2.14$ (準確至三位有效數字)

(c) $\cos (-123^\circ) = -0.545$ (準確至三位有效數字)

(d) $\sin (-246^\circ) = 0.914$ (準確至三位有效數字)

智慧提示

提供學習指引，協助同學糾正常犯錯誤。

課堂練習

求下列各三角比的值。(答案須準確至三位有效數字。)

(a) $\sin 323^\circ$

(b) $\sin 220^\circ$

(c) $\tan 342^\circ$

(d) $\tan 115^\circ$

(e) $\cos (-293^\circ)$

(f) $\sin (-52^\circ)$

(g) $\cos (-219^\circ)$

(h) $\tan (-126^\circ)$

課堂練習

提供基礎訓練，讓同學重溫剛學習的概念。

數學工作坊

透過富趣味性的活動，鼓勵同學主動探究。

數學工作坊 14.2

比較一個角及其參考角的三角比

1. 考慮一條位於象限 II 的終邊 OP ，其中 $P = (-12, 5)$ 。

設旋轉角為 θ 則其參考角為 β 。注意由於 $0^\circ < \beta < 90^\circ$ ，所以 $\sin \beta$ 、 $\cos \beta$ 及 $\tan \beta$ 均為正值。

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{5}{13}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{12}{13}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = -\frac{5}{12}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{13}{5}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = -\frac{13}{12}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = -\frac{12}{5}$$

位於象限 III 的終邊 OP ，其中 $P = (-12, -5)$ 。

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = -\frac{5}{13}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{12}{13}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{12}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = -\frac{13}{5}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = -\frac{13}{12}$$

3. 再考慮一條位於象限 IV 的終邊 OP ，其中 $P = (12, -5)$ 。

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = -\frac{5}{13}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{12}{13}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = -\frac{5}{12}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = -\frac{13}{5}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{13}{12}$$

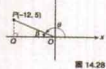


圖 14.28

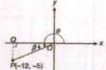


圖 14.29

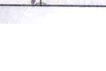


圖 14.30

思路分析

提供解題的思考方法及步驟。

例題

鞏固已學的數學概念。

多項式的加法、減法及乘法

讓我們首先在此節重溫多項式的一些基本運算，包括加法、減法及乘法。

例題 10.1

求 $2x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x - 8$ 加上 $x^4 - 5x^2 + 9x + 7$ 。

$$\begin{array}{r} 2x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x - 8 \\ + \quad x^4 - 5x^2 + 9x + 7 \\ \hline 3x^4 - x^3 + 0x^2 + 7x - 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (2x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x - 8) + (x^4 - 5x^2 + 9x + 7) \\ = 2x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x - 8 + x^4 - 5x^2 + 9x + 7 \\ = (2+1)x^4 - x^3 + (5-5)x^2 + (-2+9)x - 8 + 7 \\ = 3x^4 - x^3 + 7x - 1 \end{aligned}$$

跟進練習

求 $-4x^3 + 3x^2 - 11x + 6$ 加上 $-x^2 - 8x^2 + 9x^2$ 。

思路分析

把兩多項式按同一字母中，由低次項到高次項，最後按降次的順序排列。

跟進練習

請合併，並合併同類項。

另一種解法

提供同一問題的多種解法，鼓勵同學作多角度思考。

跟進練習

提供相關練習，協助同學掌握所學。

生活中的數學



在日常生活中，我們可觀察到很多切線的例子，如相片中的電車車輪與路軌便是其中一個例子。

生活中的數學

介紹日常生活中相關知識的應用。

跨學科資料館

簡介相關知識在其他學科領域中的應用或資訊。

物理資料館



一物體若只受到地心吸引力的影響而下墜時，我們稱之為自由落體。物體下墜時所經過的距離與所需時間的平方是成正變的。

例題 13.15

已知製造一球的成本 SC 一部分為常數，一部分則隨球的表面面積而正變。當球的半徑 r cm 為 6 cm 時，成本為 \$28；當球的半徑為 9 cm 時，成本為 \$38。

- 以 r 表示 C 。
- 若球的半徑為 12 cm，求成本。
- 若一半徑為 12 cm 的球以 \$65 售出，盈利百分數是多少？

解：

- 由於 C 一部分為常數，

工具箱

提示重要的公式、定理及法則。

工具箱

對於一球體，其表面面積 $= 4\pi r^2$ 。

練習

按程度分為初階題及進階題，方便同學進行測試及了解自己的學習進度。

練習 10.1

初階

簡化下列 (第 1-6 題) 各式，答案按 x 的降幂排列。

- $(x^3 - 2x^2 - 6x + 5) + (4x^3 - 5x^2 + 11x - 3)$ (練習 10.1)
- $(3x^4 - x^3 - 7x - 12) + (3x^3 - 2x^2 + 21x + 8)$
- $(-7x^4 + 5x^3 - 2x + 15) + (9x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 6)$
- $(3x^2 - 4x + 11) - (5x^2 - 13x - 6)$ (練習 10.1)
- $(9x^4 + 13x^2 - 7x - 14) - (-2x^4 + 6x^2 - 17x - 18)$
- $(-3x^4 - 2x^3 - 4x + 1) - (-5x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 4)$

展開下列 (第 7-10 題) 各式，答案按 x 的降幂排列。

- $3x^2(2x^2 - 6x - 11)$ (練習 10.1)
- $(2x^2 - x + 4)(2x - 1)$
- $(x + 1)(x - 5)^2$
- $(x - 4)(x - 2)(x + 2)$

11. 已知兩多項式 P 及 Q ，若從 Q 減去 P 的結果為 $3x^3 - 2x - 10$ ，則從 P 減去 Q 的結果為多少？

進階

展開並簡化下列 (第 12-17 題) 各式，答案按 x 的降幂排列。

- $2x(3x - 4) + 3x(5 - 7x)$
- $(2x + 1)(3x - 1) + (x - 3)(1 - 4x)$
- $(2 - x)^2 - (3x - 4)(x + 1)$
- $(x^2 - 2x - 1)(3 - 6x - 7x^2)$
- $2x(x - 3)(x - 1) + (3x^2 - 5x - 4)(x - 3)$
- $(3x^3 + 2x - 1)(x - 2) - (x^2 - 4x + 2)(x - 3)$

內容摘要

綜合該章所學知識，並輔以例題闡明相關概念。

內容摘要

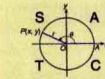
14.1 三角函數簡介

在一個直角坐標平面上， x 軸和 y 軸把平面分成四個象限。

14.2 任意角的三角比

利用「ASTC」圖，有助分辨在不同象限內，不同三角比的正負號。

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r} \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$



14.3 不使用計算機求三角比

若 θ 的參考角為 β ，

$$\begin{aligned} \text{則 } \sin \theta &= \pm \sin \beta, \cos \theta = \pm \cos \beta, \\ \tan \theta &= \pm \tan \beta. \end{aligned}$$

其中正負號 (+ 或 -) 取決於 θ 所在的象限。

14.4 內角公式

- (a) $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$
- (b) $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$
- (c) $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$

例 1

設 $\tan \theta = \frac{1}{2}$ 且 $\sin \theta < 0$ ，
(a) θ 位於哪個象限？
(b) 由此，求 $\sin \theta$ 的值。

解：

- 由於 $\tan \theta > 0$ 及 $\sin \theta < 0$ ，所以 θ 只能位於象限 III。
- 由於 θ 位於象限 III， $(-3, -1)$ 為 θ 的終邊上的一點，所以 $x = -3$ ， $y = -1$ 。

$$\begin{aligned} \text{由畢氏定理，} \\ r &= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \\ \therefore \sin \theta &= \frac{-1}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

例 2

解方程 $2\cos^2 \theta - 7\cos \theta - 4 = 0$ ，其中 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ 。

解：

$$2\cos^2 \theta - 7\cos \theta - 4 = 0$$

$$(2\cos \theta + 1)(\cos \theta - 4) = 0$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{1}{2} \text{ 或 } 4 \text{ (捨去)}$$

設 θ 的參考角為 β ，則

內容摘要

綜合例題

例 8

- 已知 $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ 。
- 求當 $P(x)$ 除以 $x+1$ 時的餘數。
 - 由此，因式分解 $P(x)$ 。
 - 解方程 $P(x) = 0$ 。

解：

(a) $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$
餘數 $= P(-1)$
 $= (-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6$
 $= 0$

10.3 餘式定理

- (b) 由於 $P(-1) = 0$ ， $x+1$ 為 $P(x)$ 的因式。
利用長除法：

$$\begin{array}{r} x^2 - 5x + 6 \\ x+1 \overline{) x^3 - 4x^2 + x + 6} \\ \underline{x^2 + x} \\ -5x^2 + x + 6 \\ \underline{-5x^2 - 5x} \\ 6x + 6 \\ \underline{6x + 6} \\ 0 \end{array}$$

10.4 因式定理及其應用

10.2 多項式的除法

$$\therefore P(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$$

$$= (x+1)(x-2)(x-3)$$

- (c) 由 (b) 的結果：
 $P(x) = 0$
 $(x+1)(x-2)(x-3) = 0$
 $x = -1, 2$ 或 3

例 9

- 已知多項式 $Q(x) = ax^2 - 7x + b$ ，當 $Q(x)$ 除以 $x-1$ 時，所得的餘數為 3；
又當 $Q(x)$ 除以 $x-2$ 時，所得的餘數為 14。
- 求 a 及 b 的值。
 - 若一多項式除以 $Q(x)$ 時，所得的商式及餘式分別為 $2x+5$ 及 $3x-1$ ，求該多項式。

綜合例題

聯繫該章內不同課節所教授的數學概念，讓同學融匯貫通，靈活運用所學知識。

綜合練習

提供精心設計的模擬會考及高級程度會考試題。「所屬章節」更標明了各題所屬章節，而較難的題目則附以「*」為記號。此外，當中更包括 1990—1996 年度的會考及高級程度會考試題。

152 | 第十三章

綜合練習

1. 設 y 隨 $x+3$ 而正變，圖中所示為 y 對 x 的圖像。

- 以 x 表示 y 。
- 求當 $x=20$ 時 y 的值。

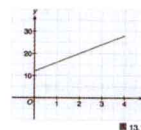


圖 13.12

2. 設 y 隨 x^2 而正變，且當 $x=4$ 時， $y=48$ 。

- 以 x 表示 y 。
- 求當 $x=11$ 時 y 的值。

3. 設 $y = \sqrt{x}$ ，且當 $x=4$ 時， $y=10$ 。

- 以 x 表示 y 。
- 求
 - 當 $x=36$ 時 y 的值；
 - 當 $y=20$ 時 x 的值。

4. 鋼珠的重量隨它的半徑的立方而正變，一顆半徑為 6 cm 的鋼珠重 540 g。

- 若鋼珠的半徑為 8 cm，求它的重量。
- 若鋼珠的重量為 20 kg，求它的半徑。

5. 設 y 隨 $4x+3$ 而正變，且當 $x=2$ 時， $y=55$ 。

- 以 x 表示 y 。
- 若 x 增加 1，求 y 的改變。

延展題

提供具挑戰性或跨學科的題目，進一步訓練分析及解難技巧。

解題策略

提供分析問題的重點及解題步驟。

多項式問題

55. (a) 證明 $x^3 - 1$ 可被 $x+1$ 整除。
(b) 求當 $x^3 - 1$ 除以 $x+1$ 時的商式。
(c) 證明 $11^3 - 1$ 可被 12 整除。

問題研習

例 10：設 $x=11$ ，則 $x+1=12$ 。
利用 (a) 得出其結論。

開放式問題

56. 對於多項式 $P(x) = x^2 - 7x + 4$ ，試找出一符合下列條件的多項式 $Q(x)$ ：當 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 分別除以 $x-1$ 時，餘數相等；當 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 分別除以 $x+1$ 時，餘數也相等。
57. 求一多項式 $P(x)$ ，使得 $2x-3$ 及 $4x-1$ 均為其因式，且當 $P(x)$ 除以 $x-1$ 時，所得的餘數為 4。

多項式選擇題

- 下列哪項多項式的常數項為 2？
 - $(3x-2)^2$
 - $x(2x^2-6x+2)$
 - $(x-1)^2(x+2)$
 - $(x-1)(x+1)^2+2$
- 多項式 $(x^2+x)(x-1)(x-4)$
 - 1
 - 2
 - 3
 - 4

開放式問題

有助擴闊思考空間，以及鍛鍊表達技巧。

多項選擇題

提供模擬公開考試的題目。

增潤篇

107

若我們取 $k = -\frac{p}{3}$ ，則方程 (5) 變成

$$z^3 + \frac{k^3}{27} + q = 0$$

$$z^3 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (6)$$

把 $u = z^3$ 代入 (6) 中，則方程 (6) 可變成二次方程

$$u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (7)$$

解以上的二次方程得出 u 的值，利用方程 $u = z^3$ ， $y = z + \frac{k}{z}$ 及 $x = y + k$ 和使用剛學的方法便可求出 x 的值。

下表總結了以上的步驟：

步驟	方程	代入方程
(1)	$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$	—
(2)	$y^3 + (3k + b)y^2 + (3k^2 + 2bk + cy + (b^2 + k^2 + ck + d)) = 0$	$x = y + k$
(3)	$y^3 + \left(\frac{b^2}{3} + c\right)y + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right) = 0$	$k = -\frac{b}{3}$
(4)	$y^3 + py + q = 0$	—
(5)	$z^3 + (3k + p)z + \frac{k(3k + p)}{z} + \frac{k^3}{27} + q = 0$	$y = z + \frac{k}{z}$
(6)	$z^3 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0$	$k = -\frac{p}{3}$
(7)	$u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0$	$u = z^3$
(8)	$u = z^3$ ， $y = z + \frac{k}{z}$ 及 $x = y + k$	—

表 12.2

數學增潤篇

每章末均以趣味性及生活化的數學知識及應用作為總結，引發同學對學習數學的興趣。

106

數學

韋達代入法

在第十章中，我們學過怎樣利用因式定理解三次方程。以因式定理解包含有理數根的方程是一種有效的方法，但它卻不能用來解不包含有理數根的三次方程。

對於一個不包含有理數根的三次方程，著名法國數學家韋達 (1540—1603) 創立了一種可求得所有實數根的方法，這方法稱為韋達代入法。

考慮以下方程：

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

把 $x = y + k$ 代入方程 (1) 中，可得

$$(y + k)^3 + b(y + k)^2 + c(y + k) + d = 0$$

$$y^3 + 3ky^2 + 3k^2y + k^3 + b^2y + 2bky + bk^2 + cy + ck + d = 0$$

$$y^3 + (3k + b)y^2 + (3k^2 + 2bk + cy + (b^2 + k^2 + ck + d)) = 0 \quad (2)$$

當 $k = -\frac{b}{3}$ ，我們便可消去二次項，則方程 (2) 可寫成

$$y^3 + \left(\frac{b^2}{3} + c\right)y + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right) = 0 \quad (3)$$

設 $p = \frac{b^2}{3} + c$ 及 $q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$ ，則方程 (3) 變成

$$y^3 + py + q = 0 \quad (4)$$

現在我們要把方程變成二次方程的形式，首先將 $y = z + \frac{k}{z}$ 代入方程 (4) 中，

$$\left(z + \frac{k}{z}\right)^3 + p\left(z + \frac{k}{z}\right) + q = 0$$

$$z^3 + (3k + p)z + \frac{k(3k + p)}{z} + \frac{k^3}{27} + q = 0 \quad (5)$$

傑出數學家簡介



傑出數學家簡介
法國著名數學家、物理學家
及工程師。他研究拋物線、橢圓、
雙曲線及螺旋線等。他還研究
了力學、光學及聲學。



http://www.britannica.com/stevin/stevin.html

傑出數學家簡介

簡介一些傑出數學家的成就及貢獻。

網上遊蹤

建議相關及有用的網頁。

總複習

提供精心設計的模擬會考及高級程度會考試題及 1997—2007 年度的會考及高級程度會考題目，幫助同學應付考試。

總複習三

在下列各題中，除特別指明外，數值皆以真確值表示或準確至三位有效數字。

- 求 a^2b^2 及 a^2b 的 G.C.D. 及 L.C.M.
- 求 $x^2 - 6x$ 及 $2x - 12$ 的 G.C.D. 及 L.C.M.
- 求 $a^3 - 9$ 及 $a^3 - 2a - 15$ 的 G.C.D. 及 L.C.M.
- 簡化 $(2 - x)(x^2 - 4x + 1) - x(x^2 - 5x + 1)$ ，並以 x 的降冪表示答案。
- 假設 $Ax^2 + (x + b)(x - 3) = (3x + 2)(x - 3) + 6x$ ，求 A 及 B 的值。
- 設 $f(x) = x^2 - 2x^2 - 5x + 6$ 。
(a) 證明 $x - 1$ 為 $f(x)$ 的因式。
(b) 由此，解 $f(x) = 0$ 。
- 當 $x^2 - 4x + 1$ 除以 $x + k$ 時，餘數為 $k + 11$ ，求 k 可取的值。
- 解以下聯立方程。
$$\begin{cases} x - 2y + 8 = 0 \\ y = x^2 + 3x - 5 \end{cases}$$

- 已知 y 為兩部分之和，一部分為 x 正數，另一部分為 x 的平方正數。當 $x = 3$ 時， $y = 3$ ；且當 $x = 4$ 時， $y = 12$ 。
(a) 以 x 表 y 。
(b) 若 x 為一實數且 $y < 42$ ，求 x 所有的可取值。

(香港中學會考 2004)



上 冊

第三階段

10 續多項式

導言及個案研究	1
小回顧	2
10.1 多項式及其運算	3
A. 一元多項式	3
B. 多項式的加法、減法及乘法	3
10.2 多項式的除法	5
A. 多項式除以單項式	5
B. 多項式的長除法	6
C. 多項式的除法算式	9
10.3 餘式定理	11
10.4 因式定理及其應用	17
A. 因式定理	17
B. 因式定理的應用	20
C. 應用因式定理的限制	22
 10.5 多項式的最大公因式及最小公倍式	26
 10.6 代數分式	30
A. 代數分式的乘法和除法	30
B. 代數分式的加法和減法	31
內容摘要	34
綜合練習	38
數學增潤篇	46

11 續方程 (1)

導言及個案研究	49
11.1 以圖解法解聯立方程	50
A. 以圖解法解一為一次及一為二次的聯立二元方程	50
B. 圖解法的應用	55

內容摘要	62
綜合練習	64
數學增潤篇	68

非基礎部分

12 續方程 (2)

導言及個案研究	71
小回顧	72
12.1 可變換為二次方程的方程	73
A. 分式方程	73
B. 高次方程	74
C. 根式方程	75
D. 指數方程	76
12.2 解聯立方程	78
A. 以代數方法解聯立方程	78
B. 拋物線與直線交點的數目	81
12.3 有關二次方程的應用題	85
A. 二次方程應用題	85
B. 聯立方程應用題	88
內容摘要	94
綜合練習	98
數學增潤篇	106

13 變分

導言及個案研究	109
小回顧	110
13.1 正變	110
13.2 反變	118
13.3 聯變	126
13.4 部分變	132
內容摘要	142
綜合練習	146
數學增潤篇	156

下 冊

第四階段

14 三角學 (1)

導言及個案研究	159
小回顧	160
14.1 三角學簡介	161
A. 旋轉角	161
B. 象限	162
14.2 任意角的三角比	164
A. 定義	164
B. 三角比的正負值	166
C. 使用計算機求三角比	168
14.3 不使用計算機求三角比	171
A. 由坐標軸所形成的角	171
B. 考慮參考角	171
C. 利用已知的三角比求其他三角比	175
14.4 三角恒等式	178
14.5 三角方程	181
A. 由已知三角比求角	181
B. 簡易三角方程	182
C. 其他三角方程	183
14.6 三角函數的圖像	186
A. $y = \sin x$ 的圖像	186
B. $y = \cos x$ 的圖像	188
C. $y = \tan x$ 的圖像	189
D. 三角函數圖像的變換	191
14.7 三角方程的圖解法	196
內容摘要	204
綜合練習	208
數學增潤篇	216

15 三角學 (2)

導言及個案研究	219
小回顧	220
15.1 三角形的面積	221
15.2 正弦公式	228
A. 解一個已知兩角及任意一邊的三角形	228
B. 解一個已知兩邊及一個非夾角的三角形	231
15.3 餘弦公式	238
15.4 希羅公式	246
內容摘要	252
綜合練習	256
數學增潤篇	266

16 三角學 (3)

導言及個案研究	269
16.1 平面問題中的應用	270
A. 仰角及俯角	270
B. 方位	273
16.2 立體圖形中的基本名詞	279
A. 基本名詞及定義	279
B. 最大斜率線	288
16.3 立體問題中的應用	295
內容摘要	302
綜合練習	306
數學增潤篇	318

答案	321
索引	342

17 數學的進一步應用 (2)

附錄 1 – 25

導言及個案研究	1
17.1 自然數	2
A. 質數及合成數	2
B. 完全數	5
17.2 行程圖	8
17.3 注水遊戲	18
內容摘要	20
綜合練習	21
數學增潤篇	24

總複習三	附錄 27 – 39
------	------------

總複習四	附錄 41 – 58
------	------------

答案	附錄 59
----	-------

索引	附錄 64
----	-------

個案研究

我們需要以多項式來表示石柱的體積。然後解所得方程，以求半徑的值。

若我們知道每條石柱的體積為 $22\,500\pi\text{ cm}^3$ ，則如何求得球體部分的半徑呢？

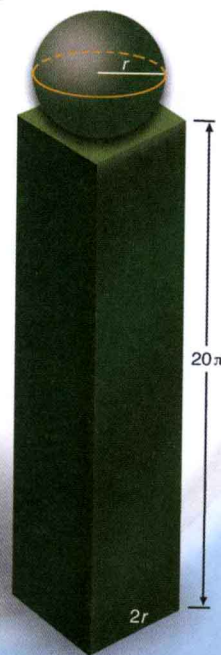


在以上例子中，我們可以 r (r 為球體的半徑) 及多項式的形式表示石柱的球體部分及柱體部分的體積。由於我們已知石柱的體積，因此可以建立一條包含 r 的方程。當我們解此方程後，便可得知石柱球體部分的半徑。但一般涉及以半徑表示體積的方程的次數均為 3，這些方程並不容易求解。我們將在第 10.4 節學習解這類方程的方法。



想一想

建立一條連繫石柱體積與半徑 r 的方程。所得方程的次數為何？



小回顧

1. 函數及函數值

已知函數 $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 7x + 2$ 。

當 $x = 1$ 時，

$$\begin{aligned} f(1) &= 3(1)^3 + 4(1)^2 - 7(1) + 2 \\ &= 3 + 4 - 7 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. 重要恒等式

$$(a) \quad (a-b)(a+b) \equiv a^2 - b^2$$

$$(b) \quad (a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

$$(c) \quad (a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$

$$(d) \quad (a+b)(a^2 - ab + b^2) \equiv a^3 + b^3$$

$$(e) \quad (a-b)(a^2 + ab + b^2) \equiv a^3 - b^3$$

例如： $(x-4)(x+4) = x^2 - 16$

$$(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

$$(x+4)(x^2 - 4x + 4^2) = x^3 + 4^3$$

$$(x-4)(x^2 + 4x + 4^2) = x^3 - 4^3$$

3. 二次公式

已知二次方程為 $ax^2 + bx + c = 0$ ，其中 $a \neq 0$ ，則

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}。$$

例如，對於 $x^2 - 4x - 2 = 0$ ，

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2} \quad \blacktriangleleft \quad \sqrt{24} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6} \\ &= 2 \pm \sqrt{6} \end{aligned}$$



智慧提示

在第 10.3 及 10.4 節中，我們將要計算不同函數的函數值。

10.1 多項式及其運算

A 一元多項式

在初中階段，我們已學習一些代數式如 $x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ 。這代數式便是一元多項式的其中一個例子。而一個 n 次的一元多項式的一般式為

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

- 其中
- (i) n 為非負整數；
 - (ii) 係數 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ 為實數及 $a_n \neq 0$ ；
 - (iii) a_0 稱為多項式的**常數項**。



智慧提示

- ▶ 多項式的次數與最高次數項的次數相同。
- ▶ 一般來說，多項式均會按各變數次數的遞減次序排列。

B 多項式的加法、減法及乘法

讓我們首先在此節重溫多項式的一些基本運算，包括加法、減法及乘法。



例題 10.1

求 $2x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x - 8$ 加上 $x^4 - 5x^2 + 9x + 7$ 。

解：

$$\begin{array}{r} 2x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x - 8 \\ +) \quad x^4 \quad \quad - 5x^2 + 9x + 7 \\ \hline 3x^4 - x^3 \quad \quad + 7x - 1 \end{array}$$

另一種解法

$$\begin{aligned} & (2x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x - 8) + (x^4 - 5x^2 + 9x + 7) \\ &= 2x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x - 8 + x^4 - 5x^2 + 9x + 7 \\ &= (2+1)x^4 - x^3 + (5-5)x^2 + (-2+9)x - 8 + 7 \\ &= \underline{3x^4 - x^3 + 7x - 1} \end{aligned}$$



思路分析

把同類項放於同一直行中，而缺項則留下空位。最後按 x 的降冪排列。



智慧提示

消去括號，並合併同類項。

跟進練習

求 $-4x^5 + 3x^3 - 11x + 6$ 加上 $-x^5 - 8x^3 + 9x^2$ 。