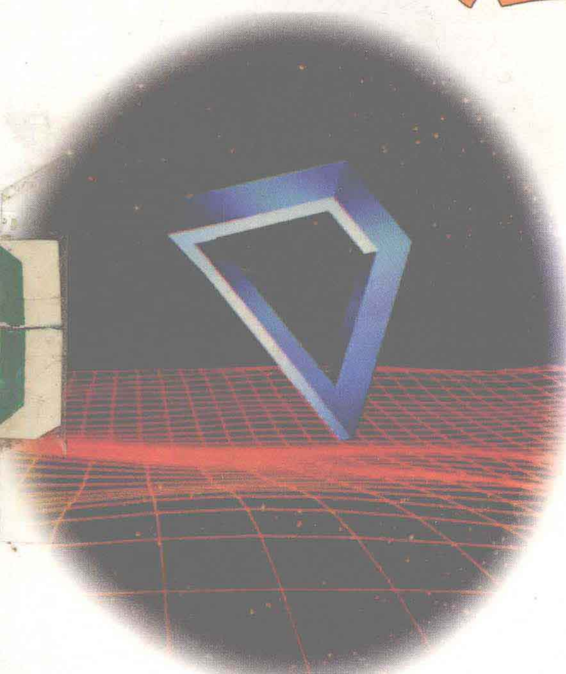
蔡声仪 编

# 初中数学解题方法与技巧



提高学生应试能力与解题技巧是本书的根本目的．书中设有选择、填空、解答、计算、实验、信息给予等题型．是您取得最佳成绩的理想丛书．

北京师范大学出版社

# 初中数学解题方法与技巧

蔡声仪　编

北京师范大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

初中数学解题方法与技巧/蔡声仪编.-北京:北京师范大学出版社,1995.12重印

ISBN 7-303-02562-6

Ⅰ.初… Ⅱ.蔡… Ⅲ.初中-数学课-解题-方法
Ⅳ.G634.606

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第16536号

北京师范大学出版社出版发行
(100875 北京新街口外大街19号)
北京怀柔东晓印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本:787×1092 1/32 印张:6.75 字数:141千
1993年12月北京第1版 1996年7月北京第3次印刷
定价:6.50元

# 前　言

为了帮助广大中学生更好地学习和掌握国家教委颁发的教学大纲规定的基础知识和基本技能，提高学生的解题和应试能力，我们以中学生学习报社主办的《试题研究》杂志中“解题探讨”专栏八年来刊发的各地专家、教研员和中学教师的优秀文章为主要内容，选编了“解题方法与解题技巧”丛书。这套丛书包括《高中数学解题方法与技巧》、《高中物理解题方法与技巧》、《高中化学解题方法与技巧》、《初中数学解题方法与技巧》、《初中物理解题方法与技巧》、《初中化学解题方法与技巧》共6册。

《初中数学解题方法与技巧》一书，分四部分内容：一、代数部分；二、几何部分；三、综合部分；四、练习题。每套练习题后均附有参考答案。前三部分内容，主要介绍了目前中考与数学竞赛中一些重点或难点问题的解题方法与技巧，练习题包括了现在中考试题中的各类题型，知识和能力覆盖面均相当广泛，难度适中。

此套丛书可供中学生平时学习、复习应试和中学教师教学参考。

这套丛书自1992年出版以来，深受读者欢迎，现又补充、修订再版。

感谢各位读者的合作与支持，欢迎批评指导。

编　者

1995. 4

# 目　录

## 代数部分



## 几何部分

## 综合部分



## 练 习 题

# 代 数 部 分

## 因式分解时的变形方法

上海市育才中学　章淳立

因式分解的第一步往往是要将分解式进行适当变形，使其变成能提公因式或能利用乘法公式的形式．那么如何将分解式变形呢？本文介绍常用的一些变形方法．

**一、符号变形**

若分解式的一些项中所含的因式仅相差一个符号，则可以其中某一因式为标准，将与该因式仅相差一个符号的因式通过符号变形化为相同因式，以便采用提公因式法或公式法进行分解．

**例 1**　分解因式 $a(a-b)+c(b-a)+b(c-a)$．

**解**：原式 $=a(a-b)-c(a-b)+b(c-a)$

$=(a-b)(a-c)-b(a-c)$

$=(a-c)(a-2b)$．

**例 2**　分解因式 $2x(b-a)-x^2-a^2+2ab-b^2$

**解**：原式 $=-2x(a-b)-x^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=-[x^2+2x(a-b)+(a-b)^2]$

$=-(x+a-b)^2$．

**二、指数变形**

若分解式的各项中含有相同的字母，但相同字母的指数

不等，则可取最低的指数为标准，将各项中含有相同字母的因式变形成含有指数最低的因式的积，然后用提公因式或公式法进行分解.

**例 3** 分解因式 $a^{3n-1}b^{n-1}-2a^{2n}b^{2n}+a^{n+1}b^{3n+1}$.

**解**：原式 $=a^{n+1}b^{n-1}[a^{2(n-1)}-2a^{n-1}b^{n+1}+b^{2(n+1)}]$

$=a^{n+1}b^{n-1}(a^{n-1}-b^{n+1})^2$.

**三、确定主元变形**

当分解式中含有多个字母，又无法直接采用提公因式或公式法等常用分解方法时，则可以其中某一字母为主元将分解式进行重新整理，使原式变成易于分解的形式.

**例 4** 分解因式 $a^2x^2+ax^2+2ax+x-a^2-a$.

此分解式比较复杂，不易直接提公因式或应用乘法公式来分解。但仔细观察可发现分解式是关于 $x$ 或是关于 $a$ 的二次三项式，于是可用二次三项式的十字相乘法来分解. 那么分解式看作是依哪一个字母为主元的二次三项式呢？主元选择的原则是要利于分解. 对本例来说不妨将分解式分别以 $x$ 或 $a$ 为主元进行整理，不难看出以 $a$ 为主元的二次三项式易用十字相乘法分解.

**解**：原式 $=(x^2-1)a^2+(x^2+2x-1)a+x$

$=[(x+1)a+1][(x-1)a+x]$

$=(ax+a+1)(ax+x-a)$.

**四、联想乘法公式变形式进行变形**

分解式中某些项是多项式或多项式积的形式时，往往可考虑采用乘法公式的变形式来变形.

**例 5** 分解因式 $(a+b-c-d)^2-4(a-c)(b-d)$.

本例如直接将分解式展开重新组合进行分解，显然是冗

繁的. 于是可联想到乘法公式的变形式如$(x+y)^2-4xy=(x-y)^2$. 由此启发我们可将$a+b-c-d$变形成$(a-c)+(b-d)$,由此得如下解法:

**解**:原式$=[(a-c)+(b-d)]^2-4(a-c)(b-d)$

$=[(a-c)-(b-d)]^2=(a-b-c+d)^2$.

**五、先展开后重新组合的变形**

如分解式中的某些项以多项式乘积形式出现,又不易直接进行分解时,常可将这种乘积项先展开,然后将各项重新组合成易于分解的形式.

**例6** 分解因式$ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$.

**解**:原式$=abx^2+aby^2+a^2xy+b^2xy$

$=ax(bx+ay)+by(ay+bx)$

$=(ay+bx)(ax+by)$.

此例若不先展开重新组合的话是无法分解的.

**六、换元变形**

若分解式中的一些项本身又含有多项式,这种分解式势必冗长. 对此常可设辅助未知数来替代某些多项式,使分解式简化,以利分解.

**例7** 分解因式$(x+y)^2-2(x+y)+2xy-x^2y^2$.

分解式中只出现$x+y$和$xy$两种形式的项. 如令$a=x+y$,$b=xy$,则可使分解式简化,从而利于分解.

**解**:原式$=a^2-2a+2b-b^2$

$=a^2-b^2-2(a-b)$

$=(a-b)(a+b-2)$

$=(x+y-xy)(x+y+xy-2)$.

**例8** 分解因式$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-8$.

**解**: 原式$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-8$.

令 $a=x^2+5x+4$,则

原式$=a(a+2)-8$

$=a^2+2a-8$

$=(a+4)(a-2)$

$=(x^2+5x+4+4)(x^2+5x+4-2)$

$=(x^2+5x+8)(x^2+5x+2)$.

**例 9** 分解因式$(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)-8x^2$.

**解**:原式$=(x^2+7x+6)(x^2+5x+6)-8x^2$.

令 $a=x^2+5x+6$,则

原式$=(a+2x)a-8x^2$

$=a^2+2ax-8x^2$

$=(a+4x)(a-2x)$

$=(x^2+9x+6)(x^2+3x+6)$.

请注意例 8、例 9 分解式的特点和如何两两组合展开的方法. 例 8 两两组合展开是以保证两个展开式中的二次项和一次项系数相等为原则来考虑选择因式组合展开的;而例 9 是以保证二次项系数和常数项相等为原则来考虑选择因式组合展开的. 至于为什么要这样做,是容易从这两例的分解过程中找到答案的,留给同学们去思考.

## 七、拆项变形

当分解式不易直接进行分解时,可考虑将其中的某些项拆成几项和. 拆项的原则是:拆项后利于提公因式或应用乘法公式等分解方法.

**例 10** 分解因式$(x^2-y^2)^2-8(x^2+y^2)+16$.

不难看出,如能将 $8(x^2+y^2)$变成 $8(x^2-y^2)$,那么该分解

式就成为完全平方式了. 而要使 $8(x^2+y^2)$ 变成 $8(x^2-y^2)$，则只需这样变形 $8(x^2+y^2)=8(x^2-y^2)+16y^2$，而 $16y^2$ 又是平方式，这样又可利用平方差公式了，于是得到这样解法：

**解**：原式 $=(x^2-y^2)^2-8(x^2-y^2)+16-16y^2$

$$
\begin{aligned}
&=[(x^2-y^2)-4]^2-(4y)^2\\
&=(x^2-y^2-4+4y)(x^2-y^2-4-4y)\\
&=[x^2-(y-2)^2][x^2-(y+2)^2]\\
&=(x+y-2)(x-y+2)(x+y+2)(x-y-2).
\end{aligned}
$$

**例 11**　分解因式 $x^3+4x^2+x-6$.

**解**：原式 $=x^3+3x^2+x^2+3x-2x-6$

$$
\begin{aligned}
&=x^2(x+3)+x(x+3)-2(x+3)\\
&=(x+3)(x^2+x-2)\\
&=(x+3)(x+2)(x-1).
\end{aligned}
$$

本例也给出了一元三次多项式分解因式的一个基本方法：拆二次项、一次项系数，使原来四项变成六项，从高次到低次相邻两项为一组，把六项分成三组，拆项的原则是要求三组的系数比相等，然后按三组用分组分解法进行分解. 这种分解法可简要地用口诀表述为：二次项系数是“牛鼻”，一次项系数跟着走，要知分解成功否，只需看系数是否成比例.

**八、添项变形** (加减[illegible])

当分解式因缺项不能应用公式法、十字相乘法等方法进行分解时，往往可考虑在分解式中加减一个相同的项，然后再分解. 这种加减一个相同项的变形叫添项变形.

**例 12**　分解因式 $x^4+64$.

**解**：原式 $=x^4+16x^2+64-16x^2$

$$
=(x^2+8)^2-(4x)^2
$$

$$=(x^2+4x+8)(x^2-4x+8).$$

说明：

1. 添项变形也可理解为是拆项变形.本例中的添项可理解为由 $0x^2$ 拆为 $16x^2$ 和 $-16x^2$ 两项.

2. 添项变形不一定是唯一的，有时可有多种变形途径，一般选择较易想到又运算较为简便的变形方法.请看下例：

**例 13** 分解因式 $a^3-3a+2$.

**解**：添项变形方法之一：

$$\begin{aligned}\text{原式}&=a^3+2a^2-2a^2-4a+a+2\\&=a^2(a+2)-2a(a+2)+(a+2)\\&=(a+2)(a^2-2a+1)\\&=(a+2)(a-1)^2.\end{aligned}$$

添项变形方法之二：

$$\begin{aligned}\text{原式}&=a^3-a^2+a^2-a-2a+2\\&=a^2(a-1)+a(a-1)-2(a-1)\\&=(a-1)(a^2+a-2)\\&=(a-1)(a+2)(a-1)\\&=(a+2)(a-1)^2.\end{aligned}$$

**九、分组变形**

当分解式的各项既没有公因式，也不能直接应用公式法或十字相乘法进行分解时，可考虑先将分解式适当分组，使每组能分解，然后再用提公因式或公式法、十字相乘法来分解.这里应指出的是分组应遵循二条原则：(1)分组后每组要能分解；(2)每组分解后，要能继续进行分解.

**例 14** 分解因式 $x^2-2x+2y-y^2$.

**解**：原式 $=x^2-y^2-2x+2y$

$$=(x+y)(x-y)-2(x-y)$$
$$=(x-y)(x+y-2).$$

本例若以前二项为一组，后二项为一组来分组，虽然每组都可分解，但继续分解遇到了困难，因此这样分组是不合适的.

**例 15** 分解因式 $x^2-y^2-2xz+z^2$.

**解**：原式 $=x^2-2xz+z^2-y^2$

$$=(x-z)^2-y^2=(x+y-z)(x-y-z).$$

**例 16** 分解因式 $x^4+2x^3-x^2+2x+1$.

**解**：原式 $=x^4+2x^2+1+2x^3+2x-3x^2$

$$=(x^2+1)^2+2x(x^2+1)-3x^2$$
$$=[(x^2+1)+3x][(x^2+1)-x]$$
$$=(x^2+3x+1)(x^2-x+1).$$

上面介绍了在因式分解时常用的一些变形方法. 由于因式分解的方法有多种，因此变形方法也较灵活，到底在什么情况下用什么变形方法，要视具体分解式的特点而定. 对较复杂的分解式，往往要综合运用上述变形方法进行变形才能进行分解.

# 整数与竞赛题

河南焦作市教师进修学校　曹松峰

**引例** （唯一答案选择题）在整数 0，1，2，3，4，5，6，7.8，9 中，质数的个数为 $x$，偶数的个数为 $y$，完全平方数的个数为 $z$，则 $x+y+z$ 等于（　　）

(A)14. (B)13. (C)12. (D)11. (E)10.

(1984 年北京市初二数学竞赛试题)

容易看出正确答案是(B). 但对于这样一道较容易的题，在一次测试中得分率竟低达百分之十四. 原因何在?不少学生对质数、偶数、完全平方数这些整数的基本概念十分陌生、似是而非，作为数学大厦基石的整数理论并没有在学生头脑里牢固地树立起来!毫无疑问，这将给他们进一步学习带来很多困难. 为此，本文试图将整数的基本知识作以简单归纳，并以一些数学竞赛题为例，说明它们在解题中的广泛应用.

## 一、整数的多项式表示法

在十进制中，任何一个正整数都可以写成

$a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+a_1\times 10+a_0$ 的形式，其中 $a_i$ 都是整数，$0\leqslant a_i\leqslant 9(i=0,1,\cdots,n)$，且 $a_n\neq 0$，这称为整数的多项式表示法.

在涉及自然数的题目中，给出原数与互换数字后的新数之间的数量关系或有关各位数字的题设时，使用整数的多项式表示法常常可以使已知条件明朗化，为问题的求解铺平道路.

**例 1** 两位数$\overline{xy}$(这里 $x$、$y$ 分别表示十位数字与个位数字)，减去互换位置后的自然数 $\overline{yx}$，所得的差恰好是某自然数的立方，这样的两位数共有________个.

(1989 年上海市初二数学竞赛试题)

**解**:由题意，设$(10x+y)-(10y+x)=n^3$($n$ 为自然数)，即 $9(x-y)=n^3$，显然，$x-y$ 中应含有 3 这个质因数，而 $0\leqslant x-y\leqslant 9$，所以，$x-y=3$，取 $x=3,4,5,6,7,8,9$，得 $y=0,1,2,3,4,5,6$(此时 $n^3=27$)，分别组成满足条件的两位数 30，41，

52,63,74,85,96 共七个.

**例 2** 求一个四位数,它的前两位数字及后两位数字分别相同,而该数本身等于一个整数的平方.

(1956—1957 年波兰数学竞赛试题)

仿例 1 大家不难求得本题的答案是 7744.

**二、奇数和偶数**

在整数中,能被 2 整除的数叫偶数. 注意:零也是偶数. 不能被 2 整除的数叫奇数(偶数与双数、奇数与单数的概念相同吗?). 据此,整数可分为奇数和偶数两类. 通常用 $2k-1$ 或 $2k+1$ 表示奇数,$2k$ 表示偶数($k$ 为整数). 奇数、偶数有一些十分简单有用的性质,如:奇偶性相同的两个整数的和或差是偶数,偶数与奇数、偶数与偶数的乘积是偶数等.

**例 3** (唯一答案选择题)满足等式 $1983=1982x-1981y$ 的一组自然数是(　　)

(A) $\begin{cases}x=12785,\\y=12768.\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}x=12784,\\y=12770.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}x=11888,\\y=11893.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}x=1947,\\y=1945.\end{cases}$

(1983 年福建省中学数学竞赛题)

**分析**:所给的四组 $x$、$y$ 值,数字都比较大,不宜采用逐一代入验证的方法判断. 仔细观察原方程后可知,由于右端 $1982x$ 必是偶数,而 $1982x$ 与 $1981y$ 的差为 1983(奇数),因此,$1981y$ 和 $y$ 只能是奇数.

**解**:由以上分析,首先排除(A)和(B),再由 1983 的个位数是 3,可排除(D),故选(C).

**例 4** 已知 $n$ 是偶数,$m$ 是奇数,方程组

$\begin{cases}x-1988y=n,\\11x+27y=m\end{cases}$的解$\begin{cases}x=p,\\y=q\end{cases}$是整数，那么(　　)

(A)$p$、$q$ 都是偶数.

(B)$p$、$q$ 都是奇数.

(C)$p$ 是偶数，$q$ 是奇数.

(D)$p$ 是奇数，$q$ 是偶数.

(第一届"祖冲之杯"初中数学邀请赛试题)

哪个对呢？请大家作出正确选择.

**例 5**　某电影院共有 1985 个座位. 某天，这家电影院上、下午各演一场电影. 看电影的是甲、乙两所中学的各 1985 名学生(同一个学校的学生有的看上午场，也有的看下午场)，试证明：电影院一定有这样的座位，这天看电影时，上、下午在这个座位上坐的是两个不同学校的学生.

(1985 年北京市初二数学竞赛试题)

**证明**：设甲校上午场有 $n$ 个学生，则乙校上午场定有 $1985-n$ 个学生. 此时，甲校上午场共占 $n$ 个座位，乙校上午场占有 $1985-n$ 个座位. 到了下午场，甲校应占 $1985-n$ 个座位，乙校应占 $n$ 个座位. 假设每个座位上、下午坐的都是同一学校的学生，则每个学校上午占的座位数与下午占的座位数必相等，即 $n=1985-n$，也就是 $2n=1985$，这不可能. 故原结论成立.

当我们对涉及奇、偶数的题目中的数量关系知之甚少，难于下手时，朝着推出"奇数＝偶数"矛盾式的方向努力，常可奏效.

## 三、完全平方数

如果 $a$ 是整数，那么 $a^2$ 就叫做 $a$ 的完全平方数. 应当指

出的是:0 和 1 都是完全平方数;完全平方数的个位数只能为 0,1,4,5,6,9.

**例 6** 两个正整数的和比积小 1000,并且其中一个是完全平方数,试求较大数与较小数的比值.

(1987 年北京市初二数学竞赛试题)

**解**:不妨设两个正整数分别为 $x$、$y$,其中 $x$ 是完全平方数. 依题意,得 $x+y+1000=xy$,即 $(x-1)(y-1)=7\times 11\times 13$. 显然,$x-1$ 只能取 7,11,13,77,91,143 这 6 个值,$x$ 只能取 8,12,14,78,92,144. 因此,$x=144$. 这时,$y-1=7$,$y=8$,故 $\frac{x}{y}=\frac{144}{8}=18$.

**四、整数与同余**

在整数集中,整数 $a$ 除以整数 $b(b\neq 0)$,一般有 $a=bq+r$,其中 $q$ 也是整数,$0\leqslant r<|b|$. 当 $r=0$ 时,称 $a$ 能被 $b$ 整除(或 $b$ 能整除 $a$),记作 $b|a$. 当 $r\neq 0$ 时,称 $a$ 不能被 $b$ 整除,记作 $b\nmid a$. 显而易见,$\pm 1|a$,$b|b$,$b|0(b\neq 0)$.

**例 7** 将自然数 $N$ 接写在每一个自然数的右面(例如,将 2 接写在 35 的右面得 352),如果得到的新数都能被 $N$ 整除,那么 $N$ 称为魔术数. 在小于 130 的自然数中,魔术数的个数有多少?

(1986 年全国初中数学联赛试题)

**解**:任取自然数 $P$,设魔术数为 $N$($m$ 位数),接写后的数记作 $\overline{PN}$,则由 $\overline{PN}=P\times 10^m+N$,从而 $P\times 10^m$ 能被 $N$ 整除,由 $P$ 的任意性推知,$N$ 为魔术数的条件是 $10^m$ 能被 $N$ 整除. 而当 $m=1$ 时,$N=1,2,5$;$m=2$ 时,$N=10,20,25,50$;$m=3$ 且 $N<130$ 时,$N=100,125$. 故小于 130 的魔术数有 9 个.