

聚 焦 考 研

数 学

NETEM
MATHS

经济类

2005 版

主 编 | 陈文灯 / 黄先开
曹显兵

编 用正版书 **赠** 增值卡

复习指南

www.kaoyan.tv 考研名师网络课堂

基础加题型

——考研数学成功的保证

紧扣考试大纲，首创“以题型为纲”的思想，科学安排复习章节。考生在短期内，对照本书归纳总结的方法、技巧，研读相关的典型例题便可融会贯通、举一反三，达到事半功倍的效果。

W 世界图书出版公司



有此防伪标志皆为正版



聚 焦 考 研

数 学

MATHS
NETEM

经济类

2005 版

主 编 | 陈文灯 / 黄先开
曹显兵

编 用正版书 **赠** 增值卡

www.kaoyan.tv 考研名师网络课堂

复习指南



世界图书出版公司

北京 · 广州 · 上海 · 西安



图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 经济类 / 陈文灯, 黄先开, 曹显兵编著. —10版. —北京: 世界图书出版公司北京公司, 2002. 3

ISBN 7-5062-5213-9

I. 数... II. ①陈...②黄...③曹... III. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 解题
IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002) 第 014885 号

数学复习指南(经济类) (2005 版)

主 编: 陈文灯 黄先开 曹显兵

责任编辑: 武海燕

封面设计: 京 A 企划

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 电话 62116800 邮编 100010)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 北京时代华都印刷有限公司

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16

印 张: 33

字 数: 792 千字

版 次: 2004 年 2 月第 10 版 2004 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-5213-9/O · 334

定价: 47.80 元

服务热线: 010 - 62198078

律 师 声 明

敬启者：

我们，中华人民共和国执业律师，受当事人北京聚骄文化发展有限公司（以下简称为“我方当事人”）委托，全权处理我方当事人代理出版事务及发行聚焦考研 2005 版《数学复习指南（经济类）》一书工作中的著作权事宜。现依据中华人民共和国法律，专发此声明。

我方当事人是聚焦考研 2005 版《数学复习指南（经济类）》一书的出版事务代理者，该书作者已与我方当事人签署了著作权独家许可使用协议书，保证其对我方当事人是独家授权。依照我国著作权法的有关规定及我方当事人与作者的合同约定，我方当事人享有对该作品的独家使用权。同时作者保证独家授权我方当事人在聚焦考研 2005 版《数学复习指南（经济类）》一书上使用其名字，即其署名权也由乙方当事人独家使用。

在此，我们代表我方当事人及其签约作者郑重声明：任何单位、个人未经我方当事人书面授权，擅自出版、发行我方当事人享有著作权的聚焦考研 2005 版《数学复习指南（经济类）》一书，或者未经我方当事人书面同意，擅自在其出版、发行的图书上使用与我方当事人有协议约定的作者姓名（无论是否经过作者授权），这些行为均违反《中华人民共和国著作权法》及其他相关法律，将严重侵犯我方当事人的合法权益。因此，侵权人应当公开向我方当事人和签约作者道歉，并赔偿由此给我方当事人造成的全部经济损失和商誉损失。

上述侵权行为一经发现，我们将代表我方当事人通过必要的法律途径、立即采取相关法律措施，追究侵权人的法律责任。

特此声明。

北京市浩天律师事务所

肖 群 律师

张景伟 律师

2004 年 1 月 30 日

作 者 声 明

本人在数学研究生入学考试方面的著作权授予北京聚骄文化发展有限公司独家使用，其他出版单位不得以本人的名义署名或抄袭相关著作的内容。

特此声明。



2004 年 1 月 25 日

第十版最新修订说明

◆ 2005 版《数学复习指南》(经济版)主要改动如下:

- ① 根据新的考研数学中数学三和数学四的大纲要求,将数学四不作要求内容用“*”号进行标注,使考生复习时更加有的放矢。
- ② 将文字和内容进行了逐字逐题校对,力争做到无差错率出版。
- ③ 对版式进行了重新调整,层次感更强,更加有利于读者学习。
- ④ 赠送网络版 2004 年数学三、四真题详解,网络名师答疑。具体内容详见封三。

◆ 本书主要特色如下:

- ① 全面覆盖大纲所要求的知识点,对大纲所要求的重要概念、公式、定理进行剖析,增强读者对这些内容的理解和记忆,避免犯概念性错误及错用公式和定理。
- ② 本书根据考研数学的知识体系,科学安排相应章节,使读者复习时循序渐进,理解和吃透大纲,掌握解题方法和技巧,奠定坚实的应试知识基础。同时对“考研”题型,深入分析研究,总结出解题方法和技巧,易为读者掌握和运用。
- ③ 用“举题型讲方法”的格式代替各书普遍采用的“讲方法套题型”的做法,使读者应试时思路畅通,更加得心应手。
- ④ 介绍许多新的快速解题方法、技巧,可节约宝贵的解题时间。同时,设计和改造的众多的新题,使读者在做似曾相识的题型中熟悉考研综合题的编制过程和规律性,减少对试题的神秘感,多几分“攻坚”的信心和勇气。
- ⑤ 广泛采用表格法,使读者对要点一目了然。

◆ 本书长销不衰、大受历年考生追捧,究其原因:

本书执笔者陈文灯教授、黄先开教授、曹显兵教授皆为常年工作在教学一线的考研辅导名师,且理论功底深厚、全面。他们谙熟考生不同层次的复习需求,严格依据《数学考试大纲》的要求,通过对最近几年各知识点已有考题的分析及各类题型的精确统计,准确指点考试夺分所必备的基础知识、应掌握的规律和应谙熟的重要题型的解题技巧,科学预测各类题型的命题趋势,探索考研试题内容和形式的变迁轨迹,对于应对考研试题模式有很大的启示。

毋庸置疑,近几年专升本试题中的难题与本书的较简单例题不谋而合,这就促使专升本考生和辅导老师使用本书。相信会对你的考试有所帮助。

恳请广大读者和使用本书的老们提出批评和指正。

编 者

目 录

篇前篇	微积分解题的四种思维	
	定式	1

第一篇 微积分

第一章	函数·极限·连续	6
-----	----------	---

一、	函数	6
1.	函数的定义	6
2.	函数定义域的求法	7
3.	函数的基本性质	8
4.	分段函数	13
5.	初等函数	13
二、	函数的极限及其连续性	17
1.	概念	17
2.	重要定理与公式	19
三、	极限的求法	27
1.	未定式的定值法	27
2.	类未定式	31
3.	数列的极限	32
4.	极限式中常数的确定(重点)	37
5.	杂例	40

习题一		44
-----	--	----

第二章	导数与微分	47
-----	-------	----

一、	定义·定理·公式	47
1.	导数与微分的定义	47
2.	定理	49
3.	导数与微分的运算法则	49
4.	基本公式	50
二、	各类函数导数的求法	50
1.	复合函数微分法	50
2.	隐函数微分法	52
3.	幂指数函数微分法	52
4.	函数表达式为若干因子连乘积、 乘方、开方或商形式的微分法	53
5.	分段函数微分法	53
三、	高阶导数	55
1.	定义与基本公式	55
2.	高阶导数的求法	56

习题二		58
-----	--	----

第三章	不定积分	61
-----	------	----

一、	不定积分的概念与性质	61
1.	不定积分的概念	61
2.	基本性质	61
二、	基本积分法	63
1.	第一换元积分法(也称凑微分法)	63
2.	第二换元积分法	68
3.	分部积分法	72
三、	各类函数积分的技巧及分析	77
1.	三角有理式的积分	77
2.	含有反三角函数的不定积分	81
3.	抽象函数的不定积分	82
4.	分段函数的不定积分	82

习题三		84
-----	--	----

第四章	定积分及广义积分	87
-----	----------	----

一、	定积分性质及有关定理与公式	87
1.	基本性质	87
2.	定理与公式	90
二、	定积分的计算法	93
1.	牛顿—莱布尼兹公式	93
2.	定积分的换元积分法	94
3.	定积分的分部积分法	96
三、	特殊形式的定积分计算	97
1.	分段函数的积分	97
2.	被积函数带有绝对值符号的积分	99
3.	被积函数中含有“变上限积分” 的积分	100
4.	对称区间上的积分	102
5.	被积函数的分母为两项,而分子 为其中一项的积分	103
6.	由三角有理式与其他初等函数通 过四则或复合而成的函数的积分	104
7.	杂例	105
四、	定积分有关命题证明的技巧	107
1.	定积分等式的证明	107
2.	定积分不等式的证明	115

习题四(1)		119
--------	--	-----

五、	广义积分	122
----	------	-----

1. 基本概念及判别法则	122
2. 广义积分的计算及判别	123
习题四(2)	126

第五章 中值定理的证明技巧

一、连续函数在闭区间上的性质	127
1. 基本定理	127
2. 有关闭区间上连续函数命题的证法	127
习题五(1)	129
二、微分中值定理	130
基本定理	130
三、证题技巧分析	131
1. 欲证结论:至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 的命题证法	131
2. 欲证结论:至少 $\exists$ 一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f^{(n)}(\xi) = k (\neq 0)$ 及其代数式的证法	133
3. 欲证结论:在 (a, b) 内至少 $\exists \xi, \eta$, $\xi \neq \eta$ 满足某种关系式的命题的证法	137
习题五(2)	139

第六章 一元微积分的应用

一、导数的应用	140
1. 利用导数判别函数的单调增减性	140
2. 利用导数研究函数的极值与最值	141
3. 关于方程根的研究	147
4. 函数作图	152
二、定积分的应用	155
1. 微元法及其应用	155
2. 平面图形的面积	157
3. 立体体积	159
习题六	160

第七章 多元函数微分学

一、概念、定理与公式	163
1. 二元函数的定义	163
2. 二元函数的极限及连续性	164
3. 偏导数、全导数及全微分	165
4. 基本定理	167
二、多元函数微分法	169
1. 简单显函数 $u = f(x, y, z)$ 的微分法	169
2. 复合函数微分法	170
3. 隐函数微分法	174

三、多元函数的极值	176
1. 概念、定理与公式	176
2. 条件极值与无条件极值	177
习题七	180

第八章 二重积分

一、概念·性质	182
1. 概念	182
2. 性质	182
二、二重积分的解题技巧	184
1. $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的解题程序	184
2. 直角坐标系中积分限的确定	185
3. 极坐标系中积分限的确定	185
4. 典型例题分析	186
习题八	198

第九章* 无穷级数

一、基本概念及其性质	200
1. 概念	200
2. 基本性质	200
二、数项级数判别法	201
1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, (u_n \geq 0)$ 敛散性的判别法	201
2. 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n (u_n > 0)$ 的判别法	205
3. 任意项级数	206
三、幂级数	208
1. 函数项级数的概念	208
2. 幂级数	210
四、无穷级数求和	216
1. 幂级数函数求和	216
2. 数项级数求和	219
习题九	223

第十章 常微分方程及差分方程简介

一、概念	225
二、一阶微分方程	225
1. 变量可分离的微分方程	225
2. 齐次方程	227
3. 一阶线性微分方程	228
三*、二阶线性微分方程	230
1. 二阶线性微分方程解的结构定理	230

2. 二阶常系数线性齐次方程通解的求法	231
3. 二阶常系数线性非齐次方程特解的求法	232
4. 二阶常系数线性非齐次方程通解的求法	236
四*、差分方程	238
1. 基本概念	238
2. 一阶常系数线性差分方程的求解方法	238
习题十	241

第十一章 函数方程与不等式证明

一、函数方程	243
1. 利用函数表示法与用何字母表示无关的“特性”求解方程	243
2. 利用极限求解函数方程	243
3. 利用导数的定义求解方程	244
4. 利用变上限积分的可导性求解方程	245
5. 利用连续函数的可积性及原函数的连续性求解	246
*6. 利用解微分方程的方法求解 $f(x)$	246
二、不等式的证明	247
1. 利用微分中值定理(重点)	247
2. 利用函数的单调增减性(重点)	249
3. 利用函数的极值与最值	251
4. 利用函数图形的凹凸性	252
5. 杂例	252
习题十一	254

第十二章 微积分在经济中的应用

一、一元微积分在经济中的应用	256
1. 概念与公式	256
2. 典型例题的解题思路分析	257
二、二元微分学在经济中的应用	263
习题十二	264

第二篇 线性代数

第一章 行列式

一、行列式的概念	265
1. 排列与逆序	265
2. n 阶行列式的定义	266
二、性质、定理与公式	267

1. 行列式的基本性质	267
2. 行列式按行(列)展开定理	270
3. 重要公式与结论	271
三、典型题型分析	271
题型 I 抽象行列式的计算	271
题型 II 低阶行列式的计算	272
题型 III n 阶行列式的计算	274
四、杂例	279
习题一	281

第二章 矩阵

一、矩阵的概念与运算	284
1. 矩阵的概念	284
2. 矩阵的运算	284
二、逆矩阵	287
1. 逆矩阵的概念	287
2. 利用伴随矩阵求逆矩阵	287
3. 矩阵的初等变换与求逆	288
4. 分块矩阵及其求逆	289
5. 矩阵的秩及其求法	290
三、典型题型分析	290
题型 I 求逆矩阵	290
题型 II 求矩阵的高次幂 A^m	292
题型 III 有关初等矩阵的命题	294
题型 IV 解矩阵方程	295
题型 V 求矩阵的秩	297
题型 VI 关于矩阵对称、反对称命题的证明	298
题型 VII 关于方阵 A 可逆的证明	299
题型 VIII 与 A 的伴随阵 A^* 有关联的命题的证明	300
题型 IX 关于矩阵秩的命题的证明	301
习题二	303

第三章 向量

一、基本概念	308
1. 向量的概念与运算	308
2. 向量间的线性关系	308
3. 向量组的秩和矩阵的秩	309
4. 内积与施密特(Schmidt)正交化方法	310
二、重要定理与公式	311
三、典型题型分析	312
题型 I 讨论向量组的线性相关性	312
题型 II 有关向量组线性相关性命题的证明	315

题型 III	判定一个向量是否可由一组 向量线性表示	321
题型 IV	有关向量组线性表示命题的 证明	322
题型 V	求向量组的极大线性无关组	324
题型 VI	有关向量组或矩阵秩的计算 与证明	327
习题三		330

第四章 线性方程组

一、概念、性质、定理	334
1. 克莱姆法则	334
2. 线性方程组的基本概念	334
3. 线性方程组解的判定	335
4. 非齐次组 $Ax = b$ 与齐次组 $Ax = 0$ 解的关系	335
5. 线性方程组解的性质	336
6. 线性方程组解的结构	336
二、典型题型分析	337

题型 I	基本概念题(解的判定、性 质、结构)	337
题型 II	含有参数的线性方程组解 的讨论	340
题型 III	讨论两个方程组的公共解	345
题型 IV	有关基础解系的证明	347
题型 V	综合题	348
习题四		353

第五章 特征值和特征向量

一、概念及其性质	357
1. 矩阵的特征值和特征向量的概念	357
2. 特征值与特征向量的计算方法	357
3. 相似矩阵及其性质	358
4. 矩阵可相似对角化的充要条件	358
5. 对称矩阵及其性质	358
二、重要公式与结论	359
三、典型题型分析	360

题型 I	求数值矩阵的特征值与特征 向量	360
题型 II	求抽象矩阵的特征值与特征 向量	361
题型 III	特征值、特征向量的逆问题	362
题型 IV	相似的判定及其逆问题	364
题型 V	判断 A 是否可对角化	366
题型 VI	综合应用问题	369

题型 VII	有关特征值、特征向量的证 明题	374
--------	--------------------------	-----

习题五		376
-----	-------	-----

第六章* 二次型

一、基本概念与定理	379
1. 二次型及其矩阵表示	379
2. 化二次型为标准形	379
3. 用正交变换法化二次型为标准形	380
4. 二次型和矩阵的正定性及其判别法	380
二、典型题型分析	383

题型 I	考查二次型所对应的矩阵及 其性质	383
题型 II	化二次型为标准形	384
题型 III	已知二次型通过正交变换化 为标准形,反求参数	387
题型 IV	有关二次型及其矩阵正定性 的判定与证明	388

习题六		392
-----	-------	-----

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率

一、基本概念、性质与公式	394
1. 随机试验和随机事件	394
2. 事件的关系及其运算	394
3. 事件的概率及其性质	397
4. 条件概率与事件的独立性	397
5. 重要概型	399
6. 重要公式	399

二、典型题型分析

题型 I	古典概型与几何概型	400
题型 II	事件的关系和概率性质的命题	404
题型 III	条件概率与积事件概率的计算	406
题型 IV	全概率公式与 Bayes 公式的 命题	407
题型 V	有关 Bernoulli 概型的命题	410

习题一		412
-----	-------	-----

第二章 随机变量及其分布

一、基本概念、性质与公式	415
1. 概念与公式一览表	415
2. 重要的一维分布	418
3. 重要的二维分布	420

二、典型题型分析	420
题型 I 一维随机变量及其分布的概念、性质的命题	420
题型 II 求一维随机变量的分布律、概率密度或分布函数	424
题型 III 求一维随机变量函数的分布	428
题型 IV 二维随机变量及其分布的概念、性质的考查	431
题型 V 求二维随机变量的各种分布与随机变量独立性的讨论	433
题型 VI 求两个或多个随机变量的简单函数的分布	441
习题二	445

第三章 随机变量的数字特征

一、基本概念、性质与公式	452
1. 一维随机变量的数字特征	452
2. 二维随机变量的数字特征	453
3. 几种重要的数学期望与方差	455
4. 重要公式与结论	455
二、典型题型分析	456
题型 I 求一维随机变量的数字特征	456
题型 II 求一维随机变量函数的数学期望	460
题型 III 求二维随机变量及其函数的数字特征	462
题型 IV 有关数字特征的证明题	473
题型 V 应用题	474
习题三	477

第四章 大数定律和中心极限定理

一、基本概念与定理	481
1. 切比雪夫不等式	481
2. 中心极限定理	481
3. 重要公式与结论	482
4. 注意	482
二、典型题型分析	483
题型 I 有关切比雪夫不等式与大数定律的命题	483
题型 II 有关中心极限定理的命题	484

习题四	487
-----------	-----

第五章* 数理统计的基本概念

一、基本概念、性质与公式	489
1. 几个基本概念	489
2. 三个抽样分布—— χ^2 分布、 t 分布与 F 分布	490
3. 正态总体下常用统计量的性质	490
4. 重要公式与结论	491
二、典型题型分析	492
题型 I 求统计量的数字特征或取值的概率、样本的容量	492
题型 II 求统计量的分布	493
习题五	495

第六章* 参数估计

一、基本概念、性质与公式	497
1. 矩估计与极大似然估计	497
2. 估计量的评选标准	498
3. 区间估计	499
4. 重要公式与结论	500
二、典型题型分析	501
题型 I 求矩估计和极大似然估计	501
题型 II 评价估计的优劣	505
题型 III 区间估计或置信区间的命题	506
习题六	508

第七章* 假设检验

一、基本概念与公式	511
1. 显著性检验的基本思想	511
2. 假设检验的基本步骤	511
3. 两类错误	511
4. 正态总体未知参数的假设检验	512
5. 假设检验与区间估计的联系	512
二、典型题型分析	513
题型 I 正态总体的均值和方差的假设检验	513
题型 II 有关两类错误的命题	514
习题七	515

注:带* 篇、章,数二考生不作要求。

篇前篇 微积分解题的四种思维定式

以下四句话,在考研中能助同学们一臂之力.

第一句话:在题设条件中给出一个函数 $f(x)$ 在某点处的导数值即 $f'(a) = k(a, k$ 均为常数),“不管三七二十一”,根据所求(证)结论把 $f(x)$ 在该点的导数定义式“凑”出来再说.

【例1】设 $f(x)$ 可微, $f(0) = 0, f'(0) = 1, F(x) = \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt$,试求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4}$.

【解】对定积分作变量代换 $x^2 - t^2 = u$,则

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du, \quad \text{且} \quad F'(x) = x f(x^2).$$

于是由洛必达法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{4x^3} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} \quad (\text{以下利用导数 } f'(0) \text{ 的定义}) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2 - 0} = \frac{1}{4} f'(0) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

【例2】设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 定义,且对定义域中任何 x, y 均满足方程 $f(xy) = f(x)f(y)$,且 $f'(1) = n(n > 0)$,求 $f(x)$.

【解】在方程中令 $x = y = 1$ 得, $f(1) = f(1) \cdot f(1)$,由此得 $f(1) = 0$ 或 $f(1) = 1$.

(1) 若 $f(1) = 0$,令 $y = 1$,由函数方程得 $f(x) = f(x) \cdot 0 = 0$,即 $f(x) \equiv 0$,但由 $f'(1) = n$ 知不合题意.

(2) 若 $f(1) = 1$,令 $y = 1 + h$,由函数方程得 $f(x + hx) = f(x) \cdot f(1 + h)$,则(设 $h \neq 0$)

$$\frac{f(x + hx) - f(x)}{hx} = \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}.$$

令 $h \rightarrow 0$,对上式两边取极限,并由 $f'(1) = n$,得 $f'(x) = n \frac{f(x)}{x}$.

这是可分离变量的微分方程,解得 $f(x) = Cx^n$.由条件 $f'(1) = n$,得 $C = 1$,即 $f(x) = x^n, x > 0$.

第二句话:在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时,则“不管三七二十一”先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例3】设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续,在 $(0, 2)$ 内二阶可导,且 $f(0) = f(\frac{1}{2})$, $2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$. 证

明:存在一个 $\xi \in (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【证】 $f(2) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \xrightarrow{\text{积分中值定理}} 2(1 - \frac{1}{2})f(\eta) = f(\eta), \frac{1}{2} \leq \eta \leq 1$.

于是 $f(x)$ 在 $[\eta, 2]$ 上满足罗尔定理, 即存在一个 $\xi_1 \in (\eta, 2)$, 使

$$f'(\xi_1) = 0. \quad ①$$

又 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上满足罗尔定理, 于是存在一个 $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$, 使

$$f'(\xi_2) = 0. \quad ②$$

由 ①, ② 可知 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. 再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2, \xi_1]$ 上使用罗尔定理,

于是 $\exists \xi \in (\xi_2, \xi_1) \subset (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【例 4】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是非负、单调递减的连续函数, 且 $0 < a < b < 1$. 证明:

$$\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【证】由积分中值定理

$$\int_0^a f(x) dx = af(\xi_1) \geq af(a), \quad \xi_1 \in [0, a],$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi_2) \leq (b-a)f(a), \quad \xi_2 \in [a, b].$$

$$\text{于是 } \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \geq f(a) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq \frac{1}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{故 } \int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【另证】 $\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow b \int_0^a f(x) dx \geq a \int_a^b f(x) dx.$

$$\text{令 } F(x) = b \int_0^x f(t) dt - x \int_x^b f(t) dt,$$

$$\text{则 } F'(x) = bf(x) - \int_x^b f(t) dt + xf(x) = \int_x^b f(x) dt - \int_x^b f(t) dt + 2xf(x)$$

$$= \int_x^b [f(x) - f(t)] dt + 2xf(x) \geq 0, \quad (\text{由于 } f(x) \geq f(t) \geq 0).$$

所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0) = 0$,

故 $F(a) > F(0) = 0$, 即 $b \int_0^a f(x) dx - a \int_a^b f(x) dx > 0$,

$$\text{亦即 } \int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

第三句话: 在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 或 $f(a) = f(b) = 0$, 则“不管三七二十一”先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x) \xrightarrow{f(a)=0} f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a), \quad a < \xi < x.$$

或 $f(x) \xrightarrow{f(b)=0} f(x) - f(b) = f'(\xi)(x-b), x < \xi < b.$

若 $f(a) = f(b) = 0$, 则 $\begin{cases} f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a), & a < \xi_1 < x, \\ f(x) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b), & x < \xi_2 < b. \end{cases}$

【例5】设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, 试证:

$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【证】 $f(x) \xrightarrow{f(a)=0} f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi_1), a < \xi_1 < x,$

则 $|f(x)| = (x-a)|f'(\xi_1)| \leq (x-a)M.$

同理 $|f(x)| \leq (b-x)M.$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \\ &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)M dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)M dx = \frac{(b-a)^2}{4}M. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{(b-a)^2}{4}M.$$

$$\text{即 } \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【例6】已知在 $[0, a]$ 上 $|f''(x)| \leq M$, 且 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取最大值, 试证:

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma.$$

【证】设 $f(c) = \max_{x \in (0, a)} \{f(x)\}$, 则 $f'(c) = 0$. (费尔马定理)

对 $f'(x)$ 在 $[0, c]$ 与 $[c, a]$ 内分别用拉格朗日中值定理, 有

$$f'(c) - f'(0) = f''(\xi_1)c, \quad 0 < \xi_1 < c,$$

$$f'(a) - f'(c) = f''(\xi_2)(a-c), \quad c < \xi_2 < a.$$

$$\text{于是 } |f'(0)| = |f''(\xi_1)c| \leq Mc,$$

$$|f'(a)| = |f''(\xi_2)(a-c)| \leq M(a-c).$$

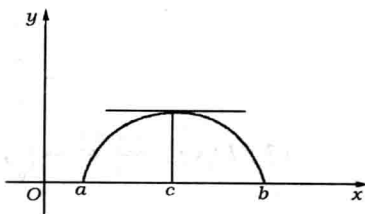
$$\text{故 } |f'(0)| + |f'(a)| \leq Mc + M(a-c) = Ma.$$

【例7】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的 $f''(x)$, 且 $f''(x) < 0, f(a) = f(b) = 0$, 则在 (a, b) 上 $f(x) > 0$, 且

$$\int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > \frac{4}{b-a}.$$

【证】由 $f''(x) < 0$ 可知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹函数(图形上凸); 由凹函数性质知, $f(x)$ 大于连接 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 线段上点的纵坐标. 而此线段所在直线即为 $y = 0$ (x 轴), 所以在 (a, b) 上 $f(x) > 0$. 再由 $f''(x) < 0$ 知, $f'(x)$ 是严格单调减少的, 从而知 $f(x)$ 在 (a, b) 内有唯一的极大值点, 记为 $x = c$. 此时 $f'(c) = 0$, 如右图所示, 而在 (a, c) 上 $f'(x) > 0$, 在 (c, b) 上 $f'(x) < 0$. 由拉格朗日中值定理,

当 $x \in [a, c]$ 时, $f(x) = f'(\xi_1)(x-a) + f(a), \quad \xi_1 \in (a, x).$



由 $f'(x)$ 严格递减, $f'(\xi_1) < f'_+(a)$, 注意到 $f(a) = 0$, 有 $f(x) < f'_+(a)(c-a)$, $x \in [a, c]$.

当 $x \in [c, b]$ 时, 同理可得

$$f(x) < [-f'_-(b)](b-c), x \in [c, b].$$

$$\text{于是 } \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(c-a)f'_+(a)}, x \in [a, c],$$

$$\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(b-c)[-f'_-(b)]}, x \in [c, b].$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx &= - \int_a^b \frac{f''(x)}{f(x)} dx = \int_a^c \frac{-f''(x)}{f(x)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{f(x)} dx \\ &> \int_a^c \frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{(b-c)[-f'_-(b)]} dx \\ &= \frac{1}{(c-a)f'_+(a)} [f'_+(a) - f'(c)] + \frac{1}{(b-c)[-f'_-(b)]} [f'(c) - f'_-(b)] \\ &= \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-a}{(c-a)(b-c)} > (b-a) \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{4}{b-a}. \end{aligned}$$

第四句话: 对定限或变限积分, 若被积函数或其大部分为复合函数, 则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例8】求下列函数的导数 (设 $f(u)$ 是 u 的连续函数):

$$(1) F(y) = \int_0^y f(x-y) dx, \text{ 求 } F'(y); \quad (2) F(x) = \int_0^{x^2} t f(x-t) dt, \text{ 求 } F'(x);$$

$$(3) F(x) = \int_0^1 f(te^x) dt, \text{ 求 } F'(x); \quad (4) F(x) = \int_0^{x^2} x f(x+t) dt, \text{ 求 } F'(x).$$

【解】(1) $F(y) \xrightarrow{\text{令 } u = x-y} \int_{-y}^0 f(u) du$, 则 $F'(y) = -f(-y) \cdot (-1) = f(-y)$.

$$\begin{aligned} (2) F(x) &\xrightarrow{\text{令 } u = x-t} \int_x^{x-x^2} (x-u)f(u)(-du) \\ &= -x \int_x^{x-x^2} f(u) du + \int_x^{x-x^2} u f(u) du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } F'(x) &= - \int_x^{x-x^2} f(u) du - x[f(x-x^2) \cdot (1-2x) - f(x)] \\ &\quad + (1-2x)(x-x^2)f(x-x^2) - x f(x) \\ &= \int_{x-x^2}^x f(u) du + x^2(2x-1)f(x-x^2). \end{aligned}$$

$$(3) F(x) \xrightarrow{\text{令 } u = te^x} \int_0^{e^x} f(u) \frac{1}{e^x} du = \frac{1}{e^x} \int_0^{e^x} f(u) du = e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du,$$

$$\text{则 } F'(x) = -e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du + e^{-x} f(e^x) \cdot e^x = f(e^x) - e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du.$$

$$(4) \int_0^{x^2} f(x+t) dt \xrightarrow{\text{令 } u = x+t} \int_x^{x+x^2} f(u) du, \text{ 于是有 } F(x) = x \int_x^{x+x^2} f(u) du,$$

则 $F'(x) = \int_{-x}^{x+x^2} f(u) du + x[f(x+x^2) \cdot (1+2x) - f(x)].$

【例9】* 设 $f(x)$ 可微, 且满足 $x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x tf(t-x) dt$, 求 $f(x)$.

【解】 $\int_0^x tf(t-x) dt \xrightarrow{\text{令 } u=t-x} \int_{-x}^0 (u+x)f(u) du = -\int_0^{-x} uf(u) du + x \int_{-x}^0 f(u) du.$

于是原方程变为 $x = \int_0^x f(t) dt - \int_0^{-x} uf(u) du - x \int_0^{-x} f(u) du.$

两边对 x 求导, 得 $1 = f(x) - (-x)f(-x)(-1) - \int_0^{-x} f(u) du - xf(-x)(-1).$

整理, 得 $1 = f(x) - \int_0^{-x} f(u) du,$

两边再对 x 求导, 得 $0 = f'(x) - f(-x)(-1),$

即 $f'(x) = -f(-x),$ ①

上式两边对 x 求导, 得 $f''(x) = f'(-x),$ ②

由 ①, ② 得 $f''(x) = -f(x),$

即 $f''(x) + f(x) = 0,$

解此方程得 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

注意到 $f(0) = 1, f'(0) = -1$, 故 $f(x) = \cos x - \sin x.$

第一篇 微积分

第一章 函数 · 极限 · 连续

一、函数

1. 函数的定义

设有两个变量 x 和 y , 变量 x 的变域为 D , 如果对于 D 中的每一个 x 值, 按照一定的法则, 变量 y 有一个确定的值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记作

$$y = f(x).$$

x 为自变量, y 为因变量, 变域 D 为定义域, 记为 D_f , 变量 y 的取值的集合称为函数的值域, 记作 Z_f .

函数概念的两要素:

- ① 定义域 $\triangleq$ 自变量 x 的变化范围 (若函数是解析式子表示的, 则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域).
- ② 对应关系 $\triangleq$ 给定 x 值, 求 y 值的方法.

解题提示

当且仅当给定的两个函数, 其定义域和对应关系完全相同时, 才表示同一函数, 否则表示不同的函数.

【例 1.1】* 与连续函数 $f(x) = \ln x + \int_1^x f(x) dx - f'(1)$ 等价的函数是

- (A) $e^{\ln(\ln x)}$.
- (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x-1}{n+(x-1)k} (x > 0)$.
- (C) $\frac{1}{x}$ 的经过点 $(-1, 0)$ 的原函数.
- (D) 方程 $xyy' = \ln x$ 满足 $y(1) = 0$ 的特解.

【解】 设 $A = \int_1^x f(x) dx, B = f'(1)$, 所以, $f(x) = \ln x + A - B$, 有

$$A = \int_1^x f(x) dx = \int_1^x (\ln x + A - B) dx = 1 + (A - B)(e - 1),$$

$$B = f'(1) = (\ln x + A - B)'|_{x=1} = 1, \text{ 得 } A = 1, \text{ 所以, } f(x) = \ln x.$$

(A) $e^{\ln(\ln x)} = \ln x (x > 1)$, 与 $f(x)$ 的定义域不同.

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x-1}{n+(x-1)k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x-1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{n}k} = \int_1^x \frac{1}{t} dt \\ &= \ln x (x > 0), \quad \text{与 } f(x) \text{ 等价.} \end{aligned}$$

(C) $\frac{1}{x}$ 的经过点 $(-1, 0)$ 的原函数为 $\ln(-x)$.

(D) $xyy' = \ln x$ 的通解为 $y^2 = \ln^2 x + C$, 满足 $y(1) = 0$ 的特解为 $y^2 = \ln^2 x, y = \pm \ln x$.
所以, 应选(B).

解题提示 函数的表示法只与定义域和对应关系有关, 而与用什么字母表示无关, 即

$$f(x) = f(t) = f(u) = \dots$$

简称函数表示法的“无关特性”, 这是由 $f[g(x)]$ 的表达式求解 $f(x)$ 表达式的有效方法.

【例 1.2】 设 $f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = 2x$, 其中 $x \neq 0, x \neq 1$, 求 $f(x)$.

【解】 利用函数表示法的无关特性, 令 $t = \frac{x-1}{x}$,

$$\text{即 } x = \frac{1}{1-t}, \text{ 代入原方程得 } f(\frac{1}{1-t}) + f(t) = \frac{2}{1-t},$$

$$\text{即 } f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = \frac{2}{1-x}.$$

$$\text{再令 } \frac{1}{1-x} = \frac{u-1}{u}, \text{ 即 } x = \frac{1}{1-u}, \text{ 代入上式, 得 } f(\frac{1}{1-u}) + f(\frac{u-1}{u}) = \frac{2(u-1)}{u},$$

$$\text{即 } f(\frac{1}{1-x}) + f(\frac{x-1}{x}) = \frac{2(x-1)}{x},$$

$$\text{解联立方程组, 得 } f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - 1.$$

2. 函数定义域的求法

记住下列简单函数的定义域:

$$y = \frac{1}{x}, \quad D_f: x \neq 0, \quad (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$y = \sqrt[n]{x}, \quad D_f: x \geq 0, \quad [0, +\infty)$$

$$y = \log_a x, \quad D_f: x > 0, \quad (0, +\infty)$$

$$y = \tan x, \quad D_f: x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \cot x, \quad D_f: x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \arcsin x (\text{或 } \arccos x), \quad D_f: |x| \leq 1, \quad [-1, 1]$$

解题提示 求复杂函数的定义域, 就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组之解集.

【例 1.3】 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \log_{(x-1)}(16-x^2); \quad (2) f(x) = \int_{x^2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt;$$

$$(3) y = \arcsin \frac{2x-1}{7} + \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}.$$