聚焦考研

数学复习指南

NETEM MATHS

www.kaoyan.tv 考研名师网络课堂

经济类

2005版

主编 陈文灯/黄先开
曹显兵

用正版书 赠 增值卡

基础加题型

——考研数学成功的保证

紧扣考试大纲，首创“以题型为纲”的思想，科学安排复习章节。考生在短期内，对照本书归纳总结的方法、技巧，研读相关的典型例题便可融会贯通、举一反三，达到事半功倍的效果。

世界图书出版公司

FOCUS 聚焦图书

聚焦考研

数学复习指南

NETEM MATHS

www.kaoyan.tv 考研名师网络课堂

经济类

2005版

主编 陈文灯/黄先开
曹显兵

用正版书 赠 增值卡

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

FOCUS 聚焦图书

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 经济类 / 陈文灯,黄先开,曹显兵编著. —10 版. — 北京:世界图书出版公司北京公司,2002. 3
ISBN 7-5062-5213-9

I. 数... II. ① 陈... ② 黄... ③ 曹... III. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 解题
IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014885 号

数学复习指南(经济类)
(2005 版)

主　　编: 陈文灯　黄先开　曹显兵
责任编辑: 武海燕
封面设计: 京 A 企划

出　　版: 世界图书出版公司北京公司
发　　行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　电话 62116800　邮编 100010)
销　　售: 各地新华书店
印　　刷: 北京时代华都印刷有限公司

开　　本: 787 × 1092 毫米　1/16
印　　张: 33
字　　数: 792 千字
版　　次: 2004 年 2 月第 10 版　2004 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-5213-9/O · 334　　**定价:47.80 元**

服务热线: 010 - 62198078

律 师 声 明

敬启者：

我们，中华人民共和国执业律师，受当事人北京聚骄文化发展有限公司（以下简称为“我方当事人”）委托，全权处理我方当事人代理出版事务及发行聚焦考研 2005 版《数学复习指南（经济类）》一书工作中的著作权事宜。现依据中华人民共和国法律，专发此声明。

我方当事人是聚焦考研 2005 版《数学复习指南（经济类）》一书的出版事务代理者，该书作者已与我方当事人签署了著作权独家许可使用协议书，保证其对我方当事人是独家授权。依照我国著作权法的有关规定及我方当事人与作者的合同约定，我方当事人享有对该作品的独家使用权。同时作者保证独家授权我方当事人在聚焦考研 2005 版《数学复习指南（经济类）》一书上使用其名字，即其署名权也由我方当事人独家使用。

在此，我们代表我方当事人及其签约作者郑重声明：任何单位、个人未经我方当事人书面授权，擅自出版、发行我方当事人享有著作权的聚焦考研 2005 版《数学复习指南（经济类）》一书，或者未经我方当事人书面同意，擅自在其出版、发行的图书上使用与我方当事人有协议约定的作者姓名（无论是否经过作者授权），这些行为均违反《中华人民共和国著作权法》及其他相关法律，将严重侵犯我方当事人的合法权益。因此，侵权人应当公开向我方当事人和签约作者道歉，并赔偿由此给我方当事人造成的全部经济损失和商誉损失。

上述侵权行为一经发现，我们将代表我方当事人通过必要的法律途径、立即采取相关法律措施，追究侵权人的法律责任。

特此声明。

北京市浩天律师事务所

肖　群　律师

张景伟　律师

2004 年 1 月 30 日

作者声明

本人在数学研究生入学考试方面的著作权授予北京聚骄文化发展有限公司独家使用，其他出版单位不得以本人的名义署名或抄袭相关著作的内容。

特此声明。

陈文灯

2004 年 1 月 25 日

第十版最新修订说明

◆ **2005版《数学复习指南》(经济版)主要改动如下:**

① 根据新的考研数学中数学三和数学四的大纲要求,将数学四不作要求内容用“*”号进行标注,使考生复习时更加有的放矢。

② 将文字和内容进行了逐字逐题校对,力争做到无差错率出版。

③ 对版式进行了重新调整,层次感更强,更加有利于读者学习。

④ 赠送网络版2004年数学三、四真题详解,网络名师答疑。具体内容详见封三。

◆ **本书主要特色如下:**

① 全面覆盖大纲所要求的知识点,对大纲所要求的重要概念、公式、定理进行剖析,增强读者对这些内容的理解和记忆,避免犯概念性错误及错用公式和定理。

② 本书根据考研数学的知识体系,科学安排相应章节,使读者复习时循序渐进,理解和吃透大纲,掌握解题方法和技巧,奠定坚实的应试知识基础。同时对“考研”题型,深入分析研究,总结出解题方法和技巧,易为读者掌握和运用。

③ 用“举题型讲方法”的格式代替各书普遍采用的“讲方法套题型”的做法,使读者应试时思路畅通,更加得心应手。

④ 介绍许多新的快速解题方法、技巧,可节约宝贵的解题时间。同时,设计和改造的众多的新题,使读者在做似曾相识的题型中熟悉考研综合题的编制过程和规律性,减少对试题的神秘感,多几分“攻坚”的信心和勇气。

⑤ 广泛采用表格法,使读者对要点一目了然。

◆ **本书长销不衰、大受历年考生追捧,究其原因:**

本书执笔作者陈文灯教授、黄先开教授、曹显兵教授皆为常年工作在教学一线的考研辅导名师,且理论功底深厚、全面。他们谙熟考生不同层次的复习需求,严格依据《数学考试大纲》的要求,通过对最近几年各知识点已有考题的分析及各类题型的精确统计,准确指点考试夺分所必备的基础知识、应掌握的规律和应谙熟的重要题型的解题技巧,科学预测各类题型的命题趋势,探索考研试题内容和形式的变迁轨迹,对于应对考研试题模式有很大的启示。

毋庸置疑,近几年专升本试题中的难题与本书的较简单例题不谋而合,这就促使专升本考生和辅导老师使用本书。相信会对你的考试有所帮助。

恳请广大读者和使用本书的老师们提出批评和指正。

编　者

目　　录

注:带 * 篇、章,数二考生不作要求。

篇前篇　微积分解题的四种思维定式

以下四句话,在考研中能助同学们一臂之力.

第一句话:在题设条件中给出一个函数$f(x)$在某点处的导数值即$f'(a)=k$(a,k均为常数),“不管三七二十一”,根据所求(证)结论把$f(x)$在该点的导数定义式“凑”出来再说.

【例1】设$f(x)$可微,$f(0)=0$,$f'(0)=1$,$F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t$,试求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^4}$.

【解】 对定积分作变量代换$x^2-t^2=u$,则

$$F(x)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u,\quad 且\quad F'(x)=xf(x^2).$$

于是由洛必达法则得

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{4x^3}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{f(x^2)}{x^2}\text{(以下利用导数}f'(0)\text{的定义)}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}=\frac{1}{4}f'(0)=\frac{1}{4}.$$

【例2】设$f(x)$在$(0,+\infty)$定义,且对定义域中任何x,y均满足方程$f(xy)=f(x)f(y)$,且$f'(1)=n(n>0)$,求$f(x)$.

【解】 在方程中令$x=y=1$得,$f(1)=f(1)\cdot f(1)$,由此得$f(1)=0$或$f(1)=1$.

(1) 若$f(1)=0$,令$y=1$,由函数方程得$f(x)=f(x)\cdot0=0$,即$f(x)\equiv0$,但由$f'(1)=n$知不合题意.

(2) 若$f(1)=1$,令$y=1+h$,由函数方程得$f(x+hx)=f(x)\cdot f(1+h)$,则(设$h\neq0$)

$$\frac{f(x+hx)-f(x)}{hx}=\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{f(1+h)-f(1)}{h}.$$

令$h\to0$,对上式两边取极限,并由$f'(1)=n$,得　$f'(x)=n\dfrac{f(x)}{x}$.

这是可分离变量的微分方程,解得$f(x)=Cx^n$.由条件$f'(1)=n$,得$C=1$,即$f(x)=x^n$,$x>0$.

第二句话:在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时,则“不管三七二十一”先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例3】设$f(x)$在$[0,2]$上连续,在$(0,2)$内二阶可导,且$f(0)=f(\frac{1}{2})$,$2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(2)$.证

明:存在一个 $\xi \in (0,2)$,使 $f''(\xi)=0$.

【证】$f(2)=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{积分中值定理}} 2(1-\frac{1}{2})f(\eta)=f(\eta)$,$\frac{1}{2}\leqslant\eta\leqslant 1$.

于是 $f(x)$ 在$[\eta,2]$上满足罗尔定理,即存在一个 $\xi_1\in(\eta,2)$,使

$$f'(\xi_1)=0. \quad ①$$

又 $f(x)$ 在$[0,\frac{1}{2}]$上满足罗尔定理,于是存在一个 $\xi_2\in(0,\frac{1}{2})$,使

$$f'(\xi_2)=0. \quad ②$$

由①,②可知 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$. 再对 $f'(x)$ 在$[\xi_2,\xi_1]$上使用罗尔定理,

于是 $\exists\xi\in(\xi_2,\xi_1)\subset(0,2)$,使 $f''(\xi)=0$.

【例 4】设 $f(x)$ 在$[0,1]$上是非负、单调递减的连续函数,且 $0<a<b<1$. 证明:

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【证】由积分中值定理

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = af(\xi_1)\geqslant af(a),\quad \xi_1\in[0,a],$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi_2)\leqslant(b-a)f(a),\quad \xi_2\in[a,b].$$

于是 $\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

故 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

【另证】$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

令 $F(x)=b\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_x^b f(t)\mathrm{d}t,$

则 $F'(x)=bf(x)-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+xf(x)=\int_x^b f(x)\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+2xf(x)$

$$=\int_x^b[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t+2xf(x)\geqslant 0,(\text{由于} f(x)\geqslant f(t)\geqslant 0).$$

所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0)=0$,

故 $F(a)>F(0)=0$,即 $b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$,

亦即 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

第三句话:在题设条件中函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f(a)=0$ 或 $f(b)=0$ 或 $f(a)=f(b)=0$,则"不管三七二十一"先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x)\xlongequal{f(a)=0}f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),\quad a<\xi<x.$$

或 $f(x) \xlongequal{f(b)=0} f(x)-f(b)=f'(\xi)(x-b),\quad x<\xi<b.$

若 $f(a)=f(b)=0$, 则 $\begin{cases} f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a), & a<\xi_1<x, \\ f(x)=f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b), & x<\xi_2<b. \end{cases}$

【例5】设函数$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导数,且$f(a)=f(b)=0,M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$,试证:

$$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M.$$

【证】$f(x) \xlongequal{f(a)=0} f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi_1),a<\xi_1<x,$

则 $|f(x)|=(x-a)|f'(\xi_1)|\leqslant(x-a)M.$

同理 $|f(x)|\leqslant(b-x)M.$

于是
$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)M\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)M\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{4}M.$$

故 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}M.$

即 $\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$

【例6】已知在$[0,a]$上$|f''(x)|\leqslant M$,且$f(x)$在$(0,a)$内取最大值,试证:

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma.$$

【证】设$f(c)=\max\limits_{x\in(0,a)}\{f(x)\}$,则$f'(c)=0$.(费尔马定理)

对$f'(x)$在$[0,c]$与$[c,a]$内分别用拉格朗日中值定理,有

$f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)c,\quad 0<\xi_1<c,$

$f'(a)-f'(c)=f''(\xi_2)(a-c),\quad c<\xi_2<a.$

于是 $|f'(0)|=|f''(\xi_1)c|\leqslant Mc,$

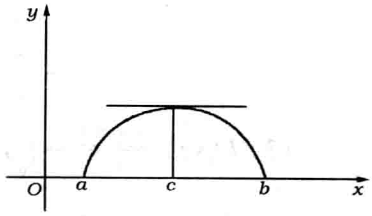
$|f'(a)|=|f''(\xi_2)(a-c)|\leqslant M(a-c).$

故 $|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Mc+M(a-c)=Ma.$

【例7】设$f(x)$在$[a,b]$上有连续的$f''(x)$,且$f''(x)<0,f(a)=f(b)=0$,则在(a,b)上$f(x)>0$,且

$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\frac{4}{b-a}.$$

【证】由$f''(x)<0$可知,$f(x)$在$[a,b]$上是凹函数(图形上凸);由凹函数性质知,$f(x)$大于连接$(a,f(a))$,$(b,f(b))$线段上点的纵坐标.而此线段所在直线即为$y=0$(x轴),所以在(a,b)上$f(x)>0$.再由$f''(x)<0$知,$f'(x)$是严格单调减少的,从而知$f(x)$在(a,b)内有惟一的极大值点,记为$x=c$.此时$f'(c)=0$,如右图所示,而在(a,c)上,$f'(x)>0$,在(c,b)上$f'(x)<0$.由拉格朗日中值定理,



当 $x\in[a,c]$时,$f(x)=f'(\xi_1)(x-a)+f(a),\quad \xi_1\in(a,x).$

由 $f'(x)$ 严格递减，$f'(\xi_1) < f'_+(a)$，注意到 $f(a)=0$，有

$f(x) < f'_+(a)(c-a), x \in [a,c]$.

当 $x \in [c,b]$ 时，同理可得

$f(x) < [-f'_-(b)](b-c), x \in [c,b]$.

于是 $\dfrac{1}{f(x)} > \dfrac{1}{(c-a)f'_+(a)}, x \in [a,c]$,

$\dfrac{1}{f(x)} > \dfrac{1}{(b-c)[-f'_-(b)]}, x \in [c,b]$.

则
$$\int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx = -\int_a^b \frac{f''(x)}{f(x)}dx = \int_a^c \frac{-f''(x)}{f(x)}dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{f(x)}dx$$
$$> \int_a^c \frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)}dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{(b-c)[-f'_-(b)]}dx$$
$$= \frac{1}{(c-a)f'_+(a)}[f'_+(a) - f'(c)] + \frac{1}{(b-c)[-f'_-(b)]}[f'(c) - f'_-(b)]$$
$$= \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-a}{(c-a)(b-c)} > (b-a)\frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{4}{b-a}.$$

第四句话：对定限或变限积分，若被积函数或其主要部分为复合函数，则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例 8】 求下列函数的导数（设 $f(u)$ 是 u 的连续函数）：

(1) $F(y) = \int_0^y f(x-y)dx$，求 $F'(y)$；(2) $F(x) = \int_0^{x^2} tf(x-t)dt$，求 $F'(x)$；

(3) $F(x) = \int_0^1 f(te^x)dt$，求 $F'(x)$； (4) $F(x) = \int_0^{x^2} xf(x+t)dt$，求 $F'(x)$.

【解】 (1) $F(y) \xlongequal{令 u=x-y} \int_{-y}^0 f(u)du$，则 $F'(y) = -f(-y)\cdot(-1) = f(-y)$.

(2)
$$F(x) \xlongequal{令 u=x-t} \int_x^{x-x^2} (x-u)f(u)(-du)$$
$$= -x\int_x^{x-x^2} f(u)du + \int_x^{x-x^2} uf(u)du,$$

则
$$F'(x) = -\int_x^{x-x^2} f(u)du - x[f(x-x^2)\cdot(1-2x) - f(x)]$$
$$+ (1-2x)(x-x^2)f(x-x^2) - xf(x)$$
$$= \int_{x-x^2}^x f(u)du + x^2(2x-1)f(x-x^2).$$

(3) $F(x) \xlongequal{令 u=te^x} \int_0^{e^x} f(u)\dfrac{1}{e^x}du = \dfrac{1}{e^x}\int_0^{e^x} f(u)du = e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)du$,

则 $F'(x) = -e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)du + e^{-x}f(e^x)\cdot e^x = f(e^x) - e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)du$.

(4) $\int_0^{x^2} f(x+t)dt \xlongequal{令 u=x+t} \int_x^{x+x^2} f(u)du$，于是有 $F(x) = x\int_x^{x+x^2} f(u)du$,

则 $F'(x)=\int_x^{x+x^2}f(u)\mathrm{d}u+x[f(x+x^2)\cdot(1+2x)-f(x)]$.

【例9】* 设$f(x)$可微，且满足$x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$，求$f(x)$.

【解】 $\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t\xlongequal{令u=t-x}\int_{-x}^0(u+x)f(u)\mathrm{d}u=-\int_0^{-x}uf(u)\mathrm{d}u+x\int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u$.

于是原方程变为 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{-x}uf(u)\mathrm{d}u-x\int_0^{-x}f(u)\mathrm{d}u$.

两边对x求导，得 $1=f(x)-(-x)f(-x)(-1)-\int_0^{-x}f(u)\mathrm{d}u-xf(-x)(-1)$.

整理，得 $1=f(x)-\int_0^{-x}f(u)\mathrm{d}u$，

两边再对x求导，得$0=f'(x)-f(-x)(-1)$，

即 $f'(x)=-f(-x)$，　①

上式两边对x求导，得 $f''(x)=f'(-x)$，　②

由①，②得 $f''(x)=-f(x)$，

即 $f''(x)+f(x)=0$，

解此方程得 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$.

注意到 $f(0)=1, f'(0)=-1$，故 $f(x)=\cos x-\sin x$.

第一篇　微积分

第一章　函数·极限·连续

一、函数

1. 函数的定义

设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则，变量 y 有一个确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作

$$y = f(x).$$

x 为自变量，y 为因变量，变域 D 为定义域，记为 D_f，变量 y 的取值的集合称为函数的值域，记作 Z_f.

函数概念的两要素：

① 定义域 $\triangleq$ 自变量 x 的变化范围（若函数是解析式子表示的，则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域）.

② 对应关系 $\triangleq$ 给定 x 值，求 y 值的方法.

解题提示　当且仅当给定的两个函数，其定义域和对应关系完全相同时，才表示同一函数，否则表示不同的函数.

【例 1.1】* 与连续函数 $f(x) = \ln x + \int_1^e f(x)\mathrm{d}x - f'(1)$ 等价的函数是

(A)　$e^{\ln(\ln x)}$.

(B)　$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x-1}{n+(x-1)k}(x>0)$.

(C)　$\dfrac{1}{x}$ 的经过点 $(-1,0)$ 的原函数.

(D)　方程 $xyy' = \ln x$ 满足 $y(1) = 0$ 的特解.

【解】 设 $A = \int_1^e f(x)\mathrm{d}x, B = f'(1)$，所以，$f(x) = \ln x + A - B$，有

$$A = \int_1^e f(x)\mathrm{d}x = \int_1^e(\ln x + A - B)\mathrm{d}x = 1 + (A-B)(e-1),$$

$B = f'(1) = (\ln x + A - B)'\big|_{x=1} = 1$，得 $A = 1$，所以，$f(x) = \ln x$.

(A)　$e^{\ln(\ln x)} = \ln x(x>1)$，与 $f(x)$ 的定义域不同.

(B)　$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x-1}{n+(x-1)k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x-1}{n}\frac{1}{1+\frac{x-1}{n}k} = \int_1^x\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

$$= \ln x(x>0),\quad 与 f(x) 等价.$$

(C)　$\dfrac{1}{x}$ 的经过点 $(-1,0)$ 的原函数为 $\ln(-x)$.

(D) $xyy' = \ln x$ 的通解为 $y^2 = \ln^2 x + C$,满足 $y(1)=0$ 的特解为 $y^2 = \ln^2 x, y = \pm \ln x$.
所以,应选(B).

解题提示 函数的表示法只与定义域和对应关系有关,而与用什么字母表示无关,即

$$f(x) = f(t) = f(u) = \cdots$$

简称函数表示法的"无关特性",这是由 $f[g(x)]$ 的表达式求解 $f(x)$ 表达式的有效方法.

【例 1.2】 设 $f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = 2x$,其中 $x \neq 0, x \neq 1$,求 $f(x)$.

【解】 利用函数表示法的无关特性,令 $t = \dfrac{x-1}{x}$,

即 $x = \dfrac{1}{1-t}$, 代入原方程得 $f(\dfrac{1}{1-t}) + f(t) = \dfrac{2}{1-t}$,

即 $f(x) + f(\dfrac{1}{1-x}) = \dfrac{2}{1-x}$.

再令 $\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{u-1}{u}$,即 $x = \dfrac{1}{1-u}$,代入上式,得 $f(\dfrac{1}{1-u}) + f(\dfrac{u-1}{u}) = \dfrac{2(u-1)}{u}$,

即 $f(\dfrac{1}{1-x}) + f(\dfrac{x-1}{x}) = \dfrac{2(x-1)}{x}$,

解联立方程组,得 $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} - 1$.

2. 函数定义域的求法

记住下列简单函数的定义域:

$y = \dfrac{1}{x}$,	$D_f: x \neq 0$,	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = \sqrt[2n]{x}$,	$D_f: x \geqslant 0$,	$[0, +\infty)$
$y = \log_a x$,	$D_f: x > 0$,	$(0, +\infty)$
$y = \tan x$,	$D_f: x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$,	$k \in \mathbf{Z}$
$y = \cot x$,	$D_f: x \neq k\pi$,	$k \in \mathbf{Z}$
$y = \arcsin x$(或 $\arccos x$),	$D_f: \lvert x \rvert \leqslant 1$,	$[-1, 1]$

解题提示 求复杂函数的定义域,就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组之解集.

【例 1.3】 求下列函数的定义域:

(1) $y = \log_{(x-1)}(16 - x^2)$; (2) $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$;

(3) $y = \arcsin \dfrac{2x-1}{7} + \dfrac{\sqrt{2x - x^2}}{\ln(2x-1)}$.