离散数学题解

（第五版）

耿素云 屈婉玲 张立昂 编著

清华大学出版社

离散数学题解

（第五版）

耿素云 屈婉玲 张立昂 编著

清华大学出版社
北京

内 容 提 要

本书是《离散数学(第五版)》(耿素云、屈婉玲、张立昂编著,清华大学出版社出版)一书的配套题解.

全书含数理逻辑、集合论、图论、组合分析初步、代数结构以及形式语言与自动机初步6个部分.每部分均包含内容提要、与本部分配套的习题、习题解答三方面内容.对每道题都做了较详细的解答与分析,对某些题还给出了不同的解法或指出容易犯的错误及犯错误的原因.

本书可作为与《离散数学(第五版)》配套的辅助教材,也可以作为其他离散数学教材的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学题解/耿素云,屈婉玲,张立昂编著. —5版. —北京:清华大学出版社,2013
ISBN 978-7-302-32508-6

Ⅰ.①离… Ⅱ.①耿… ②屈… ③张… Ⅲ.①离散数学—高等学校—题解 Ⅳ.①O158-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第108094号

责任编辑:白立军
封面设计:傅瑞学
责任校对:李建庄
责任印制:刘海龙

出版发行:清华大学出版社
网　　址:http://www.tup.com.cn,http://www.wqbook.com
地　　址:北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**:100084
社 总 机:010-62770175　　**邮　　购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载:http://www.tup.com.cn,010-62795954
印 装 者:三河市李旗庄少明印装厂
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×260mm　　**印　　张**:11.75　　**字　　数**:290千字
版　　次:1999年9月第1版　2013年7月第5版　　**印　　次**:2013年7月第1次印刷
印　　数:1～3000
定　　价:23.00元

产品编号:044186-01

前　言

本书是高等学校信息管理与信息系统专业系列教材《离散数学(第五版)》的配套教学用书. 随着信息技术飞速发展和社会对高层次信息人才的迫切需求,根据教育部计算机科学与技术专业教学指导委员会提出的《计算机科学与技术专业规范》和《高等学校计算机科学与技术专业核心课程教学实施方案》的建议,结合信息管理与信息系统专业的教学要求,《离散数学》(第五版)在保持原有写作风格的基础上,除了对文字做了进一步加工,纠正了某些疏漏以外,并对部分内容进行了调整,主要表现在以下方面.

(1) 将代数结构部分的内容进行了整合,并调整到教材的最后.

(2) 图论部分(第 5,6,7 章)的叙述有较大的改动.

(3) 增添了一些内容,主要是与离散数学应用相关的内容,它们是:组合电路(第 1 章),欧拉函数(第 3 章),着色问题(第 5 章),地图着色与四色定理、格雷码(第 6 章)等.

(4) 对部分习题做了补充和调整.

随着主教材的更新,本书也对相关内容进行了同步更新和调整,各章修订都由原作者完成.

本书包含大量的习题及解答,并通过典型的练习详细分析了离散数学的解题方法,适合作为计算机应用和信息技术等相关专业的辅助教学用书,也可以作为从事信息系统开发的科技人员的参考书.

作者

2013 年 4 月

目　录

第1章 命题逻辑

内容提要

1. 命题符号化及联结词

命题与真值 不是真就是假的陈述句称为命题. 命题的判断结果称为命题的真值. 真值只取两个值：真和假. 真值为真的命题称为真命题，真值为假的命题称为假命题. 由简单陈述句构成的命题称为简单命题或原子命题. 命题符号化是用字母或带下角标的字母 p，$q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots$ 表示命题，用数字 1 表示真，用 0 表示假. 由简单命题用联结词联结而成的命题称为复合命题. 常用的联结词(逻辑联结词)及相关的复合命题有以下 5 种.

否定式 设 p 为一命题，复合命题"非 p"(或"p 的否定")称为 p 的否定式，记作 $\neg p$. $\neg$ 为否定联结词，$\neg p$ 为真当且仅当 p 为假.

合取式 设 p、q 为两命题，复合命题"p 并且 q"(或"p 和 q")称做 p 与 q 的合取式，记作 $p\wedge q$. $\wedge$ 称做合取联结词，$p\wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真.

析取式 设 p、q 为两命题，复合命题"p 或 q"称做 p 与 q 的析取式，记作 $p\vee q$. $\vee$ 称做析取联结词，$p\vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假.

蕴涵式 设 p、q 为两命题，复合命题"如果 p，则 q"称做 p 与 q 的蕴涵式，记作 $p\rightarrow q$，称 p 为蕴涵式的前件，q 为蕴涵式的后件. $\rightarrow$ 称做蕴涵联结词，$p\rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假.

等价式 设 p、q 为两命题，复合命题"p 当且仅当 q"称做 p 与 q 的等价式，记作 $p\leftrightarrow q$. $\leftrightarrow$ 称做等价联结词，$p\leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 的真值相同.

2. 命题公式及分类

命题常项及命题变项 若用 $p,q,r,\cdots$ 表示确定的简单命题，则称 $p,q,r,\cdots$ 为命题常项，命题常项的真值是确定不变的. 若用 $p,q,r,\cdots$ 表示真值可以变化的简单陈述句，则称 $p,q,r,\cdots$ 为命题变项，此时 $p,q,r,\cdots$ 是变量，它们的取值为 1 或 0.

合式公式

(1) 单个的命题变项或常项(含 1 和 0)是合式公式.

(2) 若 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式.

(3) 若 A、B 是合式公式，则 $(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\rightarrow B)$、$(A\leftrightarrow B)$ 也是合式公式.

(4) 只有有限次地应用(1)～(3)形成的符号串才是合式公式. 合式公式也称命题公式，简称公式.

对以上定义的两点说明如下.

(1) 定义中的字母 $A,B,\cdots$ 代表任意的公式.

(2) 联结词的优先顺序：$\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$. 若有括号，先进行括号内的运算. 相同的联结词从左至右的顺序演算.

(3) 公式的最外层括号有时可以省去，不改变运算顺序的括号也可省去.

公式的层次

(1) 若 A 是单个的命题常项或变项，则称 A 为 0 层公式.

(2) 称 A 是 $n+1(n\geqslant 0)$ 层公式是指下列诸情况之一.

① $A=\neg B$，B 为 n 层公式.

② $A=B\wedge C$，其中 B、C 分别为 i 层和 j 层公式，且 $n=\max(i,j)$.

③ $A=B\vee C$，其中 B、C 的层次同②.

④ $A=B\rightarrow C$，其中 B、C 的层次同②.

⑤ $A=B\leftrightarrow C$，其中 B、C 的层次同②.

(3) 若 A 的层次为 k，则称 A 为 k 层公式.

赋值或解释　设 A 为一公式，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是出现在 A 中的全部命题变项，给 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 各指定一个真值(0 或 1)称为对 A 的一个赋值或解释. 若赋值使 A 的真值为 1，则称该赋值为 A 的成真赋值；若赋值使 A 的真值为 0，则称该赋值为 A 的成假赋值.

若命题公式 A 中含命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，将赋值 $p_1=\alpha_1,p_2=\alpha_2,\cdots,p_n=\alpha_n$，记作 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$，其中 α_i 为 0 或 1. 若命题变项为 $p,q,r,\cdots$，则赋值 $\alpha_1\alpha_2\cdots$ 是按字典顺序给它们赋值，即 $p=\alpha_1,q=\alpha_2,r=\alpha_3,\cdots$.

真值表　设公式 A 含 $n(n\geqslant 1)$ 个命题变项，将 A 在 2^n 个赋值下的取值情况列成表，称为 A 的真值表.

公式的分类　设 A 为一个公式.

(1) 若 A 无成假赋值，则称 A 为重言式或永真式.

(2) 若 A 无成真赋值，则称 A 为矛盾式或永假式.

(3) 若 A 至少有一个成真赋值，则称 A 为可满足式.

(4) 若 A 至少有一个成真赋值，又至少有一个成假赋值，则称 A 为非重言式的可满足式.

3. 等值演算

等值式　若等价式 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 与 B 等值，记作 $A\Leftrightarrow B$.

基本的等值式

(1) $A\Leftrightarrow\neg\neg A$.　　双重否定律

(2) $A\Leftrightarrow A\vee A$.

(3) $A\Leftrightarrow A\wedge A$.　　等幂律

(4) $A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$.

(5) $A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$.　　交换律

(6) $(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$.

(7) $(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$.　　结合律

(8) $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$.	分配律
(9) $A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$.	
(10) $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$.	德・摩根律
(11) $\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$.	
(12) $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$.	吸收律
(13) $A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$.	
(14) $A\vee 1\Leftrightarrow 1$.	零律
(15) $A\wedge 0\Leftrightarrow 0$.	
(16) $A\vee 0\Leftrightarrow A$.	同一律
(17) $A\wedge 1\Leftrightarrow A$.	
(18) $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$.	排中律
(19) $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$.	矛盾律
(20) $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$.	蕴涵等值式
(21) $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$.	等价等值式
(22) $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$.	假言易位
(23) $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$.	等价否定等值式
(24) $(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)\Leftrightarrow\neg A$.	归谬论

等值演算 由已知等值式推演出与给定公式等值的公式的过程称为等值演算.

置换规则 设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的公式，$\Phi(B)$ 是用 B 置换 $\Phi(A)$ 中的 A 之后得到的公式，若 $A\Leftrightarrow B$，则 $\Phi(A)\Leftrightarrow\Phi(B)$.

4. 范式

文字 命题变项及其否定统称为文字.

简单析取式 由有限个文字组成的析取式称为简单析取式.

简单合取式 由有限个文字组成的合取式称为简单合取式.

极小项 设有 n 个命题变项，若在简单合取式中每个命题变项以文字的形式出现且仅出现一次，则称这样的简单合取式为极小项. n 个命题变项共可产生 2^n 个不同的极小项，分别记为 $m_0, m_1, \cdots, m_{2^n-1}$，其中 $i(0\leqslant i\leqslant 2^n-1)$ 的二进制表示即为 m_i 的成真赋值.

极大项 设有 n 个命题变项，若在简单析取式中每个命题变项以文字的形式出现且仅出现一次，称这样的简单析取式为极大项. n 个命题变项共可产生 2^n 个不同的极大项，分别记为 $M_0, M_1, \cdots, M_{2^n-1}$，其中，$i(0\leqslant i\leqslant 2^n-1)$ 的二进制表示即为 M_i 的成假赋值.

在极小项和极大项中，文字通常按下角标或字典顺序排列.

析取范式 由有限个简单合取式组成的析取式，称为析取范式.

主析取范式 由有限个极小项组成的析取范式称为主析取范式.

合取范式 由有限个简单析取式组成的合取式称为合取范式.

主合取范式 由有限个极大项组成的合取范式，称为主合取范式.

主要定理

定理 1.1 任一命题公式都存在与其等值的析取范式和合取范式.

定理 1.2 任一命题公式都存在唯一的与其等值的主析取范式和主合取范式.

5. 联结词全功能集

真值函数 记$\{0,1\}^n=\{0\cdots00,0\cdots01,\cdots,1\cdots11\}$,即所有长为 n 的 0,1 符号串的集合. 称定义域为$\{0,1\}^n$,值域为$\{0,1\}$的函数为 n 元真值函数. 有 2^{2^n} 个不同的 n 元真值函数.

联结词全功能集 设 S 为一个联结词集合,若任意真值函数都可以用仅含 S 中的联结词的公式表示,则称 S 为联结词全功能集.

与非式 设 p、q 为两命题,复合命题"p 与 q 的否定"称为 p 与 q 的与非式,记作 $p\uparrow q$,即 $p\uparrow q=\neg(p\wedge q)$. $\uparrow$称为与非联结词. $p\uparrow q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为真.

或非式 设 p、q 为两命题,复合命题"p 或 q 的否定"称为 p 与 q 的或非式,记作 $p\downarrow q$,即 $p\downarrow q=\neg(p\vee q)$. $\downarrow$称为或非联结词. $p\downarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为假.

$\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$、$\{\neg,\wedge,\vee\}$、$\{\neg,\wedge\}$、$\{\neg,\vee\}$、$\{\uparrow\}$、$\{\downarrow\}$、$\{\neg,\rightarrow\}$等都是联结词全功能集.

6. 组合电路

设计组合电路的一般步骤如下.

(1) 写出问题的输入-输出表,即问题的真值函数.

(2) 根据真值函数写出它的主析取范式.

(3) 将主析取范式化简成最简展开式,可采用奎因-莫可拉斯基方法化简.

7. 推理理论

推理的形式结构 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k,B$ 为命题公式,称

$$(A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k)\rightarrow B \qquad (*)$$

为推理的形式结构. $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 为推理的前提,B 为推理的结论. 若($*$)为重言式,则称推理正确,此时称 B 是 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 的逻辑结论或有效结论,记为

$$(A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k)\Rightarrow B.$$

推理定律 称重言蕴涵式为推理定律. 主要的推理定律如下.

(1) $A\Rightarrow(A\vee B)$.	附加
(2) $(A\wedge B)\Rightarrow A$.	化简
(3) $((A\rightarrow B)\wedge A)\Rightarrow B$.	假言推理
(4) $((A\rightarrow B)\wedge\neg B)\Rightarrow\neg A$.	拒取式
(5) $((A\vee B)\wedge\neg A)\Rightarrow B$.	析取三段论
(6) $((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C))\Rightarrow(A\rightarrow C)$.	假言三段论
(7) $((A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C))\Rightarrow(A\leftrightarrow C)$.	等价三段论
(8) $(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(A\vee C)\Rightarrow(B\vee D)$.	构造性二难

判断推理是否正确的方法 判断推理是否正确,就是判断推理的形式结构(*)是否为重言式. 其主要方法如下.

(1) 真值表法.

(2) 等值演算法.

(3) 主析取(主合取)范式法.

构造证明法

证明 证明是一个描述推理过程的命题公式序列,其中的每个命题公式或者为已知的前提,或者是由前面的公式应用推理规则得到的结论(中间结论).

推理规则

(1) 前提引入规则.

(2) 结论引用规则.

(3) 置换规则.

以下推理规则用图式给出,每个图式横线上面为前提,横线下面为结论(∴表示"所以").

(4) 假言推理规则.

$$\begin{array}{l} A \to B \\ A \\ \hline \therefore\ B \end{array}$$

(5) 附加规则.

$$\begin{array}{l} A \\ \hline \therefore\ A \vee B \end{array}$$

(6) 化简规则.

$$\begin{array}{l} A \wedge B \\ \hline \therefore\ A \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{l} A \wedge B \\ \hline \therefore\ B \end{array}$$

(7) 拒取式规则.

$$\begin{array}{l} A \to B \\ \neg B \\ \hline \therefore\ \neg A \end{array}$$

(8) 假言三段论规则.

$$\begin{array}{l} A \to B \\ B \to C \\ \hline \therefore\ A \to C \end{array}$$

(9) 析取三段论规则.

$$\begin{array}{l} A \vee B \\ \neg A \\ \hline \therefore\ B \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{l} A \vee B \\ \neg B \\ \hline \therefore\ A \end{array}$$

(10) 合取引入规则.

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ \hline \therefore\ A \wedge B \end{array}$$

(11) 构造性二难规则.

$$\begin{array}{r} A\to B \\ C\to D \\ A\vee C \\ \hline \therefore B\vee D \end{array}$$

附加前提证明法 设推理的结论是蕴涵式 $A\to B$,把结论中的前件 A 作为前提,称为附加前提,证明结论中的后件 B 为有效结论.

归谬法 把推理的结论 B 的否定 $\neg B$ 作为前提,推出矛盾,即证明 0 为有效结论.

8. 小结

学习第 1 章(命题逻辑)要注意以下几点.

(1) 要弄清命题与陈述句的关系. 命题都是陈述句,但陈述句不都是命题. 只有陈述句所表达的判断结果是唯一确定的(正确的或错误的),它才是命题.

(2) 弄清由 5 种基本联结词联结的复合命题的逻辑关系及其真值. 特别是要弄清蕴涵式 $p\to q$ 的逻辑关系及其真值. 这里,q 是 p 的必要条件. 无论蕴涵关系如何表述,都要仔细地区分出蕴涵式的前件和后件,否则会将必要条件当成充分条件,当然就有可能将假命题变成真命题,或将真命题变成假命题.

(3) 记住 24 个基本等值式,这是学好命题逻辑的关键. 这是因为,在等值演算过程中,在求主析取范式和主合取范式过程中,在将公式化成等值的某个全功能联结词集中公式的过程中都离不开基本等值式.

(4) 要会准确地求出给定公式的主析取范式和主合取范式. 掌握主析取范式与真值表及成真赋值的关系,主合取范式与真值表及成假赋值的关系,主析取范式与主合取范式的关系. 弄清不同类型公式的主析取范式与主合取范式的特点. 特别是要知道,重言式的主析取范式含 2^n(n 为公式中含的命题变项数)个极小项,主合取范式为 1;而矛盾式的主析取范式为 0,主合取范式含 2^n 个极大项.

(5) 会用多种方法(如真值表法、等值演算法、主析取范式法等)判断公式的类型及判断两个公式是否等值.

(6) 会用等值演算法将一个联结词集上的公式等值地化为另一个联结词全功能集上的公式.

(7) 要弄清楚推理的形式结构,掌握判断推理是否正确的方法,以及对某些正确的推理会构造它的证明.

习　　题

1.1 判断下列语句是否为命题,若是命题请指出是简单命题还是复合命题.

(1) $\sqrt{2}$是无理数.

(2) 5 能被 2 整除.

(3) 现在开会吗?

(4) $x+5>0$.
(5) 这朵花真好看呀!
(6) 2 是素数当且仅当三角形有 3 条边.
(7) 雪是黑色的当且仅当太阳从东方升起.
(8) 2080 年 10 月 1 日天气晴好.
(9) 太阳系以外的星球上有生物.
(10) 小李在宿舍里.
(11) 全体起立!
(12) 4 是 2 的倍数或是 3 的倍数.
(13) 4 是偶数且是奇数.
(14) 李明与王华是同学.
(15) 蓝色和黄色可以调配成绿色.

1.2 将上题中的命题符号化,并讨论它们的真值.

1.3 判断下列各命题的真值.
(1) 若 $2+2=4$,则 $3+3=6$.
(2) 若 $2+2=4$,则 $3+3\neq6$.
(3) 若 $2+2\neq4$,则 $3+3=6$.
(4) 若 $2+2\neq4$,则 $3+3\neq6$.
(5) $2+2=4$ 当且仅当 $3+3=6$.
(6) $2+2=4$ 当且仅当 $3+3\neq6$.
(7) $2+2\neq4$ 当且仅当 $3+3=6$.
(8) $2+2\neq4$ 当且仅当 $3+3\neq6$.

1.4 将下列命题符号化,并讨论其真值.
(1) 如果今天是 1 号,则明天是 2 号.
(2) 如果今天是 1 号,则明天是 3 号.

1.5 将下列命题符号化.
(1) 2 是偶数又是素数.
(2) 小王不但聪明而且用功.
(3) 虽然天气很冷,老王还是来了.
(4) 他一边吃饭,一边看电视.
(5) 如果天下大雨,他就乘公共汽车上班.
(6) 只有天下大雨,他才乘公共汽车上班.
(7) 除非天下大雨,否则他不乘公共汽车上班.
(8) 不经一事,不长一智.

1.6 设 p、q 的真值为 0; r、s 的真值为 1,求下列各命题公式的真值.
(1) $p\vee(q\wedge r)$.
(2) $(p\leftrightarrow r)\wedge(\neg q\vee s)$.
(3) $(p\wedge(q\vee r))\rightarrow((p\vee q)\wedge(r\wedge s))$.

(4) $\neg(p \vee (q \rightarrow (r \wedge \neg p))) \rightarrow (r \vee \neg s)$.

1.7 判断下列命题公式的类型,方法不限.

(1) $p \rightarrow (p \vee q \vee r)$.

(2) $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$.

(3) $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$.

(4) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$.

(5) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$.

(6) $(p \wedge \neg p) \leftrightarrow q$.

(7) $(p \vee \neg p) \rightarrow ((q \wedge \neg q) \wedge \neg r)$.

(8) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg(p \vee q)$.

(9) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$.

(10) $((p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow s$.

1.8 用等值演算法证明下列等值式.

(1) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow p$.

(2) $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$.

(3) $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q))$.

1.9 用等值演算法判断下列公式的类型.

(1) $\neg((p \wedge q) \rightarrow p)$.

(2) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$.

(3) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$.

1.10 已知真值函数 F、G、H、R 的真值表如表 1-1 所示. 分别给出用下列联结词集合中的联结词表示的与 F、G、H、R 等值的一个命题公式.

(1) $\{\neg, \rightarrow\}$; (2) $\{\neg, \wedge\}$; (3) $\{\neg, \vee\}$; (4) $\{\uparrow\}$; (5) $\{\downarrow\}$.

表 1-1

p	q	F	G	H	R
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0

1.11 设 A、B、C 为任意的命题公式.

(1) 已知 $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$,问 $A \Leftrightarrow B$ 吗?

(2) 已知 $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C$,问 $A \Leftrightarrow B$ 吗?

(3) 已知 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$,问 $A \Leftrightarrow B$ 吗?

1.12 求下列命题公式的主析取范式、主合取范式、成真赋值、成假赋值.

(1) $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \wedge q \wedge r)$.

(2) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \vee p)$.

(3) $\neg(p \to q) \wedge q \wedge r$.

1.13 通过求主析取范式判断下列各组命题公式是否等值.

(1) $p \to (q \to r)$；$q \to (p \to r)$.

(2) $p \uparrow q$；$p \downarrow q$.

1.14 一个排队线路,输入为 A、B、C,其输出分别为 F_A、F_B、F_C. 在同一时间内只能有一个信号通过. 如果同时有两个或两个以上信号通过时,则按 A、B、C 的顺序输出. 例如,A、B、C 同时输入时,只能 F_A 有输出. 写出 F_A、F_B、F_C 的逻辑表达式,并化成全功能集$\{\downarrow\}$中的表达式.

1.15 某勘探队有 3 名队员. 有一天取得一块矿样,3 人的判断如下.

甲说：这不是铁,也不是铜.

乙说：这不是铁,是锡.

丙说：这不是锡,是铁.

经实验室鉴定后发现,其中一人两个判断都正确,一个人判断对一半,另一个人判断全错了. 根据以上情况判断矿样的种类并指出谁的判断全对？谁的判断对一半？谁的判断全错？

1.16 有一盏灯由 3 个开关控制,要求按任何一个开关都能使灯由亮变黑或由黑变亮. 试设计一个这样的组合电路.

1.17 输入输出的关系如表 1-2 和表 1-3 所示,试写出实现它们的组合电路的合式公式,并用奎因-莫可拉斯基方法化简.

表 1-2

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

表 1-3

x_1	x_2	x_3	x_4	F	x_1	x_2	x_3	x_4	F
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	0

1.18 判断下列推理是否正确. 先将命题符号化,再写出前提和结论,然后进行判断.

(1) 如果今天是 1 号,则明天是 5 号. 今天是 1 号. 所以明天是 5 号.

(2) 如果今天是 1 号,则明天是 5 号. 明天是 5 号. 所以今天是 1 号.

(3) 如果今天是 1 号,则明天是 5 号. 明天不是 5 号. 所以今天不是 1 号.

(4) 如果今天是 1 号,则明天是 5 号. 今天不是 1 号. 所以明天不是 5 号.

1.19 构造下面推理的证明.

(1) 前提：$\neg(p \wedge \neg q)$, $\neg q \vee r$, $\neg r$.

结论：$\neg p$.

(2) 前提：$p \to (q \to s), q, p \vee \neg r$.

结论：$r \to s$.

(3) 前提：$p \to q$.

结论：$p \to (p \wedge q)$.

(4) 前提：$q \to p, q \leftrightarrow s, s \leftrightarrow t, t \wedge r$.

结论：$p \wedge q \wedge s \wedge r$.

(5) 前提：$(p \wedge q) \to r, \neg r \vee s, \neg s, p$.

结论：$\neg q$.

1.20 判断下述推理是否正确，并证明你的结论. 如果他是理科学生，他必学好数学. 如果他不是文科学生，他必是理科学生. 他没学好数学. 所以他是文科学生.

以下各题是填充题. 题目要求均为从供选择的答案中选出应填入叙述中的方框□内的正确答案.

1.21 给定命题公式如下：

$$p \vee (q \wedge \neg r).$$

上述公式的成真赋值为$\boxed{\text{A}}$，成假赋值为$\boxed{\text{B}}$，公式的类型为$\boxed{\text{C}}$.

供选择的答案

A：① 无； ② 全体赋值； ③ 010,100,101,111； ④ 010,100,101,110,111.

B：① 无； ② 全体赋值； ③ 000,001,011； ④ 000,010,110.

C：① 重言式； ② 矛盾式； ③ 可满足式.

1.22 给定命题公式如下：

$$\neg(p \wedge q) \to r.$$

上述公式的主析取范式中含极小项的个数为$\boxed{\text{A}}$，主合取范式中含极大项的个数为$\boxed{\text{B}}$，成真赋值为$\boxed{\text{C}}$.

供选择的答案

A：① 2； ② 3； ③ 5； ④ 0； ⑤ 8.

B：① 0； ② 8； ③ 5； ④ 3.

C：① 000,001,110； ② 001,011,101,110,111； ③ 全体赋值； ④ 无.

1.23 给定下列 3 组前提.

(1) $\neg(p \wedge \neg q), \neg q \vee r, \neg r$；

(2) $(p \wedge q) \to r, \neg r \vee s, \neg s$；

(3) $\neg p \vee q, \neg q \vee r, r \to s$.

上述各前提中，(1)的逻辑结论(有效结论)为$\boxed{\text{A}}$，(2)的逻辑结论为$\boxed{\text{B}}$，(3)的逻辑结论为$\boxed{\text{C}}$.

供选择的答案

A、B、C：① r； ② q； ③ $\neg p$； ④ s； ⑤ $\neg p \vee \neg q$； ⑥ $p \to s$； ⑦ $p \wedge q$.

习题解答

1.1 除(3)、(4)、(5)、(11)外全是命题.其中,(1)、(2)、(8)、(9)、(10)、(14)、(15)是简单命题,(6)、(7)、(12)、(13)是复合命题.

分析 首先应该注意到,命题是陈述句,因而不是陈述句的句子都不是命题.本题中,(3)为疑问句,(5)为感叹句,(11)为祈使句,它们都不是陈述句,所以它们都不是命题.

其次,(4)这个句子是陈述句,但它表示的判断结果是不确定的,也就是说,它可真(如取 x 为 2),它也可能为假(如取 $x=-10$),于是(4)不是命题.

其余的句子都是有确定判断结果的陈述句,因而它们都是命题.其中(8),虽然现在还不知道它是真是假,这要到 2080 年 10 月 1 日才能知道.但是,它不是真就是假,这是肯定无疑的,因而它是命题.作为命题,只要求陈述句有确定的真假值,而不管是否知道.(9)也与此类似.

因为(1)、(2)、(8)、(9)、(10)、(14)、(15)都是简单的陈述句,因而作为命题,它们都是简单命题.(6)和(7)各为由联结词"当且仅当"联结起来的复合命题,(12)是由联结词"或"联结的复合命题,而(13)是由联结词"且"联结起来的复合命题.这里的"且"为"合取"联结词.在日常生活中,合取联结词有许多表述法,例如,"虽然……但是……"、"不仅……而且……"、"一面……一面……"、"……和……"、"……与……"等.但要注意,有时"和"或"与"联结的是两个名词,构成简单命题.例如,(14)、(15)中的"与"、"和"就是联结两个名词,这两个命题均为简单命题,而不是复合命题.希望读者在遇到"和"或"与"出现的命题时,要根据命题所陈述的含义加以区分.

1.2 (1) p:$\sqrt{2}$是无理数.p 为真命题.

(2) p:5 能被 2 整除.p 为假命题.

(6) $p\leftrightarrow q$.其中,p:2 是素数,q:三角形有 3 条边.由于 p 与 q 都是真命题,所以,$p\leftrightarrow q$ 为真命题.

(7) $p\leftrightarrow q$.其中,p:雪是黑色的,q:太阳从东方升起.由于 p 为假命题,q 为真命题,因而 $p\leftrightarrow q$ 为假命题.

(8) p:2080 年 10 月 1 日天气晴好.现在我们还不知道 p 的真假,但 p 的真值是确定的(客观存在的),要到 2080 年 10 月 1 日才能知道.

(9) p:太阳系以外的星球上有生物.它的真值情况类似于(8).

(10) p:小李在宿舍里.p 的真值由具体情况而定,是确定的.

(12) $p\vee q$.其中,p:4 是 2 的倍数,q:4 是 3 的倍数.p 为真命题,q 为假命题,$p\vee q$ 为真命题.

(13) $p\wedge q$.其中,p:4 是偶数,q:4 是奇数.由于 q 是假命题,所以,$p\wedge q$ 为假命题.

(14) p:李明与王华是同学.真值由具体情况而定,是确定的.

(15) p:蓝色和黄色可以调配成绿色.这是真命题.

分析 命题的真值是唯一确定的.有些命题的真值是已知的,有些则不能马上知道,但它们是确定的,是客观存在的.