碧海书道 BOOK HOUSE

高等学校数学学习辅导丛书

高等数学

典型题精讲

清华大学 韩云瑞 主编

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

高等数学
典型题精讲

主编 韩云瑞
编著 刘庆华 黎传琦 王燕来

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型题精讲/韩云瑞编著. —4 版. —大连:
大连理工大学出版社,2008.8(2009.1 重印)
(高等学校数学学习辅导丛书)
ISBN 978-7-5611-1948-8

Ⅰ. 高… Ⅱ. 韩… Ⅲ. 高等数学—高等学校—解题 Ⅳ. O13-

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 075394 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm 印张:14.75 字数:436 千字
2008 年 8 月第 4 版 2009 年 1 月第 9 次印刷

责任编辑:梁 锋 王 伟 责任校对:碧 海
封面设计:宋 蕾

ISBN 978-7-5611-1948-8 定价:26.00 元

谈谈高等数学的考研复习

清华大学数学科学系　韩云瑞

全国硕士研究生入学考试中的数学考试是对于考生大学数学基础知识与能力全面、综合的考核。与普通的考试相比,它的要求范围广、难度大、综合性强。因此许多人在复习数学的过程中存在不少困难。在本文中,作者以科学的方法分析数学考研的特点与趋势,对于考研复习提出一些中肯的建议。

一、数学考研的特点和命题原则

数学考研是对于考生的数学能力进行全面的考查,考试性质为选拔性兼水平性。通过考试将考生的数学能力进行区分,以便择优录取;同时,考生的成绩必须达到一定水平才能录取。

数学考研的命题原则包含以下几点:

1. 基础性:以考查基本概念、基本方法和基本原理为主。

2. 综合性:考试内容多,为了扩大覆盖面,往往是一个题目涉及几个知识点和两个以上的方法、技巧。部分题目用以测验考生掌握该门课程的深度和融会贯通、独立思考以及灵活运用的能力。

3. 控制总体难度。试题排列先易后难。考试要达到预期的平均成绩,以便于录取。因此每年试卷的总体难度都要进行谨慎的把握。

填空题主要用于考查"三基",以中低难度为主;选择题主要考查考生对于数学概念、数学性质的理解,并能进行推理和分析,以中等难度为主。

4. 稳定性:试题内容和要求、内容比例、题型比例都必须符合大纲要求,不出超纲题、偏题和怪题。保证重点,不面面俱到。难度要保持稳定。

二、近几年数学考研的命题趋势

近几年来,考研试题的难度逐年都有某种程度的降低。特别是 2005 年和 2006 年的题目较往年明显容易。那么,这是偶然现象,还是某种必

然趋势？认识这个问题对于指导考研复习有重要意义。

首先，大学的持续扩招和大学毕业生的就业压力的加大以及研究生招生名额的大幅度增加，使得参加研究生入学考试的人数急剧增加，导致考生的平均水平降低。为了达到预期的平均成绩，必须适度降低试题的难度。而且每年都要根据考试成绩适当调整下一年命题的难度。这是一个趋势，而不是偶然现象。例如 2004 年数学一的考试成绩偏低，因此 2005 年的数学一试题的难度降低了。由于 2004 年的数学二的成绩偏高，因此 2005 年的数学二试题的难度稍微有所提高。2006 年的试题总体上比较简单，因此数学一和数学二的成绩都不错。可以设想，2007 年的试题难度不会再降低。根据每年考试成绩随时调整下一年试题的难度，是一件正常的事情。

其次，我们列举三个方面分析近几年考研试题特点的变化。

1. 过去(约 2002 年之前)，数学一试卷中每年都有一道多元复合函数微分法的题目，主要是对于某个抽象的函数进行形式化的微分运算。但是近几年来，对于多元复合函数微分法的考查多合并于一些综合的问题中，完全形式化的运算不多了。笔者认为这是命题思想的一个进步。

2. 第二型曲线积分与格林公式是每一年都考的内容。前些年一般是一个中等难度、比较常规的计算题目。但是近三年以来，这方面题目的类型有明显的变化，难度有明显的提高。命题的用意很明显：在整张试卷的难度降低的情况下，为了达到一定的区分度，必须提高个别题目的难度。

3. 选择题的特点和变化。选择题主要考查考生对于数学概念、数学性质的理解并能进行简单推理、判定和比较的能力。纵观二十余年的考研试题可以看出选择题的一些特点：

(1)考查考生对于概念的理解程度和推理能力为主，有些概念在考题中反复出现，并且考查力度较深。

(2)一道题目中往往同时考查几个知识点。考生必须掌握有关的概念和原理以及它们之间的联系，并经过一定的分析和推理，才能得出正确答案。

(3)考查重点明确。考查的内容，绝大多数涉及到微积分中一些最基本、最常用的部分，例如导数、极值和导数应用等。

(4)多数选择题的难度为中等以上。

但是，从 2005 年开始，选择题有了一些明显的变化，主要体现在以下两个方面。

(1)选择题中出现了简单的计算题。2005 年数学一中的四个高等数学选择题中包含三个以计算为主的题目；数学二中的三个高等数学选择题全是以计算为主的题目。这在过去是很少见的。

(2)出现了一些在教学中往往不被重视、理论性较强的题目。例如隐函数存在的条件、条件极值的几何意义等。

产生这些变化的因素有两个：首先，考查概念的选择题已经连续出了二十多年，再设计有新意、不雷同的同类选择题已经有些困难了；其次，命题者有意识地降低了题目的难度，在概念题不好出的情况下，部分选择题转向考查计算能力。

还有一个值得注意的现象，前几年的选择题经过简单的改头换面又一次出现在试题中。

考研试题的这些变化趋势对于考生的复习备考有一定的指导意义。

以上分析表明，每年考研试题的难度不是随机和任意的。对考生水平的估计，对考试成绩的预期目标，以及前一年的考试成绩等因素，都会影响到试题难度的变化。

但是，题目的难度没有绝对的客观标准，对于题目难度的把握是专家行为。因此，题目的难易能否确切达到预期效果，可能会有折扣。另外，一份试卷的最终敲定还可能受到一些不可预知的偶然因素的影响。因此，对于未来考试难度的变化，可以大体掌握总体趋势，但是不可能百分之百地算计清楚。

三、数学考研复习的正确方法

考研既不神秘，也不是高不可攀。但是考研复习必须有正确的心态与科学的方法。下面从几个方面谈谈这个问题。

1. 重视基础能力的训练

研究生入学数学考试重视对基础能力的考查。试题中有相当部分的题目直接考查基本概念和基本运算。在复杂问题面前束手无策，归根结底是没有把基本问题弄清楚。有些考生在难题面前无从入手，或者半途

而废，最重要的原因是他们的基本功不扎实，不熟练。有了扎实的基本功，才能真正提高解题能力，才有希望在数学考研中取得好成绩。

因此，在考研复习的第一阶段，必须在理解基本概念、掌握基本运算的基础上，比较系统地做好基本练习题。做题务必扎扎实实，一丝不苟。认真体会解题过程中方法和技巧的运用，注意可能出现的问题和差错，直到得出正确答案为止。有了扎实的基本功，在比较复杂题目的解题过程中，才能做好其中的每一步。在数学复习中，这是必要的一步，不存在其他的捷径。事实证明，在考研考试中，仅凭扎实的基本功就可以得到许多分数。对于那些较为复杂的题目，概念清楚、基本运算和推理能力熟练的考生，不仅能够准确地理解题目的含义，迅速确定正确的解题思路，而且能够正确地做好其中的每一步。基本功不熟练的考生，即使能看出解题思路，往往也因为基本功不熟练而半途而废。

2.强记博闻，提高解题能力

纵观历年考研试题所涉及的知识和方法，都集中在大学数学教学中一些基本的、重要的内容。解题的过程总离不开教材和教学中的常见方法与技巧。但是每年的题目在问题的提法和技巧的运用方面都会有一些变化。因此，我们必须通过复习与解题熟练地掌握这些基本方法和技巧，并且在这个基础上适当地多见识一些题目的变化，提高应变能力。

例如，每年的试题中总会出现求极限的题目。虽然形式上有各种变化，但是方法离不开无穷小等价代换、洛必达法则和重要极限之一 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$。如果是某个和式的极限，则可能会涉及到定积分概念或者夹逼定理（较难的题目可能会涉及到泰勒公式，数列极限多涉及到单调收敛定理，不过由于试题难度降低，这类题目已经较少见到），上面提到的这几个方法都是教学中的重点，是在高等数学（微积分）学习过程中必须掌握的内容。如果扎实地掌握了这些方法，再看一看历年考研试题中有关极限的题目，了解可能的变化，就会提高解题能力、增强考研成功的把握。

作为例子，考查 2001 年数学二中的一道 10 分题：

设有函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^2)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$$

问:a 为何值时 $f(x)$在 $x=0$ 处连续? a 为何值时 $x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点?

这里的解题过程只涉及到第一类间断点概念和求极限两个问题。核心是求两个极限:$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1+ax^2)}{x-\arcsin x}$和$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}$。在第一个极限中用等价无穷小 ax^2 代换 $\ln(1+ax^2)$;在第二个极限中,用等价无穷小 $\dfrac{1}{4}x^2$代换 $x\sin\dfrac{x}{4}$,则求极限的问题就会迎刃而解。

另外,在考研试题的极限问题中经常出现 1^∞ 型未定式的极限。对于这个问题,多数考生会首选洛必达法则:取对数将原问题转化为$\dfrac{0}{0}$或者$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式的极限。但经验表明,解决此类问题的最简单的方法是利用重要极限$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$。因为任何一个 1^∞ 型未定式都可以写为$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$,其中 α,β 都是无穷小。对于此类题目,如果求出$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=k$,则有$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}=e^k$。只要掌握这个方法,$1^\infty$ 型未定式的各种变化都可以应对自如。

再看与函数极值有关的问题。1990 年数学一和数学二中有一道选择题:

设 $f(x)$在点 $x=0$ 的某个邻域中连续,且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$。问 $f(0)$是否为极值?是极大值,还是极小值?

一般学生学过函数极值之后,只能记住极值的必要条件和两个充分条件。但是这些条件对于上面的问题都用不上。其实,$f(0)$是否为极大值或极小值,归根结底取决于函数改变量 $\Delta f=f(x)-f(0)$是正值还是负

值。考研试题不止一次出现函数极值的问题，虽然每次都有些变化，但是只要清楚地理解这一点，总可以找出正确答案。死记硬背极值的充分条件，一般不能直接解决问题。

下功夫熟练地掌握解题的基本、常用的思路和方法，在此基础上适当地多看多练一些题目，了解基本思路和方法可能的变化，是提高解题能力、取得好成绩的有效途径。

四、提高临场发挥的水平

1. 正确审题，在最短的时间内理解问题。例如弄清楚需要解决什么问题，大概需要哪些知识和方法，应当从哪里入手等。一般说来，审题过程的洞察力取决于经验和见多识广。

2. 掌握解题过程中一些行之有效的思维方法。

(1)在临场的情况下，要迅速确定解题思路，可以考虑这样的思维方法：一看结论，二看条件。题目的结论就是你需要完成的目标，目标决定题目的总体思路。但是解题必须从条件入手，通过某些中间步骤将条件和结论连接起来。

分析 2003 年数学一的一道 12 分题：

设函数 $f(x)$连续且恒大于零。令

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma},\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\,\mathrm{d}x}。$$

其中，$\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$。

① 讨论 $F(x)$ 在$(0,+\infty)$ 内的单调性；

② 证明当 $t>0$ 时 $F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$。

这个题目的目标是判定 $F(t)$ 的单调性，以及证明不等式 $f(t)=F(t)-\dfrac{2}{\pi}G(t)>0$，这样的问题可以归结为单变量函数中用导数判定函数的单调性的问题。因此，必须将 $F(t)$ 和 $G(t)$ 表示成变量 t 的函数，以便于求导数 $F'(t)$ 与 $G'(t)$。剩下的问题就是如何将 $F(t)$ 和 $G(t)$ 的表达式转化为 t 的函数，这很自然地启发你用球坐标和极坐标处理表达式中的三重积分和二重积分。于是，这个题目的思路与方法就明确了。

再看 2003 年数学二的一道 10 分题：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$。若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，求证：

① 在 (a,b) 内 $f(x)>0$；

② 在 (a,b) 内存在 ζ，使 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{2\zeta}{f(\zeta)}$；

③ 在 (a,b) 内存在与 ② 中 ζ 相异的点 η，使

$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\zeta}{\zeta-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

在这个题目中，如果不看结论 ①，对极限存在的这个条件的意义就不好理解。但是结论 ① 容易使我们想到这样的思路：若 $f(0)=0$，$f'(x)>0$，则可以推出在 (a,b) 内 $f(x)>0$。于是就会想到极限这个条件应该用于证明 $f(0)=0$。这样一来，第一问就解决了。

考查 ② 的结论：$\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{2\zeta}{f(\zeta)}$。等式右端的比值只有在柯西中值定理中见到过，于是想到这样的思路：只要对于 x^2 和 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 两个函数运用柯西中值定理，就可以将等式的左端化为右端。

对于结论③，只需要看清楚它与②的区别之处仅仅在于②中的 $f(\zeta)$ 变成了 ③ 中的 $f'(\eta)\cdot(\zeta-a)$。这正是对于函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\zeta]$ 上运用拉格朗日中值定理的结果。

以上的分析过程就是“一看结论，二看条件”。其含义是：由题目的结论往往可以看出解题的大体思路，由题目的条件可以判断应当从何处入手。

(2) 积极地进行类比和联想，看一看当前的问题与自己曾经见过的哪个题目类似，有什么区别；过去用过的方法能否直接运用，或者稍加修改后可以运用。

(3) 迅速地走出第一步。如果某些题目有几种可能的选择，一时不能看清楚准确的解题方法。就要任意选定一种思路，迅速地入手进行分析。

对于许多情形，迈出没有十分把握的第一步之后，往往能够柳暗花明，找到解题思路。在一些较复杂的问题中，前一步的结论往往为下一步给出提示，或者为下一步创造条件。如果迈出第一步思路仍不明朗，可以迅速地换另一种思路试一试。

考查 2001 数学二的一道 8 分题：

设 $f(x)$ 在 $[-a,a](a>0)$ 上有连续的二阶导数，$f(0)=0$。

① 写出 $f(x)$ 带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

② 证明在 $[-a,a]$ 至少存在一点 η，使 $a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$。

这里第一问显然是为第二问作铺垫。列出第一问的目的是为了降低题目的难度，启发考生找到解题思路。如果此题只有第二问，考生应当立即写出带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式，然后进行必要地分析（结论中含有二阶导数，但不含更高阶的导数，只有做一阶麦克劳林公式展开，才可能得到这样的结果）。

(4) 对于某些具有几何意义的题目，画一幅图，就可以立即发现解题思路。考查 1997 年数学一的一道选择题：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)>0$。$f'(x)<0$，$f''(x)>0$。比较 I_1，I_2 和 I_3 的大小。其中 $I_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$I_2=(b-a)f(b)$，$I_3=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$。

运用分析、推理的方法判定三者的大小顺序是比较烦琐的一件事情。但是借助图形可以使问题变得十分简单。由题目条件知道，根据题目给出的 $f(x)$ 的特点勾画出示意图（图 1）。

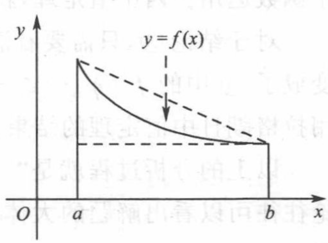

图 1

显然 $I_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$I_2=(b-a)f(b)$ 和 $I_3=\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$ 分别是图中的曲边四边形、矩形和梯形的面积。于是立即知道正确的答案是 $I_2<I_1\leqslant I_3$。

再考查 1992 年数学一的一道 7 分题：

假设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 内存在二阶导数，$f(0)=0, f''(x)<0$。求证对于任意的正数 x_1, x_2 有 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$。

对于这道题目，绝大多数考生从微分中值定理入手，仅有一些对解题方法和技巧十分熟练的考生能够在反复试探中找到简捷的证明方法。

相比之下，一个考生从运用图形解题中受到启发，给出了一个很精彩的证明：根据题目条件 $f(0)=0, f''(x)<0$ 勾画出这个函数图形(图 2)。

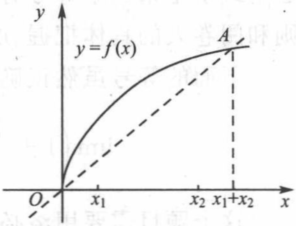

图 2

曲线 $y=f(x)$ 上凸。连接曲线 $y=f(x)$ 上两点 $O(0,0)$ 和 $A(x_1+x_2, f(x_1+x_2))$，则曲线 $y=f(x)(0<x<x_1+x_2)$ 位于线段$\overline{OA}$的上方。于是

$$f(x_1)>\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\cdot x_1, f(x_2)>\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\cdot x_2$$

两个不等式的左右两端分别相加得到 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$。

在许多问题中，直观意义常常是打开思路的一把钥匙，读者在学习高等数学的过程中，一定要注意每个概念和原理的几何意义(即直观意义)。

(5) 规范做答，提高得分率

考研阅卷工作是一项时间紧迫、劳动强度很大的任务。书写清楚、整洁的试卷容易使阅卷人看清考生的思路，有利于取得好的成绩。相反，卷面脏乱、表达不清晰的解题过程，尽管总体是正确的，但是常常因为时间的紧张，阅卷人不能仔细推敲而发生误判或漏判。在选择解题思路和方法时，尽可能采用大家熟悉的、常见的思路和方法，能够使阅卷人很快地理解你的方法。

在答题过程中，尽量将解题的步骤写得清楚、完整。过分的跳步可能会被扣分。例如，考查 2006 年数学一和数学二的一道 12 分题：

假设数列$\{x_n\}$满足：$0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$。

① 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求之；② 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$。

考查第二问的解答过程：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{x_n^2}\ln\left(1+\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{x_n^2}\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}}$$

这个式子中第三个等号有些跳步，是否一定扣分，要看某个地区的评分细则和阅卷人的具体把握。所以应当尽量将这一步解释清楚。

下面的等号虽然正确，但是显然有些跳步，扣分是有可能的。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}$$

这个题目需要用洛必达法则求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x_n-x_n}{x_n^3}$。正确的方法是用洛必达法则求出函数极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$，然后推出$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x_n-x_n}{x_n^3}=-\dfrac{1}{6}$。但是如果跳过这一步，直接用洛必达法则求离散变量极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x_n-x_n}{x_n^3}$，则一定要扣分。

再看 2006 年数学一的一道 12 分题：

将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数。

一般考生都清楚将函数分解成

$$\frac{x}{2+x-x^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2-x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}$$

但是需要注意：分别将$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2-x}$与$-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x+1}$展开成幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$和$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$之后，必须合并成$\dfrac{x}{2+x-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$，这样才是需要的答案。如果考生给出的答案是$\dfrac{x}{2+x-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，则由于未写出最终答案，一般要扣分。

五、怎样解答选择题

排除法对于解答选择题有一定用处。但是，解答选择题最主要的方法是对于题干中的条件作适当的分析，并且与四个选项对照，然后“对号入

座式”地确定正确选项。作为例子，考查 1996 年数学一和数学二的一道选择题：

设 $f(x)$ 处处可导，则下列命题成立的是（ ）。

A. 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，则必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$

B. 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$，则必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

C. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

D. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$，则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

这道题目的四个选项各自构成独立的命题。各个命题具有相同的结构形式。其中 A 与 C、B 与 D 的内容也非常接近。因此错误选项对于正确选项的干扰很大。对于每一个选项，肯定或者否定都需要一个分析过程，如果将四个选项都说清楚，是一道很长的证明题（包括论证和举出反例）。因此这是一道较难的题目。那些基础扎实、头脑清楚的考生会很快排除选项 A 与 C，然后再排除 B。更好的做法不是逐一检查（费时太多），而是将四个选项浏览一遍，发现第四个选项正确，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ 说明 $f(x)$ 的增加速度趋向于正无穷，于是 $f(x)$ 也必定趋向于正无穷。当然，能否迅速看到这一点，取决于你的基础是否扎实。

如果对于四个选项逐一地考查排除，那么在无意之中就增加了二至三倍的工作量。

在数学证明中，举例归纳方法是不允许的。但是解答选择题时，如果用分析论证的方法比较困难，则可以试一试用这种方法能否筛选出正确的结论。例如，考查 1992 年数学一和数学二的一道选择题：

设 $f(x)=3x^2+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最大的 n 等于（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

按照常规的做法，可以将 $x^2|x|$ 写成分段函数，求导数之后再将一、二阶导数写成分段函数，最后发现二阶导数不能继续求导。于是得到 $n=2$。选项 C 正确。但是这样的做法很烦琐。比较简单的做法是：注意到函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处不可导，但是乘以 x 以后，函数 $x|x|$ 在点 $x=0$ 处有一阶导数，于是可以推断乘以 x^2 后得到的函数 $x^2|x|$ 在点 $x=0$ 处应当有二阶导数。在一般情形下，由于会出现各种复杂的情况，这样的推断过于简单化。但是在考研选择题中，一般不会出现很复杂的情况，这

样的举例归纳方法经常是有效的。

在选择题的四个选项中，除了一个正确选项之外，至少还有一个或者两个“干扰项”。干扰项的表述与正确选项接近，或者起到混淆的效果，它们的目的是干扰考生的分析思路，将一些概念不够清晰的考生引入歧途，以便将分数拉开。对于问题进行深入地分析和正确地推理，才能将干扰项与正确答案区分开来，避免出现错误。

以上是作者根据自己掌握的资讯和经验，对于复习考研的青年朋友们提出的一些中肯的建议。由于篇幅所限，更多的话题就不能在这里展开了。

2006 年 6 月于清华

目录

第一章　函数与极限 / 1
典型题精讲 / 1　客观题 / 1　非客观题 / 5　难题选讲 / 26
解题能力训练 / 33　解题能力训练参考答案与提示 / 36
模拟考场 / 37　模拟考场参考答案与提示 / 38

第二章　导数与微分 / 41
典型题精讲 / 41　客观题 / 41　非客观题 / 52　难题选讲 / 74
解题能力训练 /76　解题能力训练参考答案与提示 / 77
模拟考场 / 78　模拟考场参考答案与提示 / 79

第三章　导数应用 / 81
典型题精讲 / 81　客观题 / 81　非客观题 / 91　难题选讲 / 121
解题能力训练 / 127　解题能力训练参考答案与提示 / 129
模拟考场 / 130　模拟考场参考答案与提示 / 132

第四章　不定积分 / 134
典型题精讲 / 134　客观题 / 134　非客观题 / 136
解题能力训练 / 150　解题能力训练参考答案与提示 / 150
模拟考场 / 152　模拟考场参考答案与提示 / 153

第五章　定积分及其应用 / 155
典型题精讲 / 155　客观题 / 155　非客观题 / 164　难题选讲 / 198
解题能力训练 / 203　解题能力训练参考答案与提示 / 205
模拟考场 / 206　模拟考场参考答案与提示 /207

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS

第六章　空间解析几何与向量代数 / 211
典型题精讲 / 211　客观题 / 211　非客观题 / 214
解题能力训练 / 237　解题能力训练参考答案与提示 / 239
模拟考场 / 239　模拟考场参考答案与提示 / 240

第七章　多元函数微分法及其应用 / 242
典型题精讲 / 242　客观题 / 242　非客观题 / 244　难题选讲 / 272
解题能力训练 / 275　解题能力训练参考答案与提示 / 277
模拟考场 / 279　模拟考场参考答案与提示 / 281

第八章　重积分 / 282
典型题精讲 / 282　客观题 / 282　非客观题 / 287　难题选讲 / 311
解题能力训练 / 313　解题能力训练参考答案与提示 / 314
模拟考场 / 317　模拟考场参考答案与提示 / 318

第九章　曲线积分与曲面积分 / 319
典型题精讲 / 319　客观题 / 319　非客观题 / 324　难题选讲 / 351
解题能力训练 / 356　解题能力训练参考答案与提示 / 357
模拟考场 / 357　模拟考场参考答案与提示 / 358

第十章　级数 / 361
典型题精讲 / 361　客观题 / 361　非客观题 / 369　难题选讲 / 393
解题能力训练 / 397　解题能力训练参考答案与提示 / 401
模拟考场 / 403　模拟考场参考答案与提示 /404

第十一章　微分方程 / 407
典型题精讲 / 407　客观题 / 407　非客观题 / 410
解题能力训练 / 445　解题能力训练参考答案与提示 / 447
模拟考场 / 449　模拟考场参考答案与提示 / 451