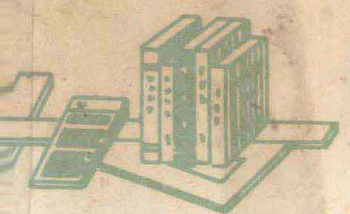


数学学习

Shuxue Xuexi

全国高校84年研究生入学考试

数学试题及题解选编

清华大学　西北大学　天津大学　同济大学　浙江大学
湖南大学　重庆大学　大连工学院　东北工学院　南京工学院
华中工学院　华南工学院　郑州工学院　北方交通大学　北京工业大学
北京工业学院　北京化工学院　北京农业大学　北京航空学院　吉林工业大学
甘肃工业大学　兰州铁道学院　西北工业大学　西安公路学院　西安交通大学
西安地质学院　西安矿业学院　陕西机械学院　陕西师范大学　上海工业大学
上海交通大学　上海海运学院　山东矿业学院　山东海洋学院　南京气象学院
南京邮电学院　长沙铁道学院　国防科技大学　武汉测绘学院　成都科技大学
北京轻工业学院　解放军测绘学院　大连轻工业学院　哈尔滨工业大学
西北纺织工学院　天津纺织工学院　无锡轻工业学院　苏州丝绸工学院
东北重型机械学院　西北电讯工程学院　西安冶金建筑学院　武汉水利电力学院
成都电讯工程学院　解放军工程技术学院　长春光学精密机械学院

（以上为有稿院校）

增刊

1984

陕西省数学会

目　录

一、一九八四年硕士研究生高等数学入学试题及题解选

一 一九八四年硕士研究生高等数学入学试题及题解选

北方交通大学

电 类

一、（10分） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\cos x}=?$

二、（10分）设 $f(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } x<1 \text{ 时}, \\ a, & \text{当 } x\geqslant 1 \text{ 时}. \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} b, & \text{当 } x<0 \text{ 时}, \\ x+2, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时}. \end{cases}$

试问 a，b 为何值时，函数 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续？

三、（10分）求抛物线 $y=x^2$ 到直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离。

四、（10分）设 $u=\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$ 其中 a，b，c 为常数，

求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=?$

五、（10分）将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ 在 $[0,2\pi]$ 内展为富里哀级数。

六、（10分）设 $y(x)$ 是 x 在 $[1,+\infty)$ 内的一个具有连续导数的函数，且满足：

$$x\int_1^x y(x)dx=(x+1)\int_1^x xy(x)dx,\quad y(1)=1.\ \text{试求 } y(x).$$

七、（10分）计算二重积分：$\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy$.

八、（8分）已知两向量组有相同的秩，并且其中之一组可以由另一组线性表示，证明这两向量组等价。

九、（7分）求满足条件：$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的 X。

十、（15分）设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，$Z=X+Y$，求

(1) Z 的分布函数（写出两种形式）。

(2) 当 X，Y 相互独立时，Z 的概率密度（即卷积公式，写出两种形式）。

(3) 若已知 X，Y 互相独立，且概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0, \\ 0, & y\leqslant 0. \end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

非 电 类

一至六、八至十分别与电类一至六、七至九同。

七、（10 分）求 $y''-7y'+6y=\sin x$ 的通解

参 考 答 案

电 类

一、解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\operatorname{coa} x}=\lim\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\cos x}{x}}=1$

二、解：$F(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}x+b, & \text{当 } x<0 \text{ 时；}\\ 2x+2, & \text{当 } 0\leqslant x<1 \text{ 时；}\\ x+2+a, & \text{当 } x\geqslant 1 \text{ 时。}\end{cases}$

$F(x)$在区间$(-\infty,0)$，$(0,1)$，$(1,+\infty)$内都是x的一次函数，故$F(x)$在这些区间内都是连续的，而在$x=0$，$x=1$处有

$\lim\limits_{x\to 0-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(x+b)=b$；$\lim\limits_{x\to 0+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0+}(2x+2)=2$；$F(0)=2$

$\lim\limits_{x\to 1-}F(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(2x+2)=4$；$\lim\limits_{x\to 1+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(x+2+a)=3+a$；$F(1)=3+a$

因此，当$a=1$，$b=2$时，则

$$\lim_{x\to 0-}F(x)=\lim_{x\to 0+}F(x)=F(0)=2;\quad \lim_{x\to 1-}F(x)=\lim_{x\to 1+}F(x)=F(1)=4$$

所以，当$a=1$，$b=2$时，使得$F(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内连续

三、解：由$y=x^2$，$\therefore y'=2x$，因此，抛物线$y=x^2$上与直线$x-y-2=0$平行的切线只有一条，即过点$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$的切线。该点到直线$x-y-2=0$的距离是$y=x^2$与$x-y-2=0$之间的最短距离$d$，$d=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}-2\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{7}{4\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{8}$，此即所求。

四、解：设$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$，于是$u=\dfrac{1}{r}$。当$r^2\neq 0$时，亦即除点$(a,b,c)$外，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x-a}{r^3},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y-b}{r^3},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z-c}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{r^2-3(x-a)^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{r^2-3(y-b)^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{r^2-3(z-c)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3r^2-3[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]}{r^5}=0$$

五、解： $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}\left[\pi x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{2\pi}=0,$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{n}\sin nx-\frac{x}{n}\sin nx-\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{2\pi}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos nx+\frac{x}{n}\cos nx-\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\pi}{n}\right]=\frac{1}{n}$$

$f(x=\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$，当 $0<x<2\pi$

当 $x=0$，或 $x=2\pi$ 时， $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2}=0$。

六、解： $\left[x\int_1^x ydx\right]_x'=\left[(x+1)\int_1^x xydx\right]_x'$，

$$\int_1^x ydx+xy=\int_1^x xydx+(x+1)xy,$$

$$\left[\int_1^x ydx+xy\right]_x'=\left[\int_1^x xydx+(x^2+x)y\right]_x',$$

$$x^2y'=-3xy+y。$$

当 $x\neq0$，$y\neq0$ 时，有

$$\frac{y'}{y}=\frac{-3x+1}{x^2},$$

积分，而得

$$\ln|y|=-3\ln|x|-\frac{1}{x}+\ln|c|,$$

所以 $$|y|=|x|^{-3}\cdot e^{-\frac{1}{x}}\cdot|c|$$

当 $x\geqslant1$ 时，取 $c>0$，于是

$$y=cx^{-3}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

又因 $y(1)=1$，代入 $1=c\cdot e^{-1}$ $\therefore c=e$

$$y = e x^{-3} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = x^{-3} e^{1-\frac{1}{x}}$$

此即所求

七、**解**：将所给的二重积分，更换其积分顺序，于是

$$\int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy = \int_0^1 dy \int_0^y e^{-y^2} dx = \int_0^1 e^{-y^2} [x]_0^y dy$$

$$= \int_x^1 e^{-y^2} y dy = -\frac{1}{2} [y^{-y^2}]_0^1 = \frac{1}{2} [1 - e^{-1}]$$

八、**证**：设其两向量组分别为：

$$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s ; \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \cdots, \vec{\beta}_t$$

它们的秩都是 r，且 $\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，…，$\vec{\alpha}_s$ 可由 $\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，…，$\vec{\beta}_t$ 线性表示，于是向量组：

$$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \cdots, \vec{\beta}_t$$

与向量组：$\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，…，$\vec{\beta}_t$ 等价，故其秩也是 r，现取向量组：$\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，…，$\vec{\alpha}_s$ 的一个最大线性无关组：$\vec{\alpha}_{i_1}$，$\vec{\alpha}_{i_2}$，…，$\vec{\alpha}_{i_r}$，它也是向量组：

$$\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_s, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \cdots, \vec{\beta}_t$$

的一个最大线无关组，所以向量组：$\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，…，$\vec{\beta}_t$ 可由 $\vec{\alpha}_{i_1}$，$\vec{\alpha}_{i_2}$，…，$\vec{\alpha}_{i_r}$ 线性表示，因此，$\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，…，$\vec{\beta}_t$ 可由 $\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，…，$\vec{\alpha}_s$ 线性表示，所以向量组：$\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$，…，$\vec{\alpha}_s$ 与向量组：$\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，…，$\vec{\beta}_t$ 是等价。

九、**解**：$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$，

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -75 & 30 \\ 9 & 52 & -21 \\ 21 & 120 & -47 \end{pmatrix}$$

十、**解**：(1) $F_z(z) = P\{Z \leqslant z\} = \iint\limits_{x+y \leqslant z} f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y) dy \right] dx$

或 $\quad F_z(z) = \int_{-\infty}^{-\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y) dx \right] dy$

(2) X，Y 相互独立，故有 $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f_X(x) \cdot f_Y(y) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-y) \cdot f_Y(y) dy \right] du$$

$$\therefore \quad f_z(z) = F'_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) \cdot f_Y(y) dy$$

同理可得，
$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y f(z-x)dx$$

(3) 由(2)

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_z(x)\cdot f_y(z-x)dx=\int_0^z xe^{-x}(z-x)e^{-(z-x)}dx$$

$$=e^{-z}\int_0^z (zx-x^2)dx=\frac{z^3e^{-z}}{6} \qquad (z>0)$$

当 $z\leqslant 0$ 时，$f_z(z)=0$

$$f_z(z)=\begin{cases}0 & , z\leqslant 0; \\ \dfrac{z^3e^{-z}}{6}, & z>0.\end{cases}$$

非 电 类

七、解：$r^2-7r+6=1$，$r_1=1$，$r_2=6$，　$\overline{y}=c_1e^x+c_2e^{6x}$

由　$y''-7y'+6y=\sin x$

∴　$(D^2-7D+6)y=\sin x$，且 $D^2=-1$ 代入

$$y^*=\frac{\sin x}{D^2-7D+6}=\frac{\sin x}{5-7D}=\frac{-(7D+5)\sin x}{(7D-5)(7D+5)}=\frac{-(7D+5)\sin x}{49D^2-25}$$

$$=\frac{-(7\cos x+5\sin x)}{-49-25}=\frac{1}{74}(5\sin x+7\cos x)$$

故该方程的通解为

$$y=c_1e^x+c_2e^{6x}+\frac{1}{74}(5\sin x+7\cos x)$$

北 京 工 业 学 院

微积分与线性代数

一、(8 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}\,bt$

二、(10 分)

设 $f(t)$ 是三次可微函数且 $f''(t)\neq 0$，而

$$\begin{cases}x=f'(t)\\ y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$$

求 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$

三、(15 分)

若函数 $f(\xi,\eta)$ 具有连续的二阶偏导数且满足拉普拉斯 (Laplace) 方程：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0$$

证明：函数 $z = f(x^2 - y^2,\ 2xy)$ 也满足拉普拉斯（Laplace）方程，即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

四、（10 分）

更换二次积分的积分次序：

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\, dy$$

其中：$f(x,y)$是连续函数，常数 $a > 0$

五、（10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间$[a,\ b]$上连续，令

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

证明：函数 $\Phi(x)$ 在区间$[a,\ b]$上可微，且 $\Phi'(x) = f(x)$

六、（15 分）

设 $\underline{A}$为 $V_3 \to V_3$ 的线性变换；$\underline{A}$ 关于基底 ε_1，ε_2，ε_3 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(1) 求 $\underline{A}$ 对于基底 ε_3，ε_2，ε_1 的矩阵；

(2) 求 $\underline{A}$ 对于基底 ε_1，$k\varepsilon_2$，ε_3 的矩阵；

(3) 求 $\underline{A}$ 对于基底 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$，$\varepsilon_2$，$\varepsilon_3$ 的矩阵。

七、（10 分）

试证：

(1) 相似矩阵有相同的特征值；

(2) 正交向量组一定线性无关。

八、（8 分）

求一个不恒等于零的连续函数 $f(x)$，使它满足

$$f^2(x) = \int_0^x f(t)\, \frac{\sin t}{2 + \cos t}\, dt$$

九、（7 分）

设 $0 < x < 1$，求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}}$ 的和函数 $f(x)$

十、（7 分）

设 A 是一个 n 阶实对称矩阵，且$|A| < 0$

证明：存在实 n 维向量 X，使得 $X'AX < 0$

参 考 答 案

一、解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+\sin 2x)}=e^2$

其中两次用了洛比达法则。由最后的结果告，$t=0$ 不是$\int_0^x(1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}dt$ 的瑕点，所以所求的极限是"$\frac{0}{0}$"型，我们第一步用洛比达法则是可以的。

二、解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d[tf'(t)-f(t)]}{d[f'(t)]}=\dfrac{tf''(t)}{f''(t)}=t$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]=\frac{dt}{d[f'(t)]}=\frac{1}{f''(t)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]=\frac{d\left[\dfrac{1}{f''(t)}\right]}{d[f'(t)]}=-\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3}$$

三、证明：设 $\xi=x^2-y^2$，$\eta=2xy$

则 $\begin{cases} z'_x=f'_\xi\xi'_x+f'_\eta\eta'_x=2xf'_\xi+2yf'_\eta \\ z'_y=f'_\xi\xi'_y+f'_\eta\eta'_y=-2yf'_\xi+2xf'_\eta \end{cases}$

$$z''_{xx}=2f'_\xi+2x(f''_{\xi\xi}\xi'_x+f''_{\xi\eta}y'_x)+2y(f''_{\eta\xi}\xi'_x+f''_{\eta\eta}\eta'_x)$$

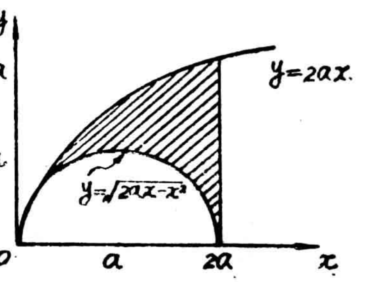
$$=2f'_\xi+4x^2f''_{\xi\xi}+4xyf''_{\xi\eta}+4xyf''_{\xi\eta}+4y^2f''_{\eta\eta}$$

$$z''_{yy}=-2f'_\xi-2y(f''_{\xi\xi}\xi'_y+f''_{\xi\eta}\eta'_y)+2x(f''_{\eta\xi}\xi''_y+f''_{\eta\eta}\eta'_y)$$

$$=-2f'_\xi+4y^2f''_{\xi\xi}-4xyf''_{\xi\eta}-4xyf''_{\eta\xi}+4x^2f''_{\eta\eta}$$

$$\therefore\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=4(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2f}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2f}{\partial\eta^2}\right)=0$$

四、解：所给的二次积分对应的二重积分的积分区域如图的阴影部分D，所以



$$\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)dx$$

$$=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{\mathrm{I}}f(x,y)dxdy+\iint\limits_{\mathrm{II}}f(x,y)dxdy+\iint\limits_{\mathrm{III}}f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)dx$$

$$+\int_a^{2a}dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)dx$$

五、设 $a<x<b$，$a<x+\Delta x<b$

则
$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$
$$=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt\xlongequal[\text{定\quad 理}]{\text{积分中值}}f(\zeta)\Delta x,$$

ζ 在 x 与 $x+\Delta x$ 之间

$\therefore$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\zeta)=f(x)$$

（上式最后一步用到 $f(x)$ 是连续函数与当 $\Delta x\to 0$ 时，$\zeta\to x$）即 $\Phi'(x)=f(x)$

六、解：1) $(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

$$C=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad C^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$\underline{A}$ 对于 ε_3，ε_2，ε_1 的矩阵 $B=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\times$

$$\times\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{13}&a_{12}&a_{11}\end{pmatrix}$$

2) $(\varepsilon_1,\ k\varepsilon_2,\ \varepsilon_3)=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，过渡矩阵

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad C^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1/k&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\underline{A}$ 对于 ε_1，$k\varepsilon_2$，ε_3 的矩阵 $B=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}a_{11}&ka_{12}&a_{13}\\a_{21}/k&a_{22}&a_{23}/k\\a_{31}&ka_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

3) $(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，过渡矩阵

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad C^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\underline{A}$ 对于 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\varepsilon_2$，$\varepsilon_3$ 的矩阵 $B=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13}\\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$

七、证：1） 书 $P.148$　　　2） 书 $P.128$

八、解：由于可导函数一定是连续函数，只要求出一个可导函数且满足题目中所给的条件就可以了。

设 $f(x)$ 可导且满足方程：

$$f^2(x)=\int_0^x f(t)\frac{\sin t}{2+\cos t}dt$$

对上式两端关于 x 求导得

$$2f(x)f'(x)=f(x)\frac{\sin t}{2+\cos x}$$

∵ $$f(x)\neq 0$$

∴ $$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{2+\cos x}\qquad \text{且 } f(0)=0$$

于是 $$f(x)=\frac{1}{2}\int\frac{\sin x}{2+\cos x}dx=-\frac{1}{2}\ln(2+\cos x)+C$$

由 $f(0)=0$ 得 $C=\frac{1}{2}\ln 3$

∴ $$f(x)=-\frac{1}{2}\ln(2+\cos x)+\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2+\cos x}$$

即为所求

九、解：由于 $\dfrac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}=\dfrac{1}{x-x^{2^n}}-\dfrac{1}{1-x^{2^{n+1}}}$

∴ $$\sum_{n=0}^{N}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{1-x^{2^n}}-\frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}\right)$$

$$=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^{N+1}}}$$

又 $0<x<1$

∴ $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^{N+1}}}\right)=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}$$

十、证：因为 A 是 n 阶实对称矩阵，且 $|A|<0$，故二次型

$f(x_1\cdots\cdots,\ x_n)=X'AX$ 的秩为 n，且不是正定的，故负惯性指数至少是 1，从而 f 可经

非奇异线性变换 $X=CY$，化成

$$f=X'AX=Y'C'ACY=y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2+\cdots+y_n^2 \qquad (1)$$

其中 $1\leqslant s<n$，当 $y_n=1$，其余 $y_i=0$ 时，上式右端小于零，但由 $X=CY$ 所确定的解向量 $X\neq 0$，使（1）式左右两端相等，即有实 n 维向量 X，使 $X'AX<0$

北京化工学院

一、（每小题5分）求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x^2}}{x}\int_0^x x^2e^{x^2}dx$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{3^{-\csc x}+2x}{\sin x}$

二、（每小题5分）计算下列积分：

（1）$\int \sec x\operatorname{tg}^5 x dx$；

（2）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\dfrac{\sin x}{x^3+1}+\sqrt{\ln^2(1-x)}\right]dx$

三、（本题8分）

当 a、c 取何值时，能使曲线 $y=a(x-1)(x-3)(x-c)$ 在 $[1, 3]$ 上与两条半直线 $y=x-1$ $(-\infty<x<1)$ 及 $y=3(x-3)$ $(3<x<+\infty)$ 光滑地连接起来（光滑即切线的斜率连续）

四、（本题8分）

设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导，且对任意实数 a，b 均满足 $f(a+b)=e^af(b)+e^bf(a)$，又已知 $f'(0)=e$。试求 $f'(x)$ 与 $f(x)$。

五、（本题8分）

试求曲面 $x^2+y^2+z^2-xy-3=0$ 上同时垂直于平面 $z=0$ 与 $x+y+1=0$ 的切平面方程

六、（本题8分）

设 $z=f[x\varphi(y), x-y]$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，φ 具有二阶导数，试求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$。

七、（本题8分）

试求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ 的和函数，并计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4(n+1)(n+2)2^n}$

八、（本题8分）

求解 $(x+1)y''+xy'=0$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$

九、（本题8分）

设一形体 Ω 由曲面 $z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成，其上任一点处的密度是该点到 z 轴的距离，试求 Ω 的质量。

十、（本题 8 分）

试将线积分$\int_l f(|x|, |y|)dy$表示成定积分，其中l是以$A(1,2)$，$B(1, -1)$及$C(2,0)$为顶点的三角形。

十一、（本题 8 分）

求线性方程组

$$\begin{cases}(\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda\\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=\lambda\\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3\end{cases}$$

有无穷多组解，唯一解及无解时λ所取的值。

十二、（本题 8 分）

试写出满足条件$A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$的一切二阶矩阵$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$。

参 考 答 案

一、解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-x^2}}{x}\int_0^x t^2e^{t^2}dt=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x t^2e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2e^{x^2}}{e^{x^2}(1+2x^2)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{4x}=\frac{1}{2}$$

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to0+}\frac{\csc x}{3\csc x}+\lim\limits_{x\to0+}\frac{2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0+}\frac{-\csc x\operatorname{ctg}x}{-\csc x\operatorname{ctg}x3^{\csc x}\ln3}+2=2$

二、解 (1) 原式$=\int\operatorname{tg}^4xd\sec x=\int(\sec^2x-1)d\sec x=\frac{\sec^5x}{5}-\frac{2}{3}\sec^3x+\sec x+c$

(2) 原式$=0+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\ln^2(1-x)}\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\ln(1-x)|dx$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln(1-x)dx-\int_0^{\frac{1}{2}}\ln(1-x)dx$$

$$=\Big[x\ln(1-x)-x-\ln(1-x)\Big]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\Big[x\ln(1-x)-x-\ln(1-x)\Big]_{\frac{1}{2}}^{0}$$

$$=\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$$

三、解 $y'=a[(x-3)(x-c)+(x-1)(x-c)+(x-1)(x-3)]$

$=a[3x^2-2(4-c)x+4c+3]$

$$\left.\begin{array}{l}y'|_{x=1}=a(x-3)(x-c)|_{x=1}=2a(c-1)\\ y'|_{x=3}=a(x-1)(x-c)|_{x=3}=2a(3-c)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2a(c-1)=1\\ 2a(3-c)=3\end{array}\right\}\Rightarrow a=1,$$

$c=\frac{3}{2}$

四、解Ⅰ　$f(a+b)=e^a f(b)+e^b f(a)$，　固定 a 对 b 求导（或固定 b 对 a 求导）

$f'(a+b)=e^a f'(b)+e^b f(a)$，当 $b=0$，$f'(0)=e$

∴　$f'(a)=e^{a+1}+f(a)$　（对任意 a 成立）

即　$f'(x)=e^{x+1}+f(x)$　为 $y'-y=e^{x+1}$

∴　$y=e^{\int dx}\left[\int e^{x+1}e^{-\int dx}dx+c\right]=e^x[ex+c]=xe^{x+1}+ce^x$

由 $f'(x)=e^{x+1}+f(x)$ 知当 $x=0$ 时，有 $f'(0)=e+f(0)$，∴$f(0)=0$

故 $c=0$，∴$f(x)=xe^{x+1}$，从而 $f'(x)=e^{x+1}(x+1)$

解Ⅱ　$\dfrac{f(a+b)-f(a)}{b}=\dfrac{e^a f(b)+e^b f(a)-f(a)}{b}=\dfrac{e^a f(b)}{b}+f(a)\dfrac{e^b-1}{b}$

当 $b\to0$ 时取极限得 $f'(a)=e^a f'(0)+f(a)$，但 $f'(0)=e$

∴　$f'(a)=e^{a+1}+f(a)$，对任意实数 a 成立。

即　$f'(x)=e^{x+1}+f(x)$，以下解法同Ⅰ。

五、解　$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\{-1,1,0\}$，

$$\left.\begin{cases}2x-y=-t\\ 2y-x=t\\ 2z=0\end{cases}\right\}\Rightarrow x=-\frac{t}{3},\quad y=\frac{t}{3}$$

$$z=0$$

代入原曲面方程得 $t^2=9\Rightarrow t=\pm3$

∴切点为（−1，1，0），（1，−1，0）

∴所求切平面方程：

$-(x+1)+(y-1)=0$　即　$y-x-2=0$

$-(x-1)+(y+1)=0$　即　$y-x+2=0$

六、解　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'x\varphi'(y)-f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\varphi'[xf_{11}''\varphi+xf_{12}''+f_1']-[f_{21}''\varphi+f_{22}'']$$

$$=f_{11}''x\varphi'\varphi+f_{12}''(x\varphi'-\varphi)-f_{22}''+f_1'\varphi'$$

七、解　$\because\left[\dfrac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\right]''=x^n$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x}$　$(|x|<1)$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)dx=\int_0^x\frac{x}{1-x}dx=-x-\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+1}\right)dx=-\int_0^x[x+\ln(1-x)]dx\quad(|x|<1)$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2} + x\ln(1-x) - x - \ln(1-x)\right]$$

$$= x + \ln(1-x) - \frac{x^2}{2} + x\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4(n+1)(n+2)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\ln 2$$

八、解　设 $y' = P$，$\frac{dP}{dx} = -\frac{x}{x+1}P$，$\frac{dP}{P} = -\frac{x}{x+1}dx$

$\ln P = -x + \ln(1+x) + c_1$　　$P|_{x=0} = 1$　$\therefore c_1 = 1$，　$P = (1+x)e^{-x}$

$\therefore$　$y = \int(1+x)e^{-x}dx + c_2$

$y = -(x+2)e^{-x} + c_2$　$\because$ $y|_{x=0} = 0$　$\therefore$ $c_2 = 2$，　$y = 2 - (x+2)e^{-x}$

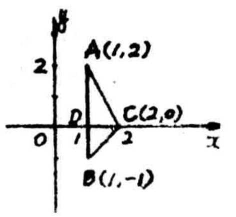
九、解　$6 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$　$x^2 + y^2 = 4$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = r \qquad \Omega:\begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 2 \\ r \leqslant z \leqslant 6 - r^2 \end{cases}$$

$$\therefore\ M = \iiint_{\Omega} r\,dv = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2 dr\int_r^{6-r^2}dz = 2\pi\int_0^2 r^2(6-r^2-r)dr$$

$$= 2\pi\int_0^2\left[6r^2 - r^4 - r^3\right]dr = 2\pi\left[12 - \frac{32}{5}\right] = \frac{56\pi}{5} \doteq 11.2\pi$$

十、解　$\int_l f(|x|, |y|)dy = \int_{AD} + \int_{DB} + \int_{BC} + \int_{CA}$



$\int_{AD} = \int_2^0 f(1, y)dy$，$\int_{DB} = \int_0^{-1} f(1, -y)dy$

而　BC：$y = x - 2$，　　CA：$y = 4 - 2x$

$\int_{BC} = \int_{-1}^{0} f(y+2, -y)dy$，（或 $\int_1^2 f(x, 2-x)dx$）

$\int_{CA} = \int_0^2 f\left(2 - \frac{y}{2}, y\right)dy$（或 $-2\int_2^1 f(x, 4-2x)dx$）

十一、解　$|A| = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda-1)$

1° 当 $\lambda \neq 0$，1 时，有 $|A| \neq 0$，且增广矩阵 B 的秩也为 3，故方程组有唯一解。

2° 当 $\lambda = 0$ 时，A 的秩为 2，但 B 的秩为 3，故方程组无解。

3° 当 $\lambda = 1$ 时，A，B 秩皆为 2，故方程组有无穷多组解。