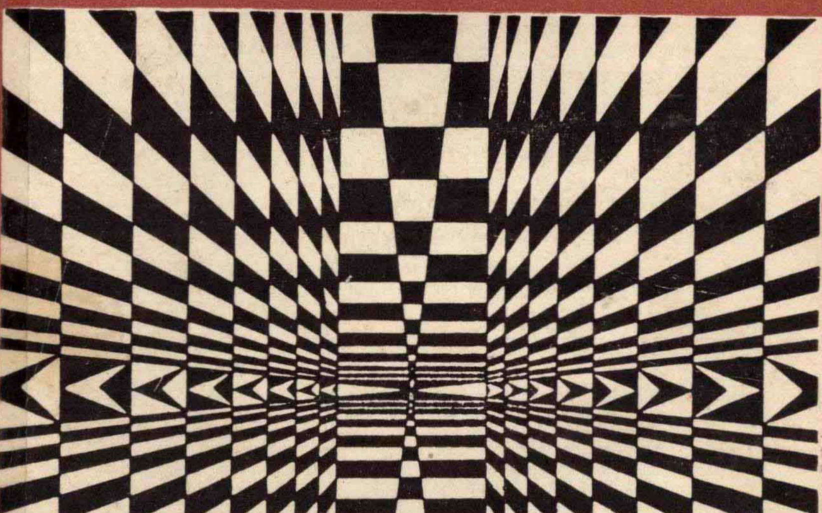
成人中专试用教材

数学 第二册

安徽省职工电视中等专业学校编 李祥伦主编

高等教育出版社



CHENGREN ZHONGZHUAN SHIYONG JIAOCAI

成人中专试用教材

数　　学

第二册

安徽省职工电视中等专业学校编
李祥伦　主编

高等教育出版社

成人中专试用教材

数　学

第 二 册

安徽省职工电视中等专业学校编

李祥伦　主编

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

商务印书馆上海印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 5.5　字数 111,000

1987 年 5 月第 1 版　1987 年 5 月第 1 次印刷

印数 0,001—82,000

书号 13010·01395　　定价 0.73 元

出 版 说 明

近几年来，成人中等教育事业发展很快，广播电视中专、职工中专、函授中专等象雨后春笋般地建立起来，并继续发展壮大. 为了保证成人中专的办学质量，满足各类成人中专对教材的要求，国家教育委员会成人教育司和高等教育出版社组织编写了成人中专系列教材，由我社出版发行.

成人中专普通课教材两门：语文、数学（文、工科通用）. 财经类系列教材二十二门：中国经济法制学（暂定）、国民经济计划学概论、计算机基础及其应用、财经计算技术、数理统计、会计原理、统计学原理、工业企业管理基础知识、商业企业管理基础知识、工业统计、商业统计、工业会计、商业会计、工业企业财务管理、商业企业财务管理、工业企业管理、商业企业经营管理、工业企业经济活动分析、商业企业经济活动分析、财政与信贷、市场学、商业物价等. 供会计（工业、商业）、统计（工业、商业）和企业管理（工业、商业）等三个专业选用.

本系列教材在编写时，力求突出成人教育的特点，教材内容以实例引路，深入浅出，应用为主，并注意必要的内容更新，在深浅度上，相当于全日制中等专业学校同类教材的水平，适合初中毕业程度的成人学习. 在编排格式上考虑到便于自学的要求，在序言中有学习方法指导或学时安排的内容，每章的前面有本章学习指导或内容提要，每章末有本章小结，并附有思考题和练习题.

为了保证教材质量，我们在全国各地遴选有丰富教学经验的教师担任编写工作，每本教材在定稿前都召开了编写提纲讨论会和审稿会，请全国各地的专家和有丰富教学经验的教师参加审定。在此我们向为这套教材做出贡献的同志表示衷心地感谢。

本系列教材自一九八六年秋季起陆续出版，三年内出齐，并陆续配套出版各门课程的学习辅导书，欢迎广大读者选用并提出宝贵意见。

前　言

本套《数学》教材是由国家教育委员会成人教育司和高等教育出版社共同组织编写的成人中专通用教材之一．全书分为六册：基础数学(共三册)，微积分初步，线性代数与线性规划，概率与统计初步．安徽省经委、省职教委和省教委直接领导了本套教材的编审工作．

为了保证教材内容达到成人中专的基本要求，并使教学方法融汇于教材内容之中，便于成人自学，我们在编写过程中，作了以下几个方面的努力：

1．注意从实例引入概念，并以典型例题来巩固和验证所学理论；普遍采取解题前作指导性的思路分析，解题后作归纳性的方法注释，重要内容都作辅导性总结；每章之前给出了简要说明，使读者对这一章的内容和基本要求有一个初步了解；每章之后加以小结，使读者温故而知新；每段后附有练习题，每章后附有复习题，书末附有答案或提示．这样，读者在学习时，就象有一个无声的教师在进行辅导，帮助读者理解和巩固所学知识．

2．着力于教材内容的削枝强干，贯彻少而精原则，不贪多求全，不攀高求深，文字叙述力求通俗，普遍地注意到以成人易于接受和记忆的方式叙述一些重要结论．由于数学本身内容十分丰富，这样处理教材还是一种尝试，有待进一步提高．

3．各部分基本内容，力求讲明它们的应用，并为读者应用所学知识解决实际问题提供思路、模型和方法．因此，我们尽可能在不增大篇幅的前提下，兼顾了一般工科和财经类的一些最基本的应用问题．

4．书中带有*号的内容和习题供工科各专业使用，财经类各专业学有余力的读者也可选用．

本套教材由安徽省职工电视中专李祥伦担任主编，聘请合肥工业大学潘麟生、周传瑞和安徽财贸学院陈永庆编写．

基础数学：第一、二章由潘麟生、李祥伦执笔；第三章由李祥伦、陈永庆执笔；第四章由周传瑞执笔；第五章由陈永庆、李祥伦执笔；第六、七章由李祥伦、陈永庆执笔．

微积分初步：由周传瑞、潘麟生、李祥伦执笔．

线性代数与线性规划：由陈永庆、李祥伦执笔．

概率与统计初步：由潘麟生、周传瑞执笔．

本套教材由安徽省数学会副理事长、合肥工业大学教授张智珊主审，朱功勤教授、卢树铭副教授审稿，并邀请励金华、梁克庸和任必等同志参加了基础数学一、二册的审稿会．对于他们所提宝贵意见，我们表示衷心感谢．并感谢薛凌同志为本教材绘制了全部插图．

由于编者水平有限，时间紧迫，错误和不妥之处在所难免，恳请广大教师和读者批评指正．

编者

1986年6月于合肥

目　　录

第四章　数列，排列与组合

本章介绍数列，排列与组合，数学归纳法和二项式定理等内容.

通过学习，要求理解数列、排列与组合的概念，了解这些概念的实际意义；掌握等差数列、等比数列、排列数和组合数的有关计算公式；会解有关的简单应用题. 对于二项式定理和数学归纳法，只要求读者会利用有关公式和方法对一些简单问题进行计算和证明.

本章重点是等差数列与等比数列，排列与组合及其计算公式.

§4.1　数　　列

一　数列的概念

数列对我们来说，并不生疏，不论在工农业生产或在经济管理中，都能经常遇到. 例如

(1) 某电视机厂上月库存电视机 50 台，该厂的日产量为 500 台，从本月开始，若库存量以每天 500 台速度增加，则逐天库存量为：

$$550,\ 1050,\ 1550,\ 2050,\ 2550,\ \cdots \qquad (4.1)$$

直到下次发货日期为止.

(2) 某车间把所生产的圆形钢管堆放成图 4-1 的形状，最上面一层是 5 根，往下每层多一根，共有八层，各层钢管的

根数依次是:

$$5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. \tag{4.2}$$

(3) 把自然数从1起依次排列起来,得到一列数:

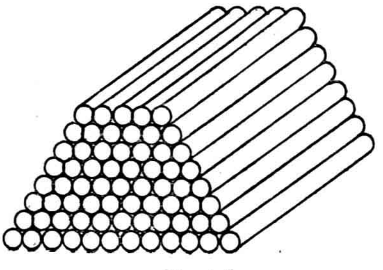


图 4-1

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots. \tag{4.3}$$

(4) 把自然数的倒数依次排列起来,得到一列数:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots. \tag{4.4}$$

(5) 把正偶数依次排列起来,得到一列数:

$$2, 4, 6, 8, \cdots. \tag{4.5}$$

(6) 把正奇数依次排列起来,得到一列数:

$$1, 3, 5, 7, \cdots. \tag{4.6}$$

(7) 把2的正整数次方的倒数依次排列起来,得到一列数:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots. \tag{4.7}$$

(8) 把正偶数减去它前面的奇数的差依次排列起来,得到一列数:

$$1, 1, 1, 1, \cdots. \tag{4.8}$$

按照某种规则排列的一列数叫做**数列**. 以上各例中的一列数都是按一定规则排列的,因而都是数列. 数列里的每一个数叫做这个数列的一**项**. 各项依次叫做第1项(首项),第2项,…,第 n 项,…. 数列的第 n 项,叫做**通项**,用 a_n 表

示(n为自然数). 如果a_n和项数n之间的关系可以用一个公式表示，那么，这个公式就叫做这个数列的**通项公式**. 例如，数列(4.3)称为自然数列. 它的通项公式是$a_n=n$，正偶数列(4.5)的通项公式是$a_n=2n$，数列(4.4)的通项公式是$a_n=\frac{1}{n}$等等.

知道了一个数列的通项公式，依次用自然数1，2，3，…代入就可求出这个数列的任意一项. 例如，偶数列的第100项是$a_{100}=200$等.

数列的一般形式是

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

简记作$\{a_n\}$. 例如，数列(4.3)，(4.4)，(4.5)，(4.6)，(4.7)，(4.8)依次可简记作$\{n\}$，$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，$\{2n\}$，$\{2n-1\}$，$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，$\{2n-(2n-1)\}$.

例1 已知数列的通项公式是

$$a_n=\frac{n}{n+2},$$

求这个数列.

解 依次用$n=1, 2, 3, \cdots$代入通项公式得

$$a_1=\frac{1}{3},\ a_2=\frac{2}{4},\ a_3=\frac{3}{5},\ \cdots.$$

所以这个数列是

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{5},\ \cdots,\ \frac{n}{n+2},\ \cdots. \qquad (4.9)$$

例2 已知数列的通项公式是

$$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

求这个数列.

解 依次用 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$ 代入通项公式，得

$$a_1=-\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{4},\ a_3=-\frac{1}{8},\ a_4=\frac{1}{16},\ \cdots,$$

所以这个数列是

$$-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n,\ \cdots. \tag{4.10}$$

在许多实际问题中，有时需要根据所给数列开头的几项，求出它的通项公式.

例 3 求数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) $4, 8, 12, 16$; (2) $1\times2, 2\times3, 3\times4, 4\times5$;

(3) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$.

分析 已知数列的前几项，求其通项时，在简单的情形下，多采用观察法来实现. 可从两个方面进行：第一，看各项与所在项的项数有何关系；第二，看相邻项之间有何关系.

解 (1) 数列的前 4 项 $4, 8, 12, 16$ 都是项数的 4 倍，所以通项公式是

$$a_n=4n.$$

另一解法：这四项中，从第 2 项起，后项都是前项加 4 而得到，

$$a_2=4+a_1=4+4\times1,\qquad a_3=4+a_2=4+4\times2,$$

$$a_4=4+a_3=4+4\times3,\ \cdots,$$

所以通项公式是

$$a_n=4+4(n-1).$$

(2) 数列的前 4 项都等于项数与项数加 1 的乘积，所以通项公式是

$$a_n=n(n+1).$$

(3) 数列的前 4 项的绝对值各自等于一个分数，分母等于项数，分子是1，且奇数项为正，偶数项为负，所以通项公式是

$$a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

注 (1) 并不是所有的数列都有通项公式，如质数数列 2，3，5，7，… 就没有通项公式.

(2) 已知数列前几项，求得的通项公式并不是唯一的. 如例 3 的 (1) 所示.

从上面各数列，可以看出它们分别具有如下不同的特点：

(1) 从项数上来看，数列(4.1)，(4.2)只有有限项，而其它的数列都有无穷多个项. 我们把项数有限的数列叫做**有穷数列**；项数无穷的数列叫做**无穷数列**.

(2) 从相邻两项的值的大小来看，如果从数列的第 2 项起，每一项都大于它前面的一项(即 $a_{n+1}>a_n$)，那么这个数列就叫做**递增数列**；如果从第 2 项起，每一项都小于它前面的一项(即 $a_{n+1}<a_n$)，那么这个数列就叫做**递减数列**. 例如，数列(4.1)，(4.2)，(4.3)，(4.5)，(4.6)，(4.9)是递增数列，而(4.4)，(4.7)是递减数列.

但是，数列(4.8)和(4.10)却具有另一个特点. (4.10)从第 2 项起，有些项大于它的前一项，有些项却小于它的前一项，我们把这种数列叫做**摆动数列**. (4.8)的每一项都相等，我们把这种数列叫做**常数列**.

(3) 从各项的绝对值来看，如果数列的任何一项的绝对值都小于某一个正数，即 $|a_n|<M$，$M>0$，这个数列就叫做**有界数列**. 例如，数列(4.2)各项的绝对值最大是 12，显然有 $|a_n|<13$，所以(4.2)是有界数列. 同样(4.1)，(4.4)，(4.7)，(4.8)，(4.9)也是有界数列.

如果不存在一个正数 M 使 $|a_n|<M$ 成立，这个数列就叫做**无界数列**. 例如，数列(4.3)，(4.5)，(4.6)都是无界数列.

练 习 题 1

1. 按照下面各数列的通项公式，分别写出每个数列的前 5 项：

   (1) $a_n=3n$；　(2) $a_n=n^2$；　(3) $a_n=(-1)^{n+1}$；

   (4) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$；　(5) $a_n=(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n}$；　(6) $a_n=\dfrac{2n+1}{n^2+1}$.

2. 根据下面数列的通项公式，分别写出每个数列的第 10 项：

   (1) $a_n=n(n+2)$；　(2) $a_n=(-1)^n n$；

   (3) $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{n}$；　(4) $a_n=\dfrac{2n}{3^n}$.

3. 分别写出下面各数列的一个通项公式：

   (1) $\dfrac{2}{1}$，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{5}{4}$，…；

   (2) $\dfrac{1}{1\cdot 2}$，$\dfrac{1}{2\cdot 3}$，$\dfrac{1}{3\cdot 4}$，$\dfrac{1}{4\cdot 5}$，…；

   (3) $\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{9}{10}$，$-\dfrac{16}{17}$，….

二　等差数列

前面提到的某车间将所生产的钢管堆成 8 层，各层钢管的根数由上而下依次排列得一数列

$$5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.$$

这个数列的特点是后项减去前项的差都等于1．又如偶数数列

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 2n,\ \cdots,$$

其后项减去前项的差都是2．

一般地，如果一个数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

从第2项起，每一项与它前一项的差都等于某一个常数，即

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=\cdots=d,$$

那么，这个数列叫做**等差数列**．这个常数(通常用字母d表示)叫做等差数列的**公差**．

如果等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，那么

$$a_2=a_1+d,$$

$$a_3=a_2+d=a_1+2d,$$

$$a_4=a_3+d=a_1+3d,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

由此可得等差数列的通项公式为

$$\boxed{\boldsymbol{a_n=a_1+(n-1)d}.} \tag{4.11}$$

这个通项公式给出了等差数列的a_1，a_n，d和n之间的关系，知道其中的三个，就可以求出另一个．

例1 已知等差数列的首项是-1，第2项是2，求第5项．

分析 要求第5项，必须求出d，而$a_1=-1$，$n=5$．公差d可由第2项减首项得到．

解 因为$d=a_2-a_1=2-(-1)=3$，由等差数列的通项

公式得

$$a_5=(-1)+(5-1)\times3=11.$$

所以第 5 项是 11.

例 2 已知等差数列的第 3 项是 -4，第 6 项是 2，求第 10 项.

分析 要求第 10 项，必须求出 a_1 和 d，而 $n=10$. 利用题设 $a_3=-4$ 和 $a_6=2$，分别代入通项公式 (4.11) 得 a_1 和 d 的方程组，可求得 a_1 和 d，从而可得 a_{10}.

解 由通项公式(4.11)，得

$$\begin{cases}a_3=a_1+2d,\\ a_6=a_1+5d.\end{cases}\quad 即 \quad \begin{cases}a_1+2d=-4,\\ a_1+5d=2.\end{cases}$$

解此方程组，得 $a_1=-8$，$d=2$.

则 $$a_{10}=-8+(10-1)\times2=10.$$

所以第 10 项是 10.

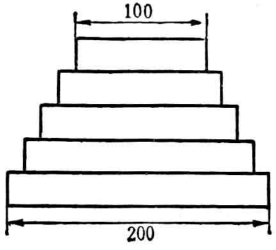


图 4-2

例 3 一个塔轮上有五个皮带轮，它们的直径成等差数列. 已知最小的皮带轮直径是 100 毫米，最大的皮带轮直径是 200 毫米，求中间三个皮带轮的直径(图 4-2).

分析 依题意，数列共有 5 项，已知首项和末项，可先求出公差，再求中间三项.

解 设 $a_1=100$，$a_5=200$，

由通项公式(4.11)，得

$$a_5=a_1+4d,$$

于是 $$d=\frac{a_5-a_1}{4}=\frac{200-100}{4}=25,$$

所以 $$a_2=a_1+d=100+25=125\text{(毫米)},$$

$$a_3=a_1+2d=100+25\times 2=150\text{(毫米)},$$

$$a_4=a_1+3d=100+25\times 3=175\text{(毫米)}.$$

答：中间三个皮带轮的直径依次是125毫米，150毫米，和175毫米.

下面讨论等差数列的求和问题.

先计算形状如图4-1所示的一堆钢管总数，这个问题就是求下面8个数：5，6，7，8，9，10，11，12的和，易求得共有68根．但是，当加数很多时，加起来就很麻烦. 为此，我们设想在这堆钢管的旁边倒放着同样一堆钢管，如图4-3所示．这样，每层的钢管数都相等：

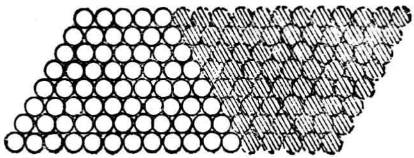


图 4-3

$$5+12=6+11=7+10=8+9=9+8$$
$$=10+7=11+6=12+5,$$

于是两堆钢管总数是$(5+12)\times 8=136$(根)，将这个数字除以2，即得所求钢管总数是

$$\frac{(5+12)\times 8}{2}=68\text{(根)}.$$

一般地，设等差数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$