普通高等教育“十一五”国家级规划教材

复变函数与积分变换

第3版

杨巧林 主编

孙福树
刘 锋 副主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材
普通高等工科院校基础课规划教材

复变函数与积分变换

第3版

主　编　杨巧林
副主编　孙福树　刘　锋
参　编　刘玉荣
主　审　管　平　刘金林

机械工业出版社

本书是普通高等工科院校基础课规划教材之一，内容包括高等教育工科各专业所需要的复变函数和积分变换的基础知识.主要有复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、保角映射、傅里叶变换和拉普拉斯变换等.每章末附有小结和自测题，以便于读者自学时能够抓住重点和检查自己对本章学习的基本情况.书末附有习题答案和参考书目.

本书在编写过程中力求做到条理清楚、重点突出，注重解题方法的训练和思维能力的培养.本书可以作为高等教育工科各专业该课程的教材，亦可作为其他专业学习这门课程的教学参考书.本书使用学时建议为48～64学时.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/杨巧林主编.—3版.—北京：机械工业出版社，2013.8

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-111-43084-1

Ⅰ.①复…　Ⅱ.①杨…　Ⅲ.①复变函数—高等学校—教材②积分变换—高等学校—教材　Ⅳ.①O174.5②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第144080号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)

策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　汤　嘉

责任校对：樊钟英　封面设计：鞠　杨　责任印制：杨　曦

北京云浩印刷有限责任公司印刷

2013年8月第3版第1次印刷

184mm×240mm·17.5印张·343千字

标准书号：ISBN 978-7-111-43084-1

定价：37.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：(010)88361066
销售一部：(010)68326294
销售二部：(010)88379649
读者购书热线：(010)88379203

网络服务
教材网：http://www.cmpedu.com
机工官网：http://www.cmpbook.com
机工官博：http://weibo.com/cmp1952

普通高等工科院校基础课规划教材

编审委员会

序

人类已经满怀激情地跨入了充满机遇与挑战的21世纪.这个世纪要求高等教育培养的人才必须具有高尚的思想道德,明确的历史责任感和社会使命感,较强的创新精神、创新能力和实践能力,宽广的知识面和扎实的基础.基础知识水平的高低直接影响到人才的素质及能力,关系到我国未来科学、技术的发展水平及在世界上的竞争力.由于基础学科本身的特点,以及某些短期功利思想的影响,不少人对大学基础教育的认识相当偏颇,我们有必要在历史的回眸中借前车之鉴,在未来的展望中创革新之路.我们必须认真转变教育思想,坚持以邓小平同志提出的“三个面向”和江泽民同志提出的“三个代表”为指导,以培养新世纪高素质人才为宗旨,以提高人才培养质量为主线,以转变教育思想观念为先导,以深化教学改革为动力,以全面推进素质教育和改革人才培养模式为重点,以构建新的教学内容和课程体系、加大教学方法和手段改革为核心,努力培养素质高、应用能力与实践能力强、富有创新精神和特色的应用性的复合型人才.

基于上述考虑,中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅(原江苏省教委)和江苏省及省外部分高等工科院校成立了教材编审委员会,组织编写了大学基础课程系列教材.

这套教材力求具有以下特点:

(1)科学定位.本套教材主要用于应用性本科人才的培养.

(2)综合考虑、整体优化,体现“适、宽、精、新、用”.所谓“适”,就是要深浅适度;所谓“宽”,就是要拓宽知识面;所谓“精”,就是要少而精;所谓“新”,就是要跟踪应用学科前沿,推陈出新,反映时代要求;所谓“用”,就是要理论联系实际,学以致用.

(3)强调特色.就是要体现一般工科院校的特点,符合一般工科院校基础课教学的实际要求.

(4)以学生为本.本套教材应尽量体现以学生为本,以学生为中心的教育思想,不为教而教.注重培养学生自学的能力和扩展、发展知识的能力,为学生今后持续创造性的学习打好基础.

尽管本套教材设想以新思想、新体系、新面孔出现在读者面前,但由于是

一种新的探索，难免有这样那样的缺点甚至错误，敬请广大读者不吝指教，以便再版时修正和完善.

本套教材的编写和出版得到了中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅以及各主审、主编和参编学校的大力支持与配合，在此，一并表示衷心感谢.

普通高等工科院校基础课规划教材编审委员会

主任　殷翔文

第3版前言

本教材第2版入选了普通高等教育“十一五”国家级规划教材，自2007年1月出版以来已经历了6个年头，期间许多专家和读者给我们提出了不少合理的建议和不足之处，我们几位参编人员都认真做了准备，力求在修订本教材过程中考虑和参考这些意见.

本教材第3版在具体内容编写上，仍力求保持内容由浅入深，语言通俗易懂的风格，保持第2版中概念形式、理论衔接、知识应用的连续一致性. 既遵照教育部制定的对复变函数课程教学大纲的基本要求，又结合普通高等教育相关专业教学改革的实际情况，尽可能让教师在课时有限的情况下完成本课程的教学任务，为后续课程奠定必要的数学基础. 同时让学习者不感觉到复变函数的“复杂”和难学，潜移默化地培养他们的数学爱好和创新意识. 本次修订过程中，我们对于一些数学符号进行了统一规范，对于习题和答案进行了审核，改正了个别错误.

参加第3版修订工作的有孙福树、刘锋、杨巧林、刘玉荣，由杨巧林任主编，孙福树、刘锋任副主编. 东南大学管平教授、扬州大学刘金林教授担任主审工作. 福州大学王传荣教授、扬州大学韩阳老师对本书的修订提出了许多宝贵的建议，在此，全体编者对所有关心本书修订的专家一并表示衷心的感谢. 本书的出版得到扬州大学教材出版基金的资助.

由于编者水平有限，书中一定还存在不少缺点和不足，敬请读者批评指正.

编　者

2013年6月

目　录

第1章

复数与复变函数

复变函数研究的对象是复数变量之间的函数关系. 关于复数，虽然在中学代数中已有论述，但不够系统. 为了今后讨论问题方便，这里我们先介绍复数的概念、性质及其四则运算，然后再进一步介绍复变函数以及复变函数的极限和连续的概念.

1.1 复数的概念与运算

1.1.1 复数的概念

由于解代数方程的需要，在16世纪中叶，意大利数学家卡丹(Cardan)把复数引进了数学领域. 18世纪时，数学家欧拉(Euler)首先引入记号i，以后复数研究有了迅速的发展，数学研究从实数领域扩展到复数领域.

二次方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内显然无根，想象有一个新的数i满足 $x^2+1=0$，这个数i称为**虚数单位**，并有 $\mathrm{i}^2=-1$，或记为 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 这样，方程 $x^2+1=0$ 也就有两个根i和 $-\mathrm{i}$.

我们把形如 $x+\mathrm{i}y$ 的数称为复数，记为

$$z=x+\mathrm{i}y.$$

其中 x 和 y 是任意实数，分别称为 z 的实部与虚部，分别记为

$$x=\mathrm{Re}(z),\ y=\mathrm{Im}(z).$$

当 $x=0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 称为**纯虚数**；当 $y=0$ 时，$z=x$ 是实数；当 $x=y=0$ 时，$z=0+0\mathrm{i}=0$ 既是纯虚数，又是实数.

全体复数组成的集合称为复数集，记作 **C**，即

$$\mathbf{C}=\{x+\mathrm{i}y \mid x,\ y\in\mathbf{R}\}.$$

此处 **R** 表示全体实数构成的集合(实数集).

对于两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，当且仅当 $x_1=x_2$，且 $y_1=y_2$ 时，才称 z_1 和 z_2 相等，记为 $z_1=z_2$.

要注意的是，两个实数可以比较大小，因而实数是有序的. 而两个复数不能比较大小，因而是无序的.

1.1.2 复数的代数运算

由于实数是复数的特例，因此在规定复数的运算时，必须注意到复数的代数运算应该满足实数代数运算的一些基本要求.

1. 复数的加(减)法

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的和(差)作如下规定：

$$z_1\pm z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2), \tag{1-1}$$

即复数相加(减)就是将它们的实部和虚部分别相加(减).

不难验证复数的加法满足：

$$z_1+z_2=z_2+z_1 \quad (交换律),$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3) \quad (结合律).$$

【例 1-1】 计算(1) $(4+\mathrm{i})+(-2+3\mathrm{i})$；(2) $(3-\mathrm{i})-(5+2\mathrm{i})$.

解 (1) $(4+\mathrm{i})+(-2+3\mathrm{i})=(4-2)+(1+3)\mathrm{i}=2+4\mathrm{i}$；

(2) $(3-\mathrm{i})-(5+2\mathrm{i})=(3-5)+(-1-2)\mathrm{i}=-2-3\mathrm{i}$.

2. 复数的乘法

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的乘积规定为

$$\begin{aligned} z_1z_2&=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)\\ &=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1), \end{aligned} \tag{1-2}$$

即在求两个复数相乘的积时，可视为两个二项式相乘并按其乘法法则进行，只要把所得结果中的 i^2 换成 -1 即可. 也不难验证复数的乘法满足：

$$z_1z_2=z_2z_1 \quad (交换律),$$

$$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3 \quad (结合律),$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3 \quad (分配律).$$

【例 1-2】 计算(1) $(3-4\mathrm{i})(-1+2\mathrm{i})$；(2) $(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})$.

解 (1) $(3-4\mathrm{i})(-1+2\mathrm{i})=(-3+8)+\mathrm{i}(4+6)=5+10\mathrm{i}$；

(2) $(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})=(9+16)+\mathrm{i}(-12+12)=25$.

更一般的，$(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)=x^2+y^2$.

3. 复数的除法

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2\,(z_2\neq 0)$ 相除的商规定为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{1-3}$$

【例 1-3】 计算(1) $\frac{1+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$;(2) $\frac{2+5\mathrm{i}}{3\mathrm{i}}$.

解 (1) $\frac{1+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}=\frac{(1+2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}=\frac{(3-8)+\mathrm{i}(4+6)}{25}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$;

(2) $\frac{2+5\mathrm{i}}{3\mathrm{i}}=\frac{(2+5\mathrm{i})\mathrm{i}}{3\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{i}-5}{-3}=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\mathrm{i}$.

4. 共轭复数

我们把实部相同而虚部互为相反数的两个复数 $x+\mathrm{i}y$ 和 $x-\mathrm{i}y$ 称为一对**共轭复数**，与 z 共轭的复数记为 $\overline{z}$，所以 $z=x+\mathrm{i}y$ 与 $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$ 共轭. 显然共轭复数的概念是相互的，即 $\overline{\overline{z}}=z$.

因为 0 的相反数仍是 0，从而得到：$z=\overline{z}$ 的重要条件是 z 为实数.

利用共轭复数可以得到：

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2},\ \mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}.$$

容易验证以下关于共轭复数的运算公式：

$$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2},\ \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2},$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0),\ z\cdot\overline{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2.$$

【例 1-4】 设 $z=\frac{2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}-\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$，$z\cdot\overline{z}$.

解 $z=\frac{2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}-\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(2+\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}-\frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}$

$$=-2\mathrm{i}+1-\frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{2}=-2\mathrm{i}+1-\mathrm{i}+1=2-3\mathrm{i},$$

所以 $\mathrm{Re}(z)=2$，$\mathrm{Im}(z)=-3$.

$$z\cdot\overline{z}=(2-3\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})=2^2+3^2=13.$$

【例 1-5】 设 z_1、z_2 是两个任意复数，证明 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}\,\overline{\overline{z_2}}=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\cdot\overline{z_2}}=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$. 证毕

1.1.3 复数的几何表示

考察一个复数的组成，可以看出一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 实际上是由一对有序的实数 x 和 y 构成的，这与平面直角坐标系中点(x, y)的表示在本质上是一致的，所以一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用平面直角坐标系中的点(x, y)来表示. 这样，在复数集 **C** 和平面点集之间就建立了一一对应的关系，这时复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的几何表

示是以 x 为横坐标，y 为纵坐标的点，而把 $z=x+\mathrm{i}y$ 称为复数的直角坐标表达式，由于实数 $x(y=0)$ 对应于横坐标轴上的点，纯虚数 $\mathrm{i}y(x=0)$ 对应于纵坐标轴上的点，故将平面直角坐标系中的横坐标轴改称为实轴，而将纵坐标轴改称为虚轴，并称这个平面为复数平面，简称复平面或 **Z** 平面. 以后我们用点 z 来代替数 z.

如果把复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的实部 x 和虚部 y 作为平面向量在两坐标轴上的投影，则复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可用平面向量 $\overrightarrow{Oz}=\{x, y\}$表示. 向量之间不定义大小关系，与复数之间不定义大小关系是一样的.

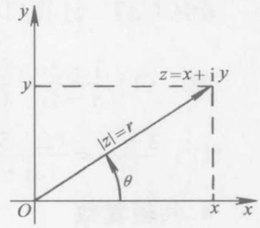

图 1-1

向量$\overrightarrow{Oz}$的模称为复数 z 的**模或绝对值**，记为

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2},$$

它是点 z 到原点的距离，也是向量$\overrightarrow{Oz}$的长度. 显然有：$|x|\leqslant|z|$，$|y|\leqslant|z|$，$|z|\leqslant|x|+|y|$，

$$z\bar{z}=|z|^2=|z^2|.$$

当 $z\neq0$ 时，复数 z 与实轴正向间的夹角 θ 称为复数 z 的**辐角**，记为 $\mathrm{Arg}z$，

$$\mathrm{Arg}z=\theta.$$

显然我们有 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，所以

$$\tan(\mathrm{Arg}z)=\tan\theta=\frac{y}{x}.$$

需要指出，任何一个复数 $z\neq0$ 有无穷多个辐角，如 θ_1 是辐角中的一个，则有

$$\mathrm{Arg}z=\theta_1+2k\pi \quad (k=0, \pm1, \pm2, \cdots). \tag{1-4}$$

式(1-4)表示 z 的全部辐角，其中满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的辐角 θ_0 称为**辐角 Argz 的主值**. 记为 $\theta_0=\arg z$.

当 $z=0$ 时，显然$|z|=0$，辐角不确定，如同零向量的方向可以任意选定一样.

当 $z\neq0$ 时，$z=x+\mathrm{i}y$ 可表示为

$$\begin{aligned} z&=r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\\ &=|z|[\cos(\mathrm{Arg}z)+\mathrm{i}\sin(\mathrm{Arg}z)] \end{aligned} \tag{1-5}$$

称为复数 z 的**三角表示式**.

复数的加减运算与两个向量的加减运算是完全一致的，也可以用平行四边形(或三角形)法则求出(见图 1-2).

从图 1-2 不难看出

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|, \tag{1-6}$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant \left| |z_1| - |z_2| \right|. \tag{1-7}$$

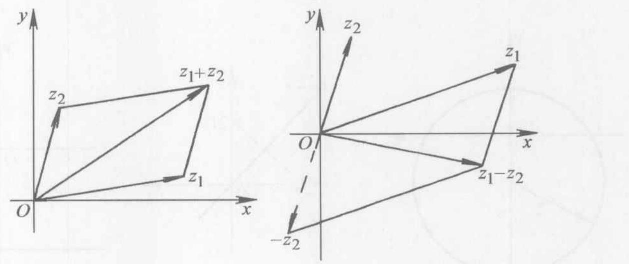

图　1-2

若有两个复数 z_1，z_2 且 $z_1 \neq 0$，$z_2 \neq 0$，则我们可以推知它们相等的充要条件是 $|z_1| = |z_2|$，$\mathrm{Arg}z_1 = \mathrm{Arg}z_2$.

对后一式子应该理解为 $\mathrm{Arg}z_1$ 和 $\mathrm{Arg}z_2$ 这两个量中的任何一个取定一值后，另一个量可以从它的无穷多个值中寻找一个与之相等的值，因此等式两端可取的值在全体上相等. 今后，我们遇到类似等式时都这样理解.

利用欧拉(Euler)公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，我们可以把一个复数 $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 表示为

$$z = re^{i\theta}.$$

这种形式称为复数的**指数表示式**.

复数的各种表示法可以互相转化，在讨论不同问题时可以使用不同的表示形式.

【例 1-6】　将 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化为三角表示式和指数表示式.

解
$$r = |z| = \sqrt{12+4} = 4,$$
$$\tan(\mathrm{Arg}z) = \tan\theta = y/x = \sqrt{3}/3,$$

由于 z 在第三象限，所以 $\theta_0 = -\frac{5}{6}\pi$. z 的三角表示式是

$$z = 4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right] = 4\left(\cos\frac{5}{6}\pi - i\sin\frac{5}{6}\pi\right).$$

z 的指数表示式是 $z = 4e^{-\frac{5}{6}\pi i}$.

很多平面图形用复数形式表示其方程或不等式往往显得特别简洁.

【例 1-7】　求下列方程所表示的曲线：

(1) $|z+i| = 2$；

(2) $|z-2i| = |z+2|$；

(3) $\mathrm{Im}(i+\bar{z}) = 4$.

解　(1) 在几何上，方程 $|z+i| = 2$ 表示所有与点 $-i$ 距离为 2 的点的轨迹，

即中心为$-\mathrm{i}$、半径为2的圆(见图1-3a).下面用代数方法求出该圆的直角坐标方程.

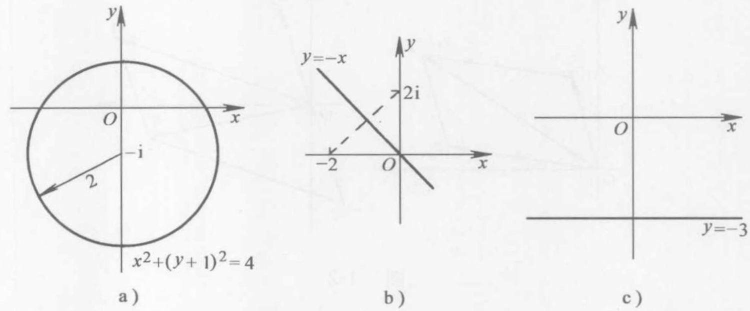

图 1-3

设$z=x+\mathrm{i}y$,方程变为

$$|x+\mathrm{i}y+\mathrm{i}|=2,$$

也就是$x^2+(y+1)^2=4$.

(2) 几何上,方程$|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$表示到点$2\mathrm{i}$和-2距离相等的点的轨迹,则方程表示的曲线就是连接点$2\mathrm{i}$和-2的线段的垂直平分线(见图1-3b),它的方程为$y=-x$,我们也可以用代数方法求出其方程.

(3) 设$z=x+\mathrm{i}y$,那么

$$\mathrm{i}+\overline{z}=x+(1-y)\mathrm{i}.$$

所以$\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\overline{z})=1-y$,从而得到所求曲线方程为$y=-3$,这是一条平行于$x$轴的直线(见图1-3c).

1.1.4 复球面

在实数域中,曾经引进了无穷大的概念,记为∞.同样在复数域内,为了讨论一些问题,也需要引入复数中的无穷大.前面我们建立了复数与复平面上的点之间的一一对应关系.那么无穷大在复平面的几何表示是什么呢?下面我们引入复球面的概念.

取一个与复平面切于原点O的球面,过切点(原点)O作复平面的垂线与球面交于N点.在复平面上任取一点z,作连接z和N的直线,该连线与球面交于一点z'(见图1-4);反之,若z'为球面上任一点,只要它不是N,则直线Nz'交复平面上唯一的点z.这样复平面上所有的点和球面上除了N以外的所有点就建立了一一对应关系,但对于N,还没有复平

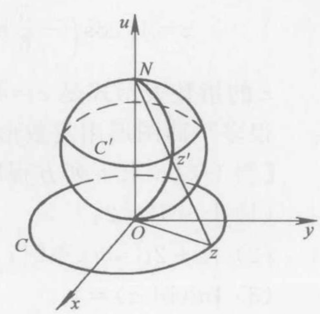

图 1-4

面上的点与之对应，但我们看到，当 z 无限地远离原点 O 时，或者说，当 z 的模 $|z|$ 无限地变大时，点 z' 就无限地接近于 N. 为了使复平面与球面上所有的点都能一一对应，我们规定复平面上有唯一的“无穷远点”，它与球面上的 N 相对应. 这样，我们又规定：复数中有一个唯一的“无穷大”与复平面上的无穷远点相对应，并记之为 ∞，因而球面上的 N 点（又称北极点）就是复数 ∞ 的几何表示，这样一来，球面上的每一个点，都有唯一的复数与之对应，这样的球面称为**复球面**. 而把包含无穷远点在内的复平面称为扩充复平面. 不包括无穷远点在内的复平面称为有限平面，或者就称复平面，以后如无特殊声明，复平面均指有限复平面.

对于复数 ∞ 来说，实部、虚部和辐角均无意义，但它的模是 $+\infty$，而其他有限复数 z，模 $|z|<+\infty$，复数 ∞ 与有限复数 a 之间的运算有如下规定：

$$a\pm\infty=\infty\pm a=\infty;$$
$$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty \quad (a\neq 0);$$
$$\frac{a}{\infty}=0,\ \frac{\infty}{a}=\infty.$$

但是 $0\cdot\infty$，$\frac{\infty}{\infty}$，$\infty\pm\infty$，$\frac{0}{0}$ 仍然没有确定意义.

1.1.5　复数的乘幂与方根

1. 复数的乘积与商

设复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，那么，根据乘法法则，有

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned}$$

于是

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \tag{1-8}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2. \tag{1-9}$$

式(1-9)应理解为：对 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 的任一值，一定有 $\mathrm{Arg}z_1$ 与 $\mathrm{Arg}z_2$ 的各一值与之相对应，使等式成立.

我们得到以下定理：

定理 1-1　两个复数乘积的模等于它们的模的乘积，两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和.

定理 1-1 的几何意义是，表示乘积 z_1z_2 的向量是将表示 z_1 的向量先旋转角度 $\mathrm{Arg}z_2$，再伸缩 $|z_2|$ 倍而得到的(见图 1-5).

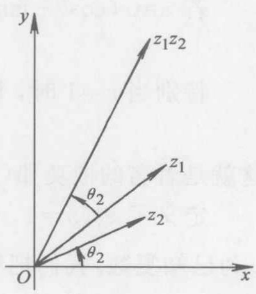

图　1-5