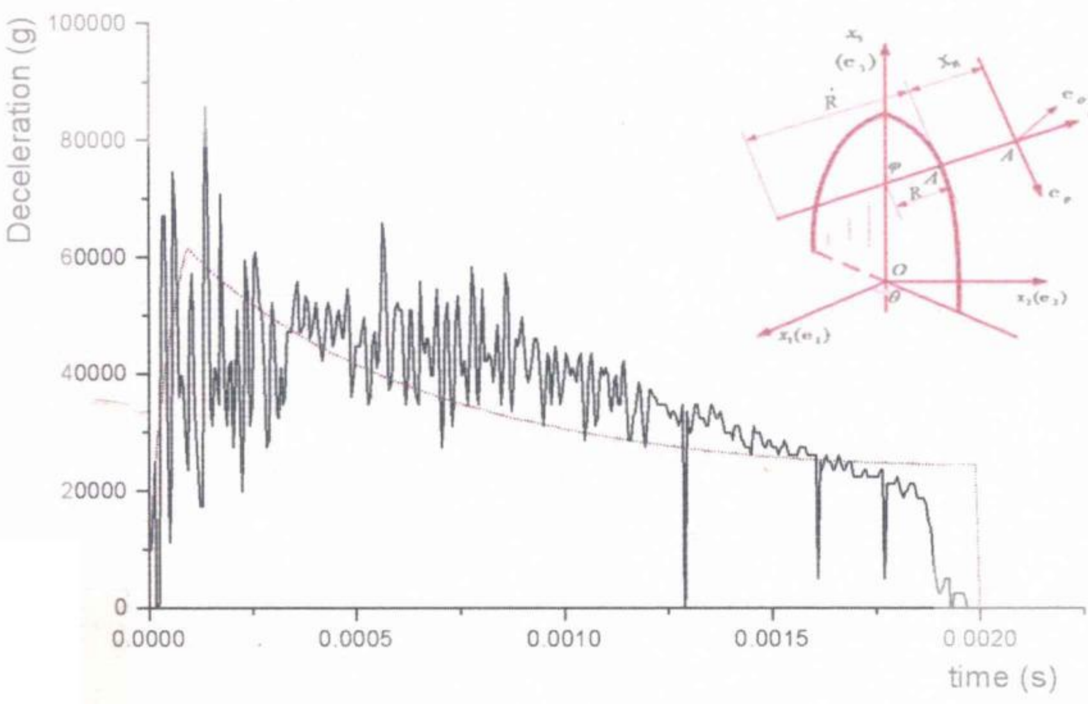
中国科协三峡科技出版资助计划

混凝土侵彻力学

高世桥　刘海鹏　金　磊　牛少华　著



中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

中国科协三峡科技出版资助计划

混凝土侵彻力学

高世桥　刘海鹏　金　磊　牛少华　著

中国科学技术出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

混凝土侵彻力学/高世桥等著. —北京:中国科学技术出版社,2012. 8
ISBN 978 - 7 - 5046 - 6118 - 0
(中国科协三峡科技出版资助计划)

Ⅰ. ①混… Ⅱ. ①高…②刘…③金…④牛… Ⅲ. ①混凝土冲击—动力学 Ⅳ. ①TU528

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 158707 号

总策划	沈爱民 林初学 刘兴平 孙志禹	责任编辑	孙卫华
项目策划	杨书宣 赵崇海	责任校对	孟华英
出版人	苏 青	印刷监制	李春利
编辑组组长	吕建华 许 英 赵 晖	责任印制	张建农

出　　版　中国科学技术出版社
发　　行　科学普及出版社发行部
地　　址　北京市海淀区中关村南大街 16 号
邮　　编　100081
发行电话　010 - 62103349
传　　真　010 - 62103166
网　　址　http://www.cspbooks.com.cn

开　　本　787mm × 1092mm 1/16
字　　数　224 千字
印　　张　11.75
版　　次　2013 年 3 月第 1 版
印　　次　2013 年 3 月第 1 次印刷
印　　刷　北京华联印刷有限公司印刷

书　　号　ISBN 978 - 7 - 5046 - 6118 - 0/TV · 92
定　　价　46.00 元

总　序

科技是人类智慧的伟大结晶，创新是文明进步的不竭动力。当今世界，科技日益深入影响经济社会发展和人们日常生活，科技创新发展水平深刻反映着一个国家的综合国力和核心竞争力。面对新形势新要求，我们必须牢牢把握新的科技革命和产业变革机遇，大力实施科教兴国战略和人才强国战略，全面提高自主创新能力。

科技著作是科研成果和自主创新能力的重要体现形式。纵观世界科技发展历史，高水平学术论著的出版常常成为科技进步和科技创新的重要里程碑。1543 年，哥白尼的《天体运行论》在他逝世前夕出版，标志着人类在宇宙认识论上的一次革命，新的科学思想得以传遍欧洲，科学革命的序幕由此拉开。1687 年，牛顿的代表作《自然哲学的数学原理》问世，在物理学、数学、天文学和哲学等领域产生巨大影响，标志着牛顿力学三大定律和万有引力定律的诞生。1789 年，拉瓦锡出版了他的划时代名著《化学纲要》，为使化学确立为一门真正独立的学科奠定了基础，标志着化学新纪元的开端。1873 年，麦克斯韦出版的《论电和磁》标志着电磁场理论的创立，该理论将电学、磁学、光学统一起来，成为 19 世纪物理学发展的最光辉成果。

这些伟大的学术论著凝聚着科学巨匠们的伟大科学思想，标志着不同时代科学技术的革命性进展，成为支撑相应学科发展宽厚、坚实的奠基石。放眼全球，科技论著的出版数量和质量，集中体现了各国科技工作者的原始创新能力，一个国家但凡拥有强大的自主创新能力，无一例外也反映到其出版的科技论著数量、质量和影响力上。出版高水平、高质量的学术著作，成为科技工作者的奋斗目标和出版工作者的不懈追求。

中国科学技术协会是中国科技工作者的群众组织，是党和政府联系科技

工作者的桥梁和纽带，在组织开展学术交流、科学普及、人才举荐、决策咨询等方面，具有独特的学科智力优势和组织网络优势。中国长江三峡集团公司是中国特大型国有独资企业，是推动我国经济发展、社会进步、民生改善、科技创新和国家安全的重要力量。2011 年 12 月，中国科学技术协会和中国长江三峡集团公司签订战略合作协议，联合设立“中国科协三峡科技出版资助计划”，资助全国从事基础研究、应用基础研究或技术开发、改造和产品研发的科技工作者出版高水平的科技学术著作，并向 45 岁以下青年科技工作者、中国青年科技奖获得者和全国百篇优秀博士论文获得者倾斜，重点资助科技人员出版首部学术专著。

我们由衷地希望，“中国科协三峡科技出版资助计划”的实施，对更好地聚集原创科研成果，推动国家科技创新和学科发展，促进科技工作者学术成长，繁荣科技出版，打造中国科学技术出版社学术出版品牌，产生积极的、重要的作用。

是为序。

中国长江三峡集团公司

2012 年 12 月 18 日

前　　言

混凝土材料是常用的建筑材料，无论是民用领域还是军事领域，无论是普通的建筑还是高安全结构，都广泛使用。因此，可以说没有混凝土材料就没有当今形形色色的建筑与结构。

混凝土材料的性能极为复杂。从骨料结构上看，存在许多随机因素；从拉压性能上看，表现出很强的不对称性，抗压能力很强，抗拉能力却很弱。

混凝土侵彻问题是一个极为复杂的问题。从材料的变形角度讲，经历了弹性、挤压流动、裂纹形成及扩展、密度压实等一系列的过程，涉及拉压曲线的全过程。因此它远比纯粹的弹性变形力学或纯粹的流体力学复杂。

侵彻过程是一个高速的过程，因而，远比静态问题或一般的低速动态问题复杂。从材料的性态上讲，既表现出固体的特征，也表现出流体的特征，甚至流固兼有的特征。从作用的瞬时性上讲，波传播的过程是必须考虑的过程，从对材料机械性能的影响上讲，应变率相关性也必须予以考虑。

由于混凝土侵彻问题极为复杂，研究者们的研究手段也五花八门，但共同的特点是针对特定的问题，设定一系列专门的假设，以使问题得以简化。但由于这些假设都是针对特定的情况（如特定的冲击速度，特定的弹体，特定的靶材等），因此，其结果不是普适性的。为了系统地了解这类问题的实质，并对相关问题求解，我们还是从连续介质的背景出发，设定混凝土是连续的介质，以便在连续介质力学的理论基础上，对很多问题作出清晰的阐述。

近些年来，我们结合相关的科研项目，对混凝土侵彻问题做了许多研究，取得了一定的科研成果。因此早有编写本书的萌动，几经提笔欲写又止。皆因其难度太大。今鼓足勇气，终于成稿，以科研项目的成果及其相关问题的方法探讨呈现给读者。

连续介质力学的物理基础是经典力学的原理，包括质量守恒原理，动量守恒原理和能量守恒原理。其数学基础是张量理论。物理原理容易理解，数学描述却比较困难。鉴于张量理论十分抽象，学习起来云山雾罩。因此，本书花了相当的篇幅，试图从科普的角度由浅入深地介绍张量理论，以备后文的使用。但愿这样的介绍使人对张量有

耳目一新的认识。

本书共分为十二章，第一章为矢量与张量，第二章为连续介质力学的基本理论，第三章为混凝土材料的本构特性及破坏准则，第四章为混凝土侵彻的传统经验公式，第五章为波及传播理论，第六章为空穴膨胀理论，第七章为可压缩混凝土介质法向膨胀侵彻模型，第八章为基于法曲面坐标系的法向空穴膨胀理论，第九章为混凝土的模糊侵彻模型，第十章为弹体侵彻混凝土靶板的靶面成坑机理，第十一章为弹体贯穿混凝土靶板的靶背崩落，第十二章为弹体侵彻混凝土的数值分析方法。第四章的第二部分、第七章、第八章、第九章、第十章和第十一章是以几篇论文为基础整理的，有相对的独立性。整体章节的顺序按着由理论到实践、由基础到工程、由经典到现代的思路进行了编排，目的是使读者对混凝土侵彻问题既有普适性的认识，也有特例性的了解，使基础理论与具体实践结合起来。

虽然我们做了许多的相关科研工作，也取得了一定的成果，但试图把这一问题完全介绍清楚确实不太容易，特别是我们的水平也很有限，观点和认识难免偏颇，因此书中会有许多不当之处，恳请读者予以批评并提出建议。

今年（2012 年）是我的导师钱伟长先生 100 周年诞辰。因此也想以此书的出版来纪念钱先生的诞辰。钱先生一生博学多才、成就卓著、影响超凡，在很多领域（如力学、物理、数学甚至文字领域）都有非凡的造诣。他一生坚持力学和数学相结合，力学和实践相结合，除在弹性力学、板壳力学、流体力学、理性力学、变分原理、摄动理论等方面的特殊贡献外，还率先在 20 世纪 80 年代出版了穿甲力学专著，引领了当时国内高速碰撞动力学的潮流。钱先生数学功底十分雄厚，物理观察力十分敏锐，他能把一个复杂的工程问题简化成可求解的数学物理问题，80 高龄时仍亲自推导数学公式。穿甲力学的研究就是面向军事需求而展开的。钱先生的许多教导都是我们的财富，许多行为模式都是我们效仿和学习的楷模。

参加本书工作的除作者外，王栋博士、申丽博士、姚峰林博士、王彩锋博士、陈兴辉博士、刘宗宝博士、李平博士、江安然硕士、张振泉硕士、管延伟硕士、何运丽硕士、洪丹丹硕士都为本书的编写提供了很多帮助，无论是资料的翻译、整理，还是初稿的形成，他们都做了大量的工作，特别是王彩锋博士为书稿的整理、编排付出了许多心血，在此一并表示感谢。

本书的出版有赖于相关项目的支持，作者感谢相关部门和企业资助。与此同时，我们参阅了大量的参考文献，对文献的作者也表示深深的谢意。

高世桥

2012 年 3 月

目　　录

第1章　矢量与张量

1.1　矢量与张量的内涵

1.1.1　标量(Scale)

在人们认识自然界的过程中，很早就有了数和量的概念，华罗庚先生说“数(shù)起源于数(shǔ)，量(liàng)起源于量(liǎng)。”为了描述一种事物的多少，总是将数和量合在一起用，通常叫做数量。如一斤苹果，二尺布等。它有数值的含义，即大小的含义，也有单位的含义，即量纲的含义。但这种量没有方向性。只有数量大小而没有空间方向的量，被称为标量。除标量之外，还有下文要介绍的矢量。

1.1.2　矢量(Vector)

随着人们认识的深化和物理学的发展，单纯用数和量来描述事物已经不够了。如对力的描述，速度的描述，用数和量只能描述其大小，而无法描述其方向。为了充分认识并描述这些事物，并兼顾大小和方向两个方面，人们引入了矢量（也称向量）的概念。矢量既有大小，也有方向。相对矢量来说，传统的无方向特征的数量，通常被称为标量。准确描述矢量的方向，一定要有一个参考的坐标系。并将该矢量在不同坐标轴上的投影称为分量。分量带有一个下标，如矢量 $\boldsymbol{f}$ 在三维直角坐标系中其各分量分别表示为：f_x，f_y，f_z。如果用 $i=1$，2，3 分别代表 x，y，z 轴，则力的三个分量又可以表示为 f_i，$i=1$，2，3。可以看出，用一个下标（与后文中的双层下标相比，也可称为一层下标）可以表示出一个矢量的分量，而将这些分量集合在一起，就构成了矢量的完整描述。比较一下标量和矢量，从内涵上讲，标量只具有大小的特征；矢量不仅具有大小的特征，而且还具有方向的特征。而从表征形式上讲，标量一般无需方向参照系，矢量则需方向参照系，在坐标系的各轴上有分量的概念，分量表征形式需要一层下标。分量的集合构成总矢量的描述。

1.1.3 矢量的坐标变换

进一步的分析会发现，对应不同的坐标系，同一矢量的分量形式是不同的，但其间却遵从某种变换规则。如一个矢量 **A** 在平面直角坐标系中的分量为 $\{A_x, A_y\}$，若将坐标系旋转一个角度 φ 变换成一个新坐标系$ox'y'$，其对应的分量则为 $\{A_{x'}, A_{y'}\}$。各坐标系的单位矢量（也称为基矢量）之间的变换关系为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}_x = \boldsymbol{i}_{x'}\cos\varphi - \boldsymbol{i}_{y'}\sin\varphi \\ \boldsymbol{i}_y = \boldsymbol{i}_{x'}\sin\varphi + \boldsymbol{i}_{y'}\cos\varphi \end{cases} \tag{1.1.1}$$

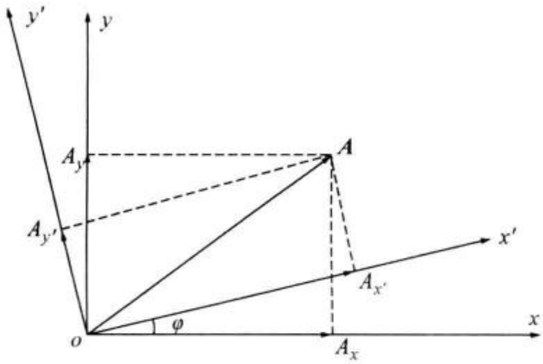


图 1—1　直角坐标系的变换

矢量 **A** 的分量也满足对应的变换关系，即

$$\begin{cases} A_x = A_{x'}\cos\varphi - A_{y'}\sin\varphi \\ A_y = A_{x'}\sin\varphi + A_{y'}\cos\varphi \end{cases} \tag{1.1.2}$$

事实上，一般来讲，平面内（或空间内）一点可用一矢径 $\boldsymbol{r}$ 来表示。在坐标系 oxy 中 $\boldsymbol{r}$ 可写成：

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i}_x + y\boldsymbol{i}_y \tag{1.1.3}$$

对坐标的偏微分为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = \boldsymbol{i}_x \text{和} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \boldsymbol{i}_y \tag{1.1.4}$$

同理有：

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x'} = \boldsymbol{i}_{x'} \text{和} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y'} = \boldsymbol{i}_{y'} \tag{1.1.5}$$

为了分析新旧坐标系的变换关系，可把新坐标系 $ox'y'$的坐标看做旧坐标系 oxy 坐标的函数，即：$x' = f_1(x, y)$ 及 $y' = f_2(x, y)$，则（1.1.4）式和（1.1.5）式又可写成：

$$\boldsymbol{i}_x = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\boldsymbol{i}_{x'} + \frac{\partial y'}{\partial x}\boldsymbol{i}_{y'} \tag{1.1.6a}$$

$$\boldsymbol{i}_y=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}=\frac{\partial x'}{\partial y}\boldsymbol{i}_{x'}+\frac{\partial y'}{\partial y}\boldsymbol{i}_{y'} \tag{1.1.6b}$$

上述方程组有非零解的条件是下面的行列式不等于零，即：

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x'}{\partial x} & \dfrac{\partial y'}{\partial x} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial y} & \dfrac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.1.7}$$

该行列式被称作雅可比（Jacobian）行列式。对应的矩阵被称作雅可比矩阵。进一步分析发现，雅可比矩阵的元素就是上述坐标变换的系数。对于上述相对老坐标系逆时针旋转一个角度 φ 的新坐标系变换，其雅可比矩阵可写成：

$$\mathbf{J}=\frac{\partial\ (x',\ y')}{\partial\ (x,\ y)}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x'}{\partial x} & \dfrac{\partial y'}{\partial x} \\ \dfrac{\partial x'}{\partial y} & \dfrac{\partial x'}{\partial y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{1.1.8}$$

1.1.4　张量（Tensor）概念的初步

有了矢量概念之后，自然界中绝大多数事物都可以通过标量和矢量来描述。然而，随着人们认识客观世界的不断深化，以及物理学的深入发展，有些事物单用标量和矢量来描述又显得不够了。如结构中某一点的应力状态，既涉及作用面的方向，又涉及某一面内作用力的方向。因此涉及双重方向。若用下标来描述分量，则需要双重下标，如 $\sigma_{i,j}$，i，$j=1$，2，3。为此，人们引入了张量的概念。张量是标量和矢量概念的推广和扩展。它是一种更广义的量的概念。根据分量下标层数的多少，张量分为不同的阶。标量由于不用下标，因此被视为零阶张量。矢量的分量只有一层下标，因此被称为一阶张量，而应力类型的量其分量需要双重下标来表示，被称作二阶张量，当然，还有三阶张量和高阶张量。从严格的数学和物理意义上讲，张量是对事物的一种客观描述，其本身与坐标系的选取无关。它是一种不依赖于特定坐标系的表达物理量的方法。采用张量记法表示的方程，若在某一坐标系中成立，则在经过变换的其他坐标系中也成立，即张量方程具有不变性。张量有两种描述方法，其一是不需要坐标系的实体描述方法，其二是借助于坐标系的分量描述方法。在实际数学物理分析时，人们常常需要借助坐标系，对应不同的坐标系，其张量的分量也会不同。但不同坐标系下的张量分量之间，就像上述矢量分量之间一样，存在依赖于坐标系之间转换的一种变换。

1.2　张量的逆变与协变

一般的张量分为逆变张量和协变张量。而逆变张量与协变张量的概念是源于矢量的逆变分量和协变分量。矢量的逆变分量和协变分量又源于斜角（非直角）的直线坐

标系。如图1—2所示为一平面内的斜角直线坐标系 ox_1x_2，其中坐标轴 ox_1 和 ox_2 相互不垂直。坐标系内有一矢量 $\boldsymbol{P}$。按矢量的平行四边形法则可将其分解为坐标轴上的两个分量 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$。若取 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 分别为 ox_1 轴和 ox_2 轴上的基矢量，则可将 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 写成：

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_1=a_1\boldsymbol{g}_1\\ \boldsymbol{P}_2=a_2\boldsymbol{g}_2\end{cases} \tag{1.2.1}$$

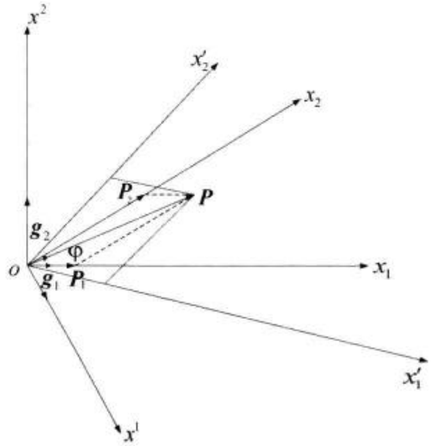


图1—2 斜角直线坐标系及其坐标变换

其中 a_1 和 a_2 为标量。原矢量 $\boldsymbol{P}$ 可写成：

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2=a_1\boldsymbol{g}_1+a_2\boldsymbol{g}_2 \tag{1.2.2}$$

标量 a_1 和 a_2 反映的是矢量 $\boldsymbol{P}$ 在 ox_1 轴和 ox_2 轴上的分量 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 占基矢量 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 的倍数，通常直接称其为矢量 $\boldsymbol{P}$ 在斜角直线坐标系 ox_1x_2 中的分量。

将上式两端同时点乘 $\boldsymbol{g}_1$，则有：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}_1&=a_1\boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}_1+a_2\boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{g}_1\\&=a_1|\boldsymbol{g}_1|^2+a_2|\boldsymbol{g}_1||\boldsymbol{g}_2|\cos\langle\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2\rangle\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

由于斜角直线坐标系 ox_1x_2 中的坐标轴 ox_1 和 ox_2 相互不垂直，亦即基矢量 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 夹角 $\varphi\neq\frac{\pi}{2}$，上式中的第二项并不为零。因此通过点积投影的方法不能直接得到分量 a_1。为了解决这样的问题，可引入一组新的基矢量 $\boldsymbol{g}^1$ 和 $\boldsymbol{g}^2$（注意由原来的下标改成了上标），并称 $\boldsymbol{g}^1$ 和 $\boldsymbol{g}^2$ 为 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 的对偶基，使其与原基矢量 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 满足关系：$\boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}^2=\boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{g}^1=0$ 和 $\boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}^1=\boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{g}^2=1$，即正交。在图形上，相当于画了一个新坐标 ox^1x^2，其中 ox^1 轴与 ox_2 轴垂直，ox^2 轴与 ox_1 轴垂直。再用 $\boldsymbol{g}^1$ 去点乘前式，有：

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}^1=a_1\boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}^1+a_2\boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{g}^1=a_1 \tag{1.2.4}$$

同理有：

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}^2=a_2 \tag{1.2.5}$$

可以看出，a_1 相当于 $\boldsymbol{P}$ 在 ox^1 轴上的投影 P^1，a_2 相当于 $\boldsymbol{P}$ 在 ox^2 轴上的投影 P^2，即

$$a_1 = P^1 \qquad \text{和} \qquad a_2 = P^2 \tag{1.2.6}$$

则前述的分解公式可重写为

$$\boldsymbol{P} = P^1 \boldsymbol{g}_1 + P^2 \boldsymbol{g}_2 \tag{1.2.7}$$

由于 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 是原斜角直线坐标系的基矢量，称为协变基矢量。而 $\boldsymbol{g}^1$ 和 $\boldsymbol{g}^2$ 和它们有正交关系，满足 $\boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}^1 = 1$，$\boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}^2 = 1$，$\boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}^2 = \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}^1 = 0$ 即：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 \\ \boldsymbol{g}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}^1 & \boldsymbol{g}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2.8}$$

或

$$\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = \delta_i^j \tag{1.2.9}$$

其中 δ_i^j 为克罗内克（kronecker）函数，

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{1.2.10}$$

从矩阵的角度，如果两个方矩阵的积为单位矩阵，则称这两个矩阵互逆，即后面的矩阵为前面矩阵的逆矩阵。因此称 $\boldsymbol{g}^1$ 和 $\boldsymbol{g}^2$ 为逆变基矢量（严格说来，这两个矩阵不是方阵，不能算逆矩阵）。对应地，称 P^1 和 P^2 为矢量 $\boldsymbol{P}$ 的逆变分量。若将该矢量按逆变基矢量分解有：

$$\boldsymbol{P} = P_1 \boldsymbol{g}^1 + P_2 \boldsymbol{g}^2 \tag{1.2.11}$$

其中 P_1 和 P_2 为矢量 $\boldsymbol{P}$ 的协变分量。

这样的概念在空间三维坐标系中是同样存在的，思路也完全类似。对于矢量是这样，对于更广义的张量，情况也是如此。可以看出，矢量之所以有协变分量和逆变分量之说，完全是因为斜角直线坐标系的存在。若该斜角直线坐标的夹角 $\varphi = \frac{\pi}{2}$，即 ox_1 和 ox_2 垂直，则新坐标系的 ox^1 轴和 ox^2 轴是和 ox_1 轴及 ox_2 轴完全重合的。这种情况下，逆变分量与协变分量也是一样的。

鉴于连续介质力学多用笛卡尔直角坐标系，因此本书中只介绍并用到直角坐标系的张量。这种张量没有协变和逆变之分。

1.3 张量的基本概念

1.3.1 张量的定义

张量的定义一般比较抽象。可从以下两个方面来理解。一是从物理的角度看，张量就是一种描述物理客观的量，是标量和矢量的扩展。标量只描述物理量的大小，矢量不仅描述物理量的大小，还能描述物理量的方向，张量比标量和矢量更广义，它不仅能描述物理量的大小和物理量的方向，还能描述更多重的方向，甚至其他方面的因

素。从数学的角度看，张量可看作是某种坐标系下遵从一定坐标转换关系的各分量的有序集合。

为了解释数学上的这些思想，我们再从图 1－2 中的斜角直线坐标系说起。若仍以矢量 $\boldsymbol{P}$ 为对象，但坐标系变成了 $ox'_1x'_2$，对应的基矢量为 $\boldsymbol{g}'_1$ 和 $\boldsymbol{g}'_2$，则新坐标系的基矢量对老坐标系基矢量分解为：

$$\boldsymbol{g}'_1=\beta_1^1\boldsymbol{g}_1+\beta_1^2\boldsymbol{g}_2 \tag{1.3.1a}$$

$$\boldsymbol{g}'_2=\beta_2^1\boldsymbol{g}_1+\beta_2^2\boldsymbol{g}_2 \tag{1.3.1b}$$

写成一般式子为：

$$\boldsymbol{g}'_i=\sum_j\beta_i^j\boldsymbol{g}_j \qquad i=1,2 \tag{1.3.2}$$

同理，新老坐标系的对偶基之间有如下关系：

$$\boldsymbol{g}'^i=\sum_j\gamma_j^i\boldsymbol{g}^j \qquad i=1,2 \tag{1.3.3}$$

将老坐标系的基矢量按新坐标系基矢量分解，有：

$$\boldsymbol{g}_i=\sum_j\alpha_j^i\boldsymbol{g}'_j \qquad i=1,2 \tag{1.3.4}$$

将上式两端点乘 $\boldsymbol{g}'^k$，得：

$$\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}'^k=\sum_j\alpha_j^i\boldsymbol{g}'_j\cdot\boldsymbol{g}'^k=\alpha_k^i \qquad i=1,2 \tag{1.3.5}$$

将(1.3.3)式代入上式还得：

$$\boldsymbol{g}_i\cdot\sum_j\gamma_j^k\boldsymbol{g}^j=\gamma_i^k \qquad i=1,2 \tag{1.3.6}$$

比较(1.3.6)式与(1.3.5)式可知：$\alpha_k^i=\gamma_i^k$，即：

$$\boldsymbol{g}_i=\sum_j\gamma_i^j\boldsymbol{g}'_j \qquad i=1,2 \tag{1.3.7}$$

同理有：

$$\boldsymbol{g}^i=\sum_j\beta_i^j\boldsymbol{g}'^j \qquad i=1,2 \tag{1.3.8}$$

将矢量 $\boldsymbol{P}$ 分别在两种坐标系按协基矢量分解，有：

$$\boldsymbol{P}=\sum_jP^j\boldsymbol{g}_j=\sum_jP^j\sum_k\gamma_j^k\boldsymbol{g}'_k \tag{1.3.9}$$

$$\boldsymbol{P}=\sum_kP'^k\boldsymbol{g}'_k \tag{1.3.10}$$

矢量是客观的，不因坐标系的变化而变化，因此以上两式应该相等，即

$$\sum_jP^j\sum_k\gamma_j^k\boldsymbol{g}'_k=\sum_kP'^k\boldsymbol{g}'_k \tag{1.3.11}$$

用 $\boldsymbol{g}'^i$ 点乘上式两端得：

$$\sum_jP^j\sum_k\gamma_j^k\boldsymbol{g}'_k\cdot\boldsymbol{g}'^i=\sum_kP'^k\boldsymbol{g}'_k\cdot\boldsymbol{g}'^i \tag{1.3.12}$$

得：

$$\sum_j P^j \gamma_j^i = P'^i \qquad i = 1,2 \tag{1.3.13}$$

即：

$$P'^i = \sum_j \gamma_j^i P^j \qquad i = 1,2 \tag{1.3.14}$$

比较（1.3.14）式与（1.3.3）式，可以看出，矢量分量的新老坐标系变换关系，与基矢量的变化关系形式完全相同。

以上是以平面坐标系为例来分析和讨论的。一般地，若坐标系（x_1，x_2，…，x_n）的基矢量为（$\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$，…，$\boldsymbol{g}_n$），另一坐标系（$\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，…，$\bar{x}_n$）的基矢量为（$\bar{\boldsymbol{g}}_1$，$\bar{\boldsymbol{g}}_2$，…，$\bar{\boldsymbol{g}}_n$），则基矢量间满足如下变换关系：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 \\ \boldsymbol{g}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{J} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{g}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{g}}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{g}}_n \end{bmatrix} = \frac{\partial\ (\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \cdots,\ \bar{x}_n)}{\partial\ (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{g}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{g}}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{g}}_n \end{bmatrix} \tag{1.3.15}$$

矢量 **A**（一阶张量）在两不同坐标系下的分量也满足这种变换关系，即：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{J} \cdot \bar{\boldsymbol{A}} = \frac{\partial\ (\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \cdots,\ \bar{x}_n)}{\partial\ (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)} \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \vdots \\ \bar{A}_n \end{bmatrix} \tag{1.3.16}$$

或写成：

$$A_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \bar{A}_j \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.3.17}$$

其中 $\beta_{ij} = \dfrac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i}$。矢量 A_i 作为一阶张量，由于只有一层指标，从一个坐标系经过一次变换就可以得到另一个坐标系的分量。

二阶张量的情况类似，但由于有两重指标，一次变换只能针对一层指标进行，因此一个坐标系下的分量需经过两次变换才能得到另一个坐标系下的分量，即：

$$A_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ki} \beta_{lj} \bar{A}_{ij} \qquad k,l = 1,2,\cdots,n \tag{1.3.18}$$

以此类推，n 阶张量由于有 n 重指标，而一次变换只能针对一层指标进行，因此需经过 n 次变换才能得到另一坐标系下的全部分量。从上述的分析可以看出，抛开物理的含义，从数学的角度理解，张量就是某种坐标系下遵从一定坐标转换关系的各分量的有序集合。