受驗準備用書

平面幾何學要覽

卷下

商務印書館出版

受驗準備用書

平面幾何學要覽

卷下

商務印書館出版

中華民國十年十二月初版
中華民國十八年六月再版

（平面幾何學要覽二册）
（下册定價大洋貳角伍分）
（外埠酌加運費匯費）

編纂者　秦和匡文濤
校訂者　紹興駱師曾
發行者　商務印書館
印刷所　商務印書館
上海北河南路北首寶山路
總發行所　商務印書館
上海棋盤街中市
分售處　商務印書分館
北京　濟南　杭州　天津　太原　蘭谿　保定　開封　安慶　奉天　洛陽　蕪湖　吉林　西安　南昌　龍江　南京　漢口
長沙　廣州　貴陽　常德　潮州　成都　香港　張家口　重慶　桂林　瀘縣　梧州　福州　雲南　新嘉坡

五〇一三陸

平面幾何學要覽

下册目次

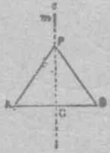
軌跡（其一）

定義

凡某圖形上一切之點含有某一定之性質其他各點皆無此性質則此圖形曰含有此性質之點之軌跡

定理

（1）與二定點等距離之點之軌跡爲連結二點之直線上之垂直二等分線



（證明）A, B 爲二定點 P 爲屬於其軌跡之點連結 AB 又連結其中點 C 於 P 就 $\triangle PAC$, $\triangle PBC$ 論 $PA=PB$, $AC=BC$ 且 PC 爲兩形共有 $\therefore \triangle PAC=\triangle PBC$ 由是 $\angle PCA=\angle PCB$ $\therefore$ $\angle PCA$, $\angle PCB$ 各爲 R∠ 卽 P 點在過 AB 中點 C 之垂線 m 上

反之從 m 直線上任意一點 P 連結 PA, PB 則於 $\triangle PAC$, $\triangle PBC$ 其 $AC=BC$, PC 爲兩形共有而 $\angle PCA=\angle PCB$ $\therefore PA=PB$ 故 P 點與 A, B 二點等距離卽屬於軌跡之點

由以上之證明無限直線 m 乃所求之軌跡

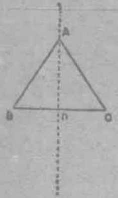
問題

（1）試求已知底邊上所立二等邊三角形之頂點之軌跡

（2）過二定點作圓試求其中心之軌跡

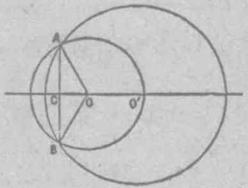
軌跡問題之解答（其二）

(1)（解法）△ABC 爲立於已知底邊 BC 上之二等邊三角形立於已知底邊 BC 上之二等邊三角形之頂點 A 卽軌跡上之點 A 以 AB=AC 則 A 與 B, C 等距離故所求之軌跡等於與此二點等距離之點之軌跡卽與 BC 直線成直角且二等分之無限直線 AD



反之於 AD 直線上任意一點 A 作 AB, AC 則 △ABD. 與 △ACD 相等由是 AB=AC ∴ △ABC 爲二等邊三角形而 A 點爲其頂點卽此直線上之點皆適於此要件故 AD 線爲所求之軌跡

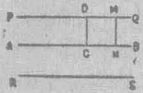
(2)（解法）設過二定點 A, B 之圓爲 O 連結其中心 O 與 A, B二點則 OA, OB 均爲 O 圓之半徑而相等故所求之軌跡等於與此二定點等距離點之軌跡卽二定點間直線AB 之垂直二等分線 OC



反之以此 OC 直線上任意一點 O′ 爲中心 O′A 爲半徑畫圓則此圓必過 B 點何則 O′ 點爲與 A, B 二點等距離點之軌跡上之點卽 O′A=O′B 故也故 O′ 爲過 A, B 二點之圓之中心卽 OC 線上之點均適於此要件故所求之軌跡爲無限直線 OC

定　理	問　題

(2) 與定直線 AB 有定距離 MN 之點之軌跡爲 AB 兩側有 MN 距離而平行於 AB 之二直線 PQ, RS



(證明) 令 D 爲 PQ 線上任意一點向 AB 作垂線 DC 則成四邊形 CDMN 是爲矩形 ∴ CD=MN=所設之距離 卽凡 PQ 上之點皆適於題之要件
RS 線亦得同樣證明

反之於 AB 上之一點 C 作垂線 CD 令 CD=MN 連結 DM 則四邊形 CDMN 爲矩形 故 AB ∥ DM 然過 M 平行於 AB 之直線惟一無二故 DM 重合於 PQ 卽適於題中要件之點當在 PQ 之上
D 在 AB 之他側與 PQ 反向則 D 在 RS 上亦可同樣證明之
由是知 PQ, RS 爲所求之軌跡

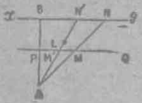
問題

(1) 一定點至定直線上各點連結直線之中點之軌跡爲平行於此定直線之直線

(2) 平行四邊形與三角形 ABC 共有 A 角而對於 A 角之頂點在 BC 邊上則其對角線交點之軌跡如何

軌跡問題之解答(其二)

(1)(解法)自定點 A 作定直線 xy 之垂線 AB 過其中點 P 引直線 PQ 平行於 xy 是卽所求之軌跡

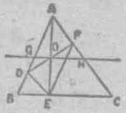


設於 PQ 上任意取一點 M 連結 AM 且延長之交 xy 於 N 則 P 爲 AB 之中點而 PM 平行於 xy 故 M 爲 AN 之中點卽 PQ 上之點皆適於題之要件

次從 PQ 外取一點 L 作 AL 交 PQ 於 M′ 延長 AL 交 xy 於 N′ 則與前同樣知 M′ 爲 AN′ 之中點故 L 非 AN′ 之中點卽此直線外之點皆不適於題之要件

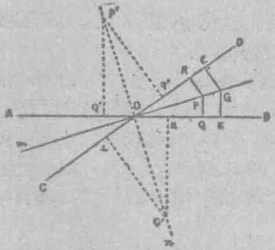
故 PQ 直線爲所求之軌跡

(2)(解法)於 BC 上有一頂點 E 且與 △ABC 共有 ∠A 之平行四邊形 ADEF 其對角線之交點爲 O 因 AO＝OE 故 O 之軌跡與自頂點 A 至 BC 所引直線中點之軌跡同故所求之軌跡爲 AB, AC 中點 G, H 之連線 GH



反之從 GH 線上任意一點 O 作 AO 且延長之交 BC 於 E 從 E 各作 AB, AC 之平行線 EF, ED 其交點爲 F, D, 則以 O 爲平行四邊形 ADEF 對角線 AE 之中點而作他之對角線 DF 亦必過 O 點卽 GH 線上之點皆適於題之要件故 GH 線爲所求之軌跡

定　　理	問　　題
(3) 與相交二直線 AB, CD 等距離之點之軌跡爲二等分其交角之二直線	(1) 以有限直線之兩端置於互成直角之二直線上而移動試求其中點之軌跡
	(2) 以定直線爲斜邊之直角三角形試求其頂點之軌跡



(證明) O 爲 AB, CD 二直線之交點 P 爲所求之點從 P 至此二直線作垂線其足爲 Q, R 則 $\triangle POQ$, $\triangle POR$ 均爲直角三角形而 $PQ=PR$ 且 PO 爲兩形所共有故兩三角形相等從而 PO 爲 $\angle DOB$ 之二等分線卽爲定線（設此定線爲 m）

同樣 P′ 爲所求之點則直線 OP'（卽 n 線）爲 $\angle AOD$ 之二等分線卽定線

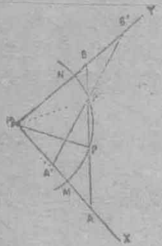
故所求之軌跡爲 m, n 之二直線

反之於 m 或 n 上任取一點 G 從 G 至 AB, CD 作垂線其足爲 K, L 則就 $\triangle GOK$, $\triangle GOL$ 言 $\angle GKO=\angle GLO=\angle R$, $\angle GOK=\angle GOL$ 而 GO 共有 $\therefore GK=GL$ 卽 m, n 上之點皆適於題之要件

故所求之軌跡爲 m, n 二直線

軌跡問題之解答(其三)

(1)(解法)以有限直線 AB 之兩端置於 OX, OY 上令其中點爲 P 連結 OP 則 $OP=AP=PB$ 卽 OP 等於所設之長之半而爲定長故 P 點之軌跡爲以 O 爲中心所設之長之半爲半徑規成之 MN 圓弧



反之於 $\widehat{MN}$ 上任取一點 P′ 作 OP′ 以 P′ 爲中心 OP′ 爲半徑作弧截 OX 於 A′ 延長 A′P′ 交 OY 於 B′ 則 A′B′ 等於所設之長而P′爲其中點何則 $OP'=A'P'$

$\therefore \angle P'OA=\angle P'A'O$

但 $\angle P'OA+\angle P'B'O=\angle R$

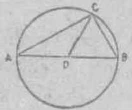
又 $\angle P'OA'+\angle P'OB'=\angle R$

$\therefore \angle P'OB=\angle P'B'O$ 從而 $P'O=P'B=P'A$

卽 P′ 爲 A′B′ 之中點且 $A'B'=2P'O=$所設之長

故 P′ 適於題之要件卽 $\widehat{MN}$ 爲所求之軌跡

(2)(解法)AB 爲所設之直線以此爲斜邊作任意直角三角形 ABC 設 AB 之中點爲 D 連結 DC 則 $AD=DB=DC$ 故 C 在以 AB 之中點 D 爲中心等於 AB 之半分爲半徑所作之圓周上故此圓爲定圓

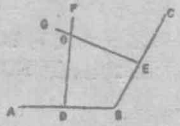


反之於此圓周上任意取一點 C 作 AC, BC 則 △ABC 爲直角三角形從而頂點 C 適於題之要件

故以 AB 爲徑之圓周卽所求之軌跡

定　理

（4） 與不在同一直線上之三點等距離之點僅有一點



（證明） A, B, C爲不在同一直線上之三點與A, B等距離之點之軌跡爲AB中點D之垂線DF又與B, C等距離之點之軌跡爲BC中點E之垂線EG但DF, EG二軌跡之交點爲O故O爲與A, B, C等距離之點卽與此三點等距離之點在DF上同時亦不可不在EG上故除此二線之交點外別無他點惟其交點祗有一點故與不在同一直線上之三點等距離之點僅有一點

系 1. 過不在同一直線上之三點可作一圓但祇以一圓爲限

（證明） 過三點之圓之中心卽前圖O而O祇一點從而知圓祇有一個

系 2. 三角形各邊之垂直二等分線必會於一點而此一點與各頂點等距離

（證明） 依前圖

OA＝OB＝OC

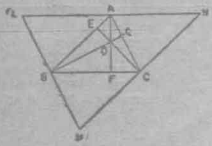
故從O向AC作垂線必垂直二等分AC卽O爲△ABC三邊之垂直二等分線之交點（外心）

問　題

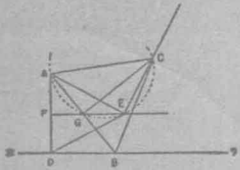
（1） 從三角形之頂點各至對邊作三垂線則此三垂線必同會於一點

（2） 從一定點向定直線上引諸直線試求諸直線上正三角形頂點之軌跡

(1)(解法)過各頂點 A, B, C 作三直線各與對邊平行則成三角形 LMN 但 LBCA, ABCN 爲平行四邊形 ∴ BC=LA 又 BC=AN 卽 A 點爲 LN 之中點以 AF⊥BC 而 AF⊥LN 同樣 BG 爲 LM 之中垂線 CE 亦爲 MN 之中垂線故此三直線 AF, BG, CE 爲 △LMN 之三中垂線依前定理(4)必會於一點設其交點爲O則△ABC各頂點至對邊作三垂線會於一點O



(2)(解法)從定點 A 向定線 xy 作垂線 AD 於 AD 上所作之正三角形爲 △ADE 從 E 向 AD 作垂線 EF 交 AB 於 G 連結 CG 爲 AB 之直角二等分線故就 △AEF, △ACG 論 ∠EAF=∠CAG, ∴ ∠ACG=∠AEF



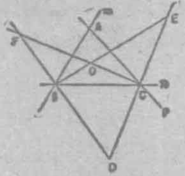
故 AC 爲直徑之圓必過 A, C, E, G 四點 ∴ ∠AEC=∠R 但 E 爲定點故 C 在定線 EC 上故其軌跡爲 EC 直線

反之EC 上任意取一點 C 以 AC 爲徑作圓交 EF 於 G 作 AG 且延長之截 xy 於 B 作 BC 則 ∠AGC=∠R 且 G 爲 AB 之中點 ∴ AC=BC 又 ∠AEG=∠ACG ∴ ∠CAG 爲正三角形之一角從可知 △ABC 爲正三角形卽 C 亦適於題之要件故 EC 直線爲所求之軌跡

定理

（5）三直線 m, n, p 不同過一點又不平行則與其等距離之點祇限於四點

（證明）m, n, p 不同過一點又不平行故可交於 A, B, C 而成 △ABC 作 CF, BE 爲 ∠ACB, ∠ABC 之二等分線相會於 O 作 FB, EC 爲外角 B, C 之二等分線相會於 D 則 m, n 等距離之點之軌跡爲 BE, FD n, p 等距離之點之軌跡爲 CF, ED



故 m, n, p 等距離之點在此四直線之交點惟此四直線不平行卽角 B, C 不等故此四直線會於 D, E, F, O 四點此外別無相會之點故所求之點祇此四點

系 1. 三角形各角之二等分線會於一點（內心）

（證明）O 爲與 m, n, p 等距離之點從而知其與 m, p 爲等距離卽在 ∠BAC 之二等分線上卽三個二等分線會於一點

系 2. 三角形二個外角之二等分線與一個內角之二等分線會於一點（傍心）

依本定理易於證明

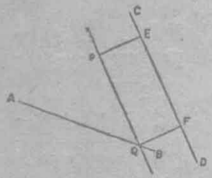
問題

（1）試於定直線上求一點使與他之定直線有定距離

（2）試於定直線上求一點使與定點有定距離

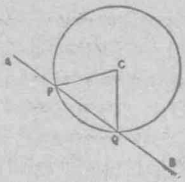
軌跡問題之解答(其五)

(1)(解法)定直線為 AB 他之定直線為 CD 定距離為 m 設於直線 CD 上任取一點 E 過 E 作垂線 EP 使 EP $=m$ 而定 P 點過 P 作平行於 CD 之直線 PQ 交 AB 線於 Q 則 Q 為所求之點何則與 CD 線有 m 距離之點之軌跡為 PQ 線故 Q 為與 CD 有 m 距離之點同時 Q 為在 AB 線上之點故所求之點為交點 Q



(注意)與 CD 有 m 距離之點之軌跡亦可在 PQ 線反對之側而 AB 線亦交於此線故所求之點有二

(2)(解法)AB 為定直線 C 為定點與 C 點之定距離為 m 設以 C 為中心 m 為半徑畫圓交 AB 於 P, Q 則 P, Q 卽所求之二點何則以與 C 點有 m 距離之點之軌跡為 C 圓而其交點 P, Q 與 C 連結為圓之半徑



$\therefore PC=QC=m$

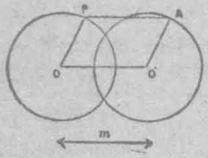
且 P, Q 為 AB 線上之點

故所求之點有 P, Q 二點

(注意)若畫圓切於 AB 線則所求祇一點又若畫圓不交於 AB 線則無一點合所求

應用問題

（1）置定直線之一端於定圓周上依定方向而移動試求此直線他端之軌跡



（證明）O 爲所設定圓之中心 m 爲所設定長之直線且有定方向試於圓周上任意取一點 P 作 $PA=m$ 且與 m 平行其一端 P 在 O 圓周上移動而求他端 A 之軌跡過 O 作 $OO'=m$ 且與 m 平行則四邊形 $POO'A$ 爲平行四邊形故 $O'A=OP$ 爲一定之長而 O' 亦爲定點故 A 在以定點 O' 爲中心等於定圓之半徑爲半徑之圓周上從可知所求之軌跡爲 O' 圓

反之從 O' 圓上任意取一點 A 則 $AP \parallel OO'$ 且 $AP=OO'$ 故四邊形 $POO'A$ 爲平行四邊形 $\therefore OP=O'A$ 從而知 P 在 O 圓周上而以 $OO'=PA$ 故 AP 適於題之要件卽凡 O' 圓周上之任一點皆適於題之要件

故所求之軌跡爲等於 m 且依定方向引 OO' 而以 O' 爲中心 OP 爲半徑之圓

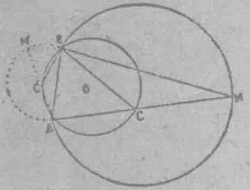
問題

（1）設 AB 爲 O 圓之弦將過 A 之弦 AC 延長之令 CM 等於 CB 則 M 點之軌跡若何

（2）設 AB 爲定圓之一定弦從 A 任意再引一弦 AC 以 AB, AC 爲二鄰邊作成平行四邊形試求其對角線交點之軌跡

軌跡問題之解答 (其六)

(1) (解法) AC 爲過 A 點之弦試延長之令 CM = BC 連結 BM 則 ∠CBM = ∠CMB 且 ∠ACB = 2 ∠CMB 而 ∠ACB 爲定角從而 ∠AMB 亦爲定角且爲立於定線 AB 上之角故 M 點爲弓形周上之點此弓形含 ∠ACB 等角之半卽所求之軌跡爲此弓形



反之從弓形上任意取一點 M 與 A, B 連結則 AM 交 O 圓於 C 點連結 BC 則

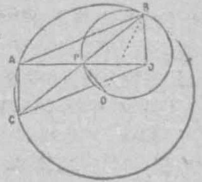
∠CBM + ∠AMB = ∠ACB 而 ∠AMB = $\frac{1}{2}$∠ACB

∴ ∠CBM = ∠AMB 從而 CB = CM 卽 M 點爲所求之點

故此弓形爲所求之軌跡

又同樣弓形 BM′A 亦爲所求之軌跡

(2) (解法) AP, AC 爲二鄰邊之平行四邊形爲 ABDC 其對角線交點爲 P 則 PC = PB 卽 P 爲 BC 弦之中點故與中心 O 連結則 OP ⊥ BC 卽 ∠OPB 爲直角故 P 點在以 OB 爲直徑之定圓周上從而知所求之軌跡爲此圓周反之此圓周上任意取一點 P 連結 PB 且延長之交 O 圓於 C 則以 AB, AC 爲二鄰邊作成平行四邊形 ABDC 故 BC 爲其對角線之一又作 PO 則 ∠OPB = ∠R 從可知 P 爲 BC 之中點故作他之對角線 AD 必過 P 點卽 P 爲適於題之要件



故所求之軌跡爲以 OB 爲徑之圓周