SHIFANZHUANKESHIYONGJIAOCAI

师范专科试用教材

# 高等代数

吉林教育出版社

师范专科试用教材

# 高 等 代 数

吉 林 教 育 出 版 社

# 师专数学教材
# 出版说明

师范专科学校承担着培养大批合格的初中教师的重任。随着九年制义务教育的普及和四化建设的深入发展，师专的地位和作用愈来愈受到社会的重视。但是，就师专数学专业而言，到目前为止，国内还没有公开出版一套完整的、令人满意的专业教材，这给师专教学带来了一定的困难。为了解决这一问题，填补这一空白，在吉林省教育委员会的组织和资助下，由四平师院、吉林师院、长春师院、通化师院、白城师专、齐齐哈尔师院、廊坊师专、内蒙民族师院、昭盟蒙族师专等九所师范院校联合编写了这套教材。本套教材共有十四种，十五册。它们是:《空间解析几何》，《高等代数》，《数学分析》（上、下册），《概率论与数理统计》，《逻辑代数与计算机语言》，《普通物理》，《初等代数研究》，《初等几何研究》，《中学数学教材教法总论》，《高等几何》，《常微分方程》，《复变函数》，《高等数学》（物理专业用），《高等数学》（化学专业用）。

本套教材是根据国家教委制定的二年制师范专科学校的教学计划（征求意见稿）和各门课程的教学大纲并结合九所院校的教学实践编写的。为保证教学质量，邀请了东北师大、吉林大学等校的二十多位教授、专家、学者组成教材编审委员会，对全套教材的编写进行了具体指导和严格审查。

本套教材包括了教学计划规定的师专数学专业的全部专

业课程（必修课及选修课）的教材以及物理和化学专业的高等数学教材。编写时充分注意了各门教材内容上的衔接与配合，深度和广度方面的协调一致，并在文字使用、表述方式以及名词术语和符号的使用等方面有统一的要求，力争规范划一。

本套教材从培养目标出发，突出了师专教育的要求和特点。教材选择上避免了“多、深、尖”的弊病，体现了“少、广、新”的原则。力求培养学生具有坚实的理论基础和广阔的视野，以适应“三个面向”的需要。在表述方面，在充分注意科学性和严密性的前提下，力求通俗易懂，深入浅出，详尽透彻，易教易学。

为了加强对学生的能力培养和科学的思维方法的训练，各门教材都配备了较多的例题和习题。它们都经过精心选择，与正文内容密切配合，有些还是正文内容的补充和提高。对于难度较大的习题，作了适当的提示。

本套教材不仅可供师范专科学校使用，还可作为教育学院、职业大学、电视大学以及函授、刊授等相应专业的教材，亦可作为师范院校本科及其它院校有关专业的教学参考书。

编写一套完整的、适应四化建设需要的教材是一项十分艰巨的任务。我们的工作只是一个初步的尝试，缺点和谬误之处在所难免，诚恳希望得到有关专家和广大读者的批评指正。吉林省教育委员会和参加编写工作的九所院校的有关领导对于本套教材的编写出版给予了宝贵的支持，谨此表示衷心的感谢。

师专数学专业教材协编组

1986年10月

# 目　　录

**第八章 线性变换**

# 第一章 行 列 式

## §1 数环与数域

数是数学中的一个最基本的概念，我们讨论一个数学问题，总要用到一些数，而且还需要对这些数作某些运算．一般说来，并不需要用到所有的数，而是只需要或只允许使用其中的一部分数，这些数与问题的本身有关，也与所要进行的运算有关．例如在作自然数加法时，只需要所有的自然数就够了，用不着考虑分数，负数，或其它的实数，更不需要考虑虚数，因为自然数加自然数仍然是自然数．在作自然数减法时，不但需要自然数和零，而且还需要负整数．在解整系数一元二次方程时，不但需要有理数，而且需要某些无理数，甚至还需要一部分虚数．由此可见，一个代数问题能否解决，往往牵涉到数的范围．比如，方程$x^2-2=0$在有理数范围内没有根，而在实数范围内有根$\pm\sqrt{2}$．因此，同一个问题，在不同的数的范围内，所得的结论可能是不相同的．于是，明确数的范围是十分必要的．我们经常遇到的数的范围有整数集、有理数集、实数集和复数集．如上四个重要数集分别用符号$\boldsymbol{Z}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$与$\boldsymbol{C}$表示．这四个数集有很大不同，但有一个明显的共同点：对于加法、减法、乘法运算封闭．即每个数集都具有下述性质：数集中任意两个数的和、差、积仍在数集之中．而后三个数集$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{C}$对于加

法、减法、乘法和除法（只要除数不为零）运算封闭。有些数集也具有如上几个数集所具有的性质。为了在讨论问题中能够把它们统一起来，我们引入如下一般的概念。

**定义1.1** 设$S$是复数集$\boldsymbol{C}$的一个非空子集。如果在$S$中对于加法、减法、乘法运算封闭，即对于$S$中任意两个数$a$与$b$，$a+b$，$a-b$，$a\cdot b$都在$S$内，那么$S$就叫做一个数环。

例如，上面提到的整数集$\boldsymbol{Z}$、有理数集$\boldsymbol{Q}$、实数集$\boldsymbol{R}$和复数集$\boldsymbol{C}$都是数环，但任何由正数构成的数集不是数环，因为其中可以找到两个正数$a$与$b$，则$a-b$不是正数，比如，$4-5$不是正数。同样，任何负数构成的数集也不是数环，因为两个负数的乘积是一个正数，比如$(-4)(-5)=20$是正数。

数环是很多的，下面我们再举几个例子。

**例 1** 偶数集$S=\{2n\,|\,n\in\boldsymbol{Z}\}$是一个数环。

事实上，设$m_1$，$m_2\in\boldsymbol{Z}$，那么

$$2m_1\pm 2m_2=2(m_1\pm m_2)\in S,$$

$$(2m_1)(2m_2)=2(2m_1m_2)\in S.$$

**例 2** 令$S=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,\ b\in\boldsymbol{Q}\}$，那么$S$是一个数环。

事实上，设$a_1$，$b_1$，$a_2$，$b_2\in\boldsymbol{Q}$，那么

$$(a_1+b_1\sqrt{2})\pm(a_2+b_2\sqrt{2})$$

$$=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{2}\in S,$$

$$(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})$$

$$=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}\in S.$$

因此$S$是一个数环。

**例 3** 令$S=\{a+bi\,|\,a,\ b\in\boldsymbol{Z}\}$，那么$S$是一个数环。

事实上，对于任意$a+bi$，$c+di\in S$，那么

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i\in S,$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i\in S,$$

所以$S$是一个数环。

**例 4**　$a$，$b$为任意有理数，形如：$a+b\sqrt[3]{2}$的数集不是数环，因为乘法不封闭。而数集$S=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\mid a、b、c\in \boldsymbol{Q}\}$是一个数环。证明留给读者。

数环的例子是很多的，在这些数环里，再讨论一种最重要的特殊数环，即数域。

**定义1.2**　设$F$是一个数环，如果

1）$F$中至少含有一个不等于零的数；

2）如果$a$，$b\in F$，且$b\neq 0$，则$\dfrac{a}{b}\in F$，那么$F$就叫做一个数域。

例如，上面提到的有理数环$\boldsymbol{Q}$，实数环$\boldsymbol{R}$和复数环$\boldsymbol{C}$都是数域，即有理数域、实数域和复数域。但整数环$\boldsymbol{Z}$不是数域。例1与例3的数环也不是数域，而例2是一个数域。

事实上，令$F=\{a+b\sqrt{2}\mid a、b\in\boldsymbol{Q}\}$，那么当$a=1$，$b=0$时，$a+b\sqrt{2}=1+0\sqrt{2}=1\in F$。所以1）成立。

现在设$a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$，那么$a_2-b_2\sqrt{2}\neq 0$。因为若$a_2-b_2\sqrt{2}=0$，则$b_2\sqrt{2}=a_2$，若$b_2=0$，则$a_2=0$与$a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$矛盾，故$b_2\neq 0$，则有$\dfrac{a_2}{b_2}=\sqrt{2}$也是矛盾的。于是

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\sqrt{2}\in F,$$

所以2）成立，从而$F$是一个数域．

最后证明数域的一个重要性质．

**定理1.1** 任何数域都包含有理数域$\mathbf{Q}$．

**证** 设$F$是一个数域，那么由条件1），$F$中含有一个不等于零的数$a$，而由条件 2）得，$\frac{a}{a}=1\in F$，再用1自己重复相加，就得到了所有的正整数，因而所有正整数都在$F$中．另一方面$a-a=0\in F$，再由零与任何一个正整数相减的差就得到所有负整数，因而全体负整数也在$F$中，这样$F$就包含了全体整数．而任意两个整数的商（除数不为零）就得到了全体有理数．因此，全体有理数都在$F$中，这就证明了$F$包含有理数域$\mathbf{Q}$．

由此定理，可以认为，有理数域$\mathbf{Q}$是最小的数域．

## 练　　习

1．指出下列数集哪个是数环，哪个不是数环，为什么？

1）全体奇数的数集$\{2\mathbf{n}+1\mid \mathbf{n}\in\mathbf{Z}\}$；

2）全体无理数的数集；

3）只由一个数0组成的数集$\{0\}$；

4）$S=\{a+b\sqrt{5}\mid a,\ b\in\mathbf{Z}\}$．

2．指出下列数集哪个是数域，哪个不是数域，为什么？

1）数集$\{a+b\sqrt{3}\mid a,\ b\in\mathbf{Z}\}$；

2）数集$\{a+bi\mid a,\ b\in\mathbf{Q}\}$；

3）数集$\{a+b\sqrt{5}\mid a,\ b\in\mathbf{Q}\}$．

3．试证任意数环都含有数0，而任意数域都含有0与1．

4．试证，如果一个数环$S$含有一个不等于零的数，那么$S$必含有

无穷多个数.

5. 证明两个数环的交还是一个数环. 试讨论两个数环的并是不是数环?

## §2 数学归纳法

这一节, 我们主要介绍在数学证明中常用而又重要的证明方法——数学归纳法.

由于数学归纳法与自然数集有关, 因此, 我们先回顾一下自然数集的性质.

我们用$\boldsymbol{N}$表示全体非负整数的集:

$$\boldsymbol{N}=\{0, 1, 2, 3, \cdots\},$$

用$\boldsymbol{N}^*$表示全体自然数的集:

$$\boldsymbol{N}^*=\{1, 2, 3, \cdots\}.$$

自然数集$\boldsymbol{N}^*$有如下一个最基本的性质, 即

**最小数原理** 自然数集$\boldsymbol{N}^*$的任意一个非空子集$S$必含有一个最小数: 也就是含有这样一个数$a\in S$, 对于任意$c\in S$都有$a\leqslant c$.

**注意 1** 最小数原理并不是对于任意数集都成立的. 例如, 在整数集$\boldsymbol{Z}$中就没有最小数. 同样, 全体正分数所组成的数集也没有最小数. 因为如果$a$是一个正分数, 那么$\frac{a}{2}$就是一个小于$a$的正分数.

**注意 2** 设$c$是任意一个整数, 令

$$M_c=\{x \mid x\in \boldsymbol{Z}, x\geqslant c\},$$

那么以$M_c$代替自然数集$\boldsymbol{N}^*$, 最小数原理对于$M_c$仍然成立. 即$M_c$的任意一个非空子集必含有一个最小数. 特别, $\boldsymbol{N}$的

任意一个非空子集必含有一个最小数.

根据最小数原理，可以得出数学归纳法原理.

先看一个例子

考察$N^*$中前$n$个奇数的和. 我们发现

$$1=1^2,$$
$$1+3=4=2^2,$$
$$1+3+5=9=3^2,$$
$$1+3+5+7=16=4^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因此，我们猜想，前$n$个奇数的和应该等于$n^2$，即

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \qquad (2.1)$$

那么这个猜想是不是对呢？在(2.1)中，$n$表示任意自然数，显然这是一个与自然数有关的命题. 由于自然数的个数是无限的，所以我们无法对于每个自然数逐个地加以检验. 因此，为了证明公式(2.1)对一切自然数都成立，就需要一种通过“有限”的步骤来证明对无限多个自然数都成立的方法. 数学归纳法就是这样一种数学证明方法.

**定理2.1(第一数学归纳法原理)** 设有一个与自然数$n$有关的命题. 如果

1) 当$n=1$时，命题成立；

2) 假设$n=k$时命题成立，则$n=k+1$时命题也成立，那么这个命题对于一切自然数$n$都成立.

**证** 用反证法. 假定命题不是对于一切自然数都成立，令$S$表示使命题不成立的自然数所成的集. 那么在前面的假定下，显然$S$是自然数集$N^*$的一个非空子集. 于是根据最小数原理，$S$中有最小数$h$. 由定理的条件1)可知$h\neq 1$，从而$h-1$是一个自然数. 由于$h$是$S$中的最小数，所以

$h-1\in S$．这就是说，命题对于 $h-1$ 来说成立．根据条件 2）可知，命题对于 $h$ 也成立．但是前边我们假定命题对于 $h$ 是不成立的，这就产生了矛盾，故命题对于一切自然数都成立．

利用这个定理来证明与自然数有关的命题成立时，只需证明满足定理的1），2）两条即可．这种证明问题的方法叫做**第一数学归纳法**．

现在利用第一数学归纳法证明公式（2.1）对一切自然数都成立．

1）当 $n=1$ 时，左端 $=1$，右端 $=1^2=1$，所以公式（2.1）成立．

2）假定 $n=k$ 时公式（2.1）成立，即

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2.$$

在上述假定下去证明 $n=k+1$ 时公式（2.1）成立．因为

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1)\\&=k^2+2(k+1)-1\\&=k^2+2k+1\\&=(k+1)^2,\end{aligned}$$

所以公式（2.1）对于 $n=k+1$ 时也成立．根据定理2.1，公式（2.1）对于一切自然数都成立．

有些命题是从某一个整数 $c$ 开始成立．根据最小数原理，上面的注意 2，我们取 $M_c$ 来代替自然数集 $\boldsymbol{N}^*$，这时仍然可以应用数学归纳法来证明，只要把定理2.1中的条件1）的 $n=1$ 换成 $n=c$ 就行了．

我们看一个例子．

**例 1** 试证：$n\geqslant 3$时，$n$边形的内角和等于 $(n-2)\pi$．

**证** 这个命题对于 $n=1$，2 时显然没有意义．我们从

$n=3$ 开始用数学归纳法.

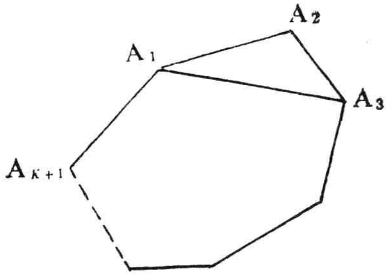


图 2.1

1) 当 $n=3$ 时，为三角形，而三角形内角和等于 $\pi=(3-2)\pi$，所以命题成立.

2) 假设 $n=k(k\geqslant 3)$ 时命题成立，我们看任意一个 $k+1$ 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}$（图2.1）. 联结 $A_1A_3$，则 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$的内角和等于三角形$A_1A_2A_3$的内角和再加上$k$边形$A_1A_3\cdots A_kA_{k+1}$的内角和. 前者等于$\pi$,后者由归纳假设等于 $(k-2)\pi$. 因此，$k+1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$的内角和等于$\pi+(k-2)\pi=(k-2+1)\pi=((k+1)-2)\pi$，命题得证.

在有些情况下，归纳假设“命题对于 $n=k$ 时成立”还不够，而需要较强的假设. 为此，我们有

**定理2.2（第二数学归纳法原理）** 设有一个与自然数 $n$ 有关的命题，如果

1) 当 $n=1$ 时命题成立；

2) 假设命题对于一切小于$k$的自然数来说成立，则命题对于 $k$ 也成立，那么命题对于一切自然数 $n$ 都成立.

**证** 用反证法. 假定命题不是对于一切自然数都成立，