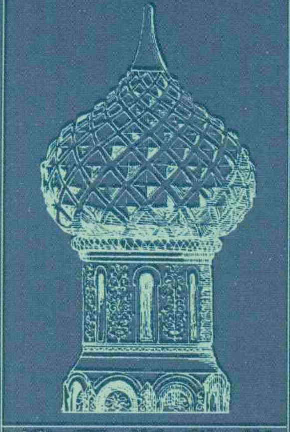
“十一五”国家重点图书



俄罗斯数学
教材选译

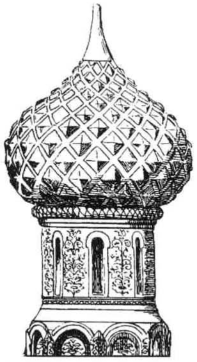
线性空间引论

（第二版）

□ Г.Е.希洛夫 著

□ 王梓坤 吴大任 陈 鹗 周学光
金子瑜 高鸿勋 曾鼎鉌 董克诚 译

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



俄罗斯数学
教材选译

“十一五”国家重点图书

● 数学天元基金资助项目

线性空间引论

(第二版)

□ Г.Е.希洛夫 著

□ 王梓坤 吴大任 陈 鹞 周学光
金子瑜 高鸿勋 曾鼎鉌 董克诚 译

XIANXING KONGJIAN YINLUN

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书是一部经典的线性代数教科书，其内容根据作者在莫斯科大学和基辅大学的授课材料整理修订而成，曾被用作苏联高等院校的教材。全书内容包括：行列式、线性空间、线性方程组、以向量为自变量的线性函数、坐标变换、双线性型与二次型、欧几里得空间、正交化与体积的测度、不变子空间与特征向量、欧氏空间里的二次型、二次曲面和无穷维欧氏空间的几何学。

本书的特点是：一、配有大量的例题和习题；二、把线性代数和解析几何巧妙融合在一起，在文中自然运用几何的术语和概念对代数的对象进行解释和描述；三、从有限维空间（线性代数）巧妙地过渡到无穷维空间（泛函分析），为读者学习泛函分析打下基础。

本书可供各级各类高等学校的理工科各专业作为教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性空间引论：第二版 /（俄罗斯）希洛夫著；王梓坤等译. —2版. —北京：高等教育出版社，2013. 7

ISBN 978-7-04-037341-7

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①希… ②王… Ⅲ. ①线性空间－研究生－教材 Ⅳ. ①O177.3

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第096978号

策划编辑 赵天夫　责任编辑 赵天夫　封面设计 赵 阳　版式设计 范晓红

责任校对 孟 玲　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	涿州市星河印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　本	787mm×1092mm 1/16		
印　张	16.25	版　次	1957年10月第1版
字　数	320千字		2013年7月第2版
购书热线	010-58581118	印　次	2013年7月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	49.00元

物 料 号　37341-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版,

面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

第 2 版序言

本书是根据著者近年在以罗蒙诺索夫命名的国立莫斯科大学和以舍夫琴科命名的国立基辅大学里所进行的课堂讲授和讨论班的材料, 加以修订而成的。

这本书的内容包括线性代数的必读部分和它在分析上若干应用的阐述, 以及一系列的和它们接近的问题 (用小号字排印的), 这些问题, 可以用于专题讨论和家庭作业。

与这本书的基本内容相配合的, 还有一系列的习题。在很大程度上, 这些习题可以训练专门技巧; 它们一般是说明和推广课本中的主要材料, 也可以用于专题讨论。部分习题采自各种的习题集, 其中我们必须提到 Д. К. 法捷耶夫与 И. С. 索明斯基的《高等代数习题集》和 Н. М. 京特与 Р. О. 库兹明的《高等数学习题集》。

在第 2 版里, 有些地方的内容作了重新安排, 也有一点点补充 (关于不相容组和最小二乘方法以及一系列的新习题)。关于无穷维空间的叙述, 省略了很多: 在第 1 版的第十二、十三、十四三章中, 现在只留下第十二章, 这里面是一些关于无穷维欧氏空间的几何性质的问题 (傅里叶级数积分方程的几何解释)。第 1 版里原有的关于度量空间和有模空间的部分, 现在删掉了, 因为它们脱离了本书的主要方向; 这个问题在现在的教材里 (特别是在 А. Н. 柯尔莫戈洛夫与 С. В. 佛明的《函数论与泛函分析初步》[①]一书里) 已经有相当多的完备的叙述。

作者对于第 1 版的编辑 Н. В. 叶菲莫夫以及 Д. А. 赖科夫表示诚恳的感谢, 前者对本书的改进给了很多的帮助, 后者读完了本书的初稿并且提供了一系列的宝贵的意见。

Г. 希洛夫

[①] 中译本: А. Н. 柯尔莫戈洛夫, С. В. 佛明. 函数论与泛函分析初步. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2006 —— 译者.

郑重声明

目　录

第一章

行列式

§1. 线性方程组

我们在这一章和下两章里研究线性方程组.

一般线性方程组的形状为:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n=b_k.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

这里的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 表示待定的未知数 (注意: 在此并未假定未知数的个数必须等于方程的个数). 我们把 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{kn}$ 叫作方程组的系数. 各系数的第一下标表示它所在的方程的号码, 第二下标表示具有此系数的变量的号码①. 方程组 (1) 右端的量 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 叫作方程组的**常数项**, 它们和系数都假定为已知的.

若一组数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$, 代替了方程组 (1) 中的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 之后, 使这组的每一个方程都变成恒等式, 则这组数就叫作方程组的解②.

并不是具形状 (1) 的每一个线性方程组都有解. 例如方程组

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2=5,\\ 2x_1+3x_2=6\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

就没有解. 实际上, 将任何数 c_1,c_2 代替了未知数 x_1,x_2 之后, 都使 (2) 里两式的左端相同, 而右端却不相同. 因此, 这样代替之后, 方程组 (2) 的两个方程不能同时变

①因此, 例如 a_{34} 就应当读作 "a, 3, 4"(而不是 "a, 三十四").

②应当着重指出: 这一组数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 构成一组解 (而不是 n 个解).

成恒等式.

若具形状 (1) 的方程组有解 (只要有一组), 就称它为*相容的*; 若没有解, 就称它为*不相容的*.

相容的方程组可能有一组解, 也可能有多组解. 在后一情况下, 为了区别不同组的解, 我们在解的右上方的括弧中写出它们的号码; 例如第一组解 $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \cdots, c_n^{(1)}$, 第二组解 $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \cdots, c_n^{(2)}$ 等等. 在两组解 $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \cdots, c_n^{(1)}$ 及 $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \cdots, c_n^{(2)}$ 之中, 只要 $c_i^{(1)}$ 中至少有一个与对应的 $c_i^{(2)}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 不同, 就把这两组解看作是不同的. 例如方程组

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 0, \\ 4x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

有不同的解 $c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = 0, c_1^{(2)} = 3, c_2^{(2)} = -2$ (还有无穷多个其他的解). 如果相容的方程组有唯一的一组解, 就称它为*确定的*; 若至少有两组不同的解, 就称它为*不定的*.

现在我们可以概括出研究方程组 (1) 时会发生的一些基本问题:

I. *判别方程组 (1) 是相容的或不相容的.*

Ⅱ. *若方程组 (1) 是相容的, 则判别它是否确定的.*

Ⅲ. *若方程组 (1) 是相容的而且是确定的, 则求出它的唯一解.*

Ⅳ. *若方程组 (1) 是相容的而且是不定的, 则写出它全部的解.*

行列式的理论是研究线性方程组的基本数学工具; 我们现在就去叙述它.

§2. n 阶行列式

1. 取一个方 (矩) 阵, 即由 n^2 个数 a_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 所构成的一个表:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

表示矩阵 (4) 的行或列的个数的整数 n, 称为它的阶. 数 a_{ij} 称为方阵的*元素*, 元素 a_{ij} 中的第一个及第二个下标, 依次表示它所在的行及列的号码.

在矩阵 (4) 中, 取任意 n 个在不同的行又在不同的列的元素, 即: *在每一行每一列中取一个而且只取一个元素*. 这些元素的乘积可以写成如下形状:

$$a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \cdots a_{\alpha_n n}. \tag{5}$$

实际上, 可以这样进行: 在矩阵 (4) 的第一列选取一个元素作为第一个因子; 若用 α_1 表示这个元素所在的行的号码, 则这个元素的下标是 α_1 及 1. 同样的, 由第二列选取一个元素作为第二个因子, 它的下标是 α_2 及 2, 其中 α_2 表示这个元素所在的行的号码. 其余类推. 于是, 在乘积 (5) 的因子中各元素的下标 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的次序对应于它们的列下标的递增的次序.

按照条件, 元素 $a_{\alpha_1 1}, a_{\alpha_2 2}, \cdots, a_{\alpha_n n}$ 在矩阵 (4) 的不同行中, 每行一个, 所以这些下标 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 全不相同, 而它们是 $1, 2, \cdots, n$ 的一种排列.

在下标的排列是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的序列里, 当一个大的下标在一个小的下标前边时, 我们就说有一个 "逆序", 全体 "逆序" 的个数, 我们用 $N(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 表示.

例如在四个数字的排列 2, 1, 4, 3 里, 有两个逆序 (2 在 1 前, 4 在 3 前), 因此

$$N(2,1,4,3) = 2.$$

在排列 4, 3, 1, 2 里, 有五个逆序 (4 在 3 前, 4 在 1 前, 4 在 2 前, 3 在 1 前, 3 在 2 前), 于是

$$N(4,3,1,2) = 5.$$

如果在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的序列里, 逆序的个数是偶数, 就在乘积 (5) 前面添上 "+" 号; 如果是奇数, 就在乘积的前面添上 "−" 号. 换句话说, 我们规定: 在每一个像 (5) 那样的乘积的前方, 添上一个符号

$$(-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)}.$$

从所给的 n 阶矩阵, 作一切像 (5) 那样的乘积, 它们的个数等于 $1, 2, \cdots, n$ 的一切可能的排列的个数, 即等于 $n!$.

现在我们引进下述的定义:

取 $n!$ 个形状如 (5) 的乘积, 每个乘积按照上述规则添上确定的符号. 它们的代数和称为方阵 (4) 的行列式:

$$D = \sum (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \cdots a_{\alpha_n n}. \tag{6}$$

今后, 凡具有形状 (5) 的乘积就称为行列式的项, 矩阵 (4) 的元素 a_{ij} 称为行列式的元素.

与矩阵 (4) 相对应的行列式, 可用下述的任意一个符号来表示:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det[a_{ij}] = \det[a_{ij}]_{i,j=1,2,\cdots,n}. \tag{7}$$

例如对于 2 阶及 3 阶行列式, 我们有下述的表达式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ & -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}. \end{aligned}$$

我们取含两个未知数的两个线性方程所构成的一组为例, 来说明在解这个线性方程组时行列式的作用. 若所给的方程组为

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2,$$

则用普通的方法, 每次消去一个未知数, 即得到公式

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

但须假定上述分式的分母不为零. 上述分式的分子与分母可以表示为二阶行列式:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

对于含有任意多个未知数的方程组的解, 相似的公式成立 (参看 §7).

2. 为了确定行列式某一项的符号, 其规则还可以另外用几何术语来叙述.

在矩阵 (4) 里, 可以按照元素的号码标出正的方向, 沿着行的正方向是从左到右, 沿着列的正方向是自上而下. 同时, 对联结矩阵的任意两个元素的斜线段, 也可以给它规定方向: 联结元素 a_{ij} 与 a_{kl} 的线段, 如果右端低于左端就叫作*正斜率线段*; 如果右端高于左端就叫作*负斜率线段*. 今设想在矩阵 (4) 中, 把乘积 (5) 里的元素 $a_{\alpha_1 1}, a_{\alpha_2 2}, \cdots, a_{\alpha_n n}$ 逐对联结, 选出其中一切具有负斜率的线段. 若这些线段的个数是偶数, 则在乘积 (5) 的前方添上 "+" 号, 若是奇数, 则添上 "−" 号.

例如, 在 4 阶方阵中, 乘积 $a_{21}a_{12}a_{43}a_{34}$ 的前面应当添上 "+" 号, 因为在矩阵中, 有两个负斜率线段联结所给乘积的元素:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix};$$

但在乘积 $a_{41}a_{32}a_{13}a_{24}$ 的前面, 应当添上 "−" 号, 因为在矩阵中有五个负斜率线段联结此乘积的元素:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

在这些例子中, 联结所给项里诸元素的负斜率线段的个数, 等于在所给项里诸元素第一个下标的排列中的 "逆序" 的个数: 在第一例中, 第一个下标依次为 2, 1, 4, 3, 有两个 "逆序"; 在第二例中, 第一个下标依次为 4, 3, 1, 2, 有五个 "逆序 ".

让我们来证明: *确定行列式各项符号的第二个方法与第一个方法是一致的*. 为此只要证明: 所给项中诸元素的第一个下标的 "逆序" 的个数 (当第二个下标按自然数次序排列时) 总等于联结矩阵里所给项中诸元素的负斜率线段的个数. 这几乎是

不言而喻的; 因为若联结元素 $a_{\alpha_i i}$ 及 $a_{\alpha_j j}$ 的线段的斜率是负的, 这就表示在 $i<j$ 时, $\alpha_i>\alpha_j$, 也就是在第一个下标的排列中, 有一个 "逆序" 存在.

习题

1. 在六阶行列式中, 下面的项应当带有什么符号?

a) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$,

b) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$.

答 a) +, b) +.

2. 在四阶行列式中, 写出所有包含因子 a_{23} 而且带有负号的项.

答 $a_{11}a_{32}a_{23}a_{44}$, $a_{41}a_{12}a_{23}a_{34}$, $a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}$.

3. n 阶行列式的项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 应当带有什么符号?

答 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

§3. n 阶行列式的性质

1. **转置运算** 将行列式 (7) 各行分别代以相同号码的列, 所得的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{8}$$

叫作行列式 (7) 的*转置行列式*. 今证明转置行列式的值与原来行列式的值相等. 实际上, 行列式 (7) 及行列式 (8) 显然是由相同的项构成; 因此, 我们只要证明: 在行列式 (7) 及 (8) 中, 相同的项具有相同的符号. 从一个行列式得到它的转置行列式, 显然是绕对角线 (在空间) 转 180° 的结果. 对于这个转动, 每个负斜率线段 (例如它与矩阵的行所成的角是 $\alpha<90°$) 仍变成一个负斜率线段 (即它与方阵的行所成的角是 $90°-\alpha$). 因此, 联结每一项的元素的负斜率线段的个数, 经过转置之后, 并不改变, 因而这一项的符号也不改变. 一切项的符号不变, 因而行列式的值也不变.

此处所证明的行列式的性质, 说明了它的行和列具有相同的作用. 因此, 我们以后专就行列式的列的性质加以叙述与证明.

2. **反对称性质** *关于列的反对称性质是指行列式下面的性质: 当两列互换时, 行列式变号.* 我们先考虑行列式两邻列互换的情形. 例如取第 j 列及第 $j+1$ 列: 它们互换之后, 所得的行列式, 显然就是由原来行列式中的项所组成. 我们取原来行列式的任意一项, 这一项的因子中有第 j 列及第 $j+1$ 列的元素, 若联结这两元素的线段的斜率是负的, 则经过列的互换之后, 它们联线的斜率变成正的; 反过来, 原来的斜率若是正的, 互换之后变成负的. 但是对于这一选定的项, 各对元素的其他联线, 在两列互换之后, 斜率的正负号不变. 所以, 在两列互换之后, 联结所给项的元素的负斜率线段的个数, 显然增加或减少一个; 于是行列式的每一项在两列互换之后, 符

号改变, 而整个行列式也是如此.

设互换的两列不是相邻的, 例如, 是第 j 列及第 k 列 $(j<k)$[①], 而且在它们之间, 设有 m 个其他的列, 则这个互换可以按下述的顺序, 逐次把相邻的两列互换来完成: 第 j 列首先与第 $j+1$ 列互换, 然后与第 $j+2$ 列, $\cdots$, 第 k 列互换; 第二步使第 $k-1$ 列 (原第 k 列) 与第 $k-2$ 列, 第 $k-3$ 列, $\cdots$, 第 j 列 (原第 $j+1$ 列) 互换. 总共经过 $m+1+m=2m+1$ 个相邻列的互换; 每次互换, 行列式变号一次, 所以, 最后所得的行列式与原来的符号相反 (不论 m 是什么整数, $2m+1$ 总是奇数).

推论 *行列式若有两列相同就等于零.*

因为将这相同的两列互换, 行列式不变; 但是另一方面, 按照前面证明的性质, 它又应当变号. 因此, $D=-D$, 故 $D=0$.

习题

试证明: 根据 §2 的定义, 行列式的 $n!$ 个项中, 恰好一半 (即 $\frac{n!}{2}$) 应添上 "+" 号, 另一半应添上 "−" 号.

提示 考察所有元素皆是 1 的行列式.

3. **行列式的线性性质** 我们把这个性质叙述如下: *若行列式 D 的第 j 列的所有元素都是两项的线性组合:*

$$a_{ij}=\lambda b_i+\mu c_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

(λ 及 μ 是固定的数), 则行列式 D 等于两个行列式的线性组合:

$$D=\lambda D_1+\mu D_2, \tag{9}$$

在这里, 在 D_1,D_2 两个行列式中, 除去第 j 列以外, 所有的列都与行列式 D 相同, 而行列式 D_1 的第 j 列则是由 b_i 所构成, 行列式 D_2 的第 j 列是由 c_i 所构成.

实际上, 行列式 D 的一切项, 能表示成如下形状:

$$\begin{aligned}a_{\alpha_1 1}a_{\alpha_2 2}\cdots a_{\alpha_j j}\cdots a_{\alpha_n n}&=a_{\alpha_1 1}a_{\alpha_2 2}\cdots(\lambda b_{\alpha_j}+\mu c_{\alpha_j})\cdots a_{\alpha_n n}\\&=\lambda a_{\alpha_1 1}a_{\alpha_2 2}\cdots b_{\alpha_j}\cdots a_{\alpha_n n}+\mu a_{\alpha_1 1}a_{\alpha_2 2}\cdots c_{\alpha_j}\cdots a_{\alpha_n n}.\end{aligned}$$

将所有如上的式中的第一项聚在一起 (分别添上原来行列式里的对应项的符号), 并且把 λ 提出括弧之外, 则在括弧内显然得到行列式 D_1; 同样的将第二项聚在一起 (分别添上符号), 并且把 μ 提出括弧之外, 即得到行列式 D_2. 于是公式 (9) 成立.

为了方便起见, 还可以把这个公式写成几种别的形状. 设 D 表示任意一个固定的行列式. $D_j(p_i)$ 表示用数 p_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 代替行列式 D 的第 j 列的元素后所得到的行列式. 那么我们所证明的等式 (9) 可以写成下面的样子:

$$D_j(\lambda b_i+\mu c_i)=\lambda D_j(b_i)+\mu D_j(c_i).$$

行列式的线性性质很容易地推广到如下的情形: 即第 j 列的每个元素, 不是两个数, 而是任意多个数的线性组合:

$$a_{ij}=\lambda b_i+\mu c_i+\cdots+\tau f_i.$$

---

①此是译者增注.