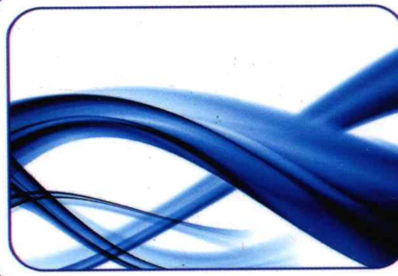
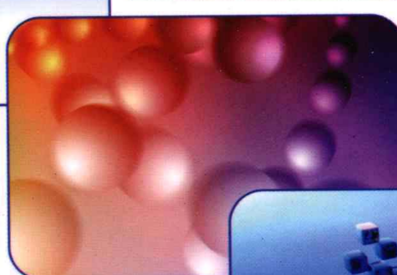
普通高等教育“十二五”规划教材

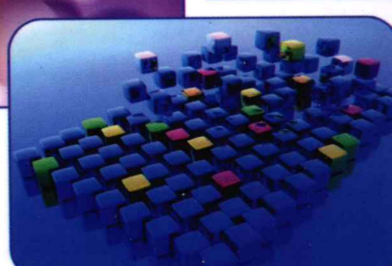


公共基础课系列教材

线性代数

朱玉清 主编





科学出版社

内 容 简 介

本书是根据普通高等教育本科线性代数课程的教学基本要求编写而成的. 内容包括行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵和二次型、线性空间与线性变换以及与这些内容相应的数学实验. 书中每节后均配备有大量的练习题，每章后又配备了总复习题，书末附有习题参考答案，便于学生及时巩固所学基本概念、基本理论的同时，也注意到了硕士研究生入学考试的需要.

本书可供普通高等院校非数学专业的学生所用，也可供自学者和科技工作者阅读.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/朱玉清主编. —北京：科学出版社，2012
（普通高等教育“十二五”规划教材·公共基础课系列教材）
ISBN 978-7-03-035085-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①朱… Ⅲ.①线性代数-高等职业教育-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 152980 号

责任编辑：周 恢 / 责任校对：马英菊
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京九天志诚印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 7 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2012 年 7 月第一次印刷 印张：17 1/4
字数：409 000

定价：30.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈九天志诚〉）
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135235（VP04）

前　　言

线性代数在自然科学、管理科学、工程技术诸多领域都有广泛的应用."线性代数"课程是高等院校各相关专业大学生的必修的一门重要的公共基础课程,也是硕士研究生入学的必考课程.本书编写过程中,力求内容、体系符合我国高等教育本科线性代数课程教学内容和课程体系改革的总体目标,体现"厚基础、宽口径、高素质"人才的培养要求.同时,也注意到线性代数理论性强,教学时数少这一实际问题,并兼顾学生报考硕士研究生的需要.在教材体系、内容和例题的选择上,吸取了国内外优秀教材的优点,并融进了作者二十余年"线性代数"课程的教学经验.

本书内容包括:行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵和二次型、线性空间与线性变换及数学实验等内容.考虑到初学者对弄懂这些抽象的理论比较困难,更不易掌握这些概念与理论的内在规律性,各章节对重要定义、定理、方法等进行了重点陈述和总结注释,同时在每节后均配备大量的练习题,每章后又配备了总复习题,以便于学生及时巩固所学基本概念、基本理论.

本书在编写时突出以下几个特点:

(1) 将线性代数理论与实际应用问题科学整合.重组教学内容,理顺线性代数的基本概念和基本内容,深入研讨线性代数的思想,以工科类本科线性代数课程的教学基本要求为本,注重吸收以往教材的精华,但不拘泥以往教材的内容和形式,淡化定理的推导,强调方法的训练,充分体现工程实际应用.

(2) 将先进的计算机软件技术融入线性代数课程教学.充分挖掘现代信息技术的潜力,注重利用数学软件开拓学生数学思维,使其进行创新性、研究性探索实践;注重利用数学软件加深对概念的理解和一些简单应用,有计划地安排学生通过亲手实验去发现知识、获取知识,弥补传统教学体系在当前数学教学体系上的不足.

(3) 加强线性代数与几何的联系.部分几何内容可作为线性代数有关内容,如二、三阶行列式的意义,二、三维向量组的线性相关性,线性变换,三元线性方程组理论等的直观背景等,充分利用几何印象来加深学生对抽象的代数概念的理解和掌握,同时对培养学生的应用线性代数知识解决实际问题有一定的帮助.

具体教学建议:

完成本书第 1～4 章基本的教学要求,需 32～36 学时;第 5 章需 6 学时,可供对线性代数有较高要求的专业选学;第 6 章线性代数实验需 6 学时,既可在相关章节中穿插演练,也可集中学习.

本书由朱玉清任主编,并对全书进行统稿.具体编写情况是:梁瑛编写第 1 章和第 5 章;王满编写第 2 章;朱玉清编写第 3 章;连冬艳编写第 4 章;于育民编写第 6 章.

本书的编写与出版得到了南阳理工学院教务处和数理学院领导的大力支持和帮助，在此一并表示衷心感谢！

在本书的编写过程中，参考了许多同行专家、学者的部分成果，在此也表示衷心感谢.

由于编者水平所限，书中疏漏和错误再所难免，敬请各位专家、学者不吝赐教，欢迎读者朋友及时质疑.

目　录

第 1 章　行　列　式

线性代数是高等学校的一门重要基础课，也是中学代数的继续和发展. 行列式的概念是在解线性方程组的过程中产生的，它是一种常用的计算工具，在数学的许多分支中都有广泛地应用. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质、计算方法以及 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

§1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

对于给定的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1-1}$$

其中 x_1, x_2 为未知量；$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 为未知量的系数；b_1, b_2 为常数项.

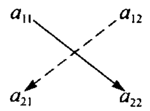
利用消元法求解，分别消去 x_1 和 x_2，得同解方程组

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases},$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得到方程组的唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

解的表达式中分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得，为了便于记忆上述公式，以上式中的分母为例，将 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 按其在方程组中出现的位置相应地排成一个方形表，



乘积 $a_{11}a_{22}$ 是这个方形表中从左上角到右下角的对角线（称为**主对角线**）上的两数之积，乘积 $a_{12}a_{21}$ 是另一对角线（称为**次对角线**）上的两数之积. 主对角线上两数的积减去次对角线上两数的积，即 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为上面方形数表所确定的二阶行列式，记做

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}.$$

上式右端称为**二阶行列式的展开式**. 数 a_{ij} $(i=1,2;j=1,2)$称为行列式的**元素**，横排的称为**行**，竖排的称为**列**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列.

主对角线的两个元素的乘积，减去次对角线的两个元素的乘积，等于二阶行列式的值，这种做法称为二阶行列式**对角线法则**.

利用二阶行列式的概念，方程组(1.1-1)解中的 x_1，x_2 的分子也可写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

若记

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad \boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则，当 $\boldsymbol{D}\neq 0$ 时，线性方程组(1.1-1)的解可表示为

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}},x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}$$

注意：行列式 $\boldsymbol{D}$ 是由线性方程组(1.1-1)的系数所确定的二阶行列式，称为**系数行列式**，行列式 $\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 是以常数项 b_1，b_2 分别替换行列式 $\boldsymbol{D}$ 中的第 1 列和第 2 列的元素所得到的两个二阶行列式. 利用行列式解二元线性方程组的方法称为二元线性方程组的**克莱姆(Cramer)**法则.

【例 1.1】 计算下列各行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{vmatrix}$.

解

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=5\times(-2)-4\times 1=-14$；

(2) $\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{vmatrix}=1\times 2-x\cdot x=2-x^2$.

【例 1.2】 用克莱姆法则解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ 2x_1+7x_2=8 \end{cases}.$$

解 先分别计算行列式 $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=7-4=3,$$

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}=7-16=-9,\quad \boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}=8-2=6.$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}=\frac{-9}{3}=-3,x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}=\frac{6}{3}=2.$$

【例 1.3】 设行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} k^2 & k \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$,问

(1) k 为何值时,$\boldsymbol{D}=0$; (2) k 为何值时,$\boldsymbol{D}\neq 0$.

解 因

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} k^2 & k \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=k^2-2k=k(k-2),$$

所以

(1) 当 $k=0$ 或 $k=2$ 时,$\boldsymbol{D}=k^2-2k=0$;

(2) 当 $k\neq 0$ 且 $k\neq 2$ 时,$\boldsymbol{D}=k^2-2k\neq 0$.

1.1.2 三阶行列式

定义 1.1 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

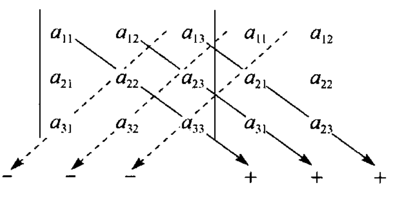
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.1-2}$$

称式(1.1-2)的左端为数表所确定的**三阶行列式**,右端为**三阶行列式的展开式**.

三阶行列式的展开式含有 6 项,每一项取自不同行不同列的三个元素的乘积,其规律可按下图方法记忆(**对角线法则**):图中三条实线上的三个元素的乘积都带正号,看作是平行于主对角线的连线,位于三条虚线上的三个元素的乘积都带负号,看作是平行于次对角线的连线.



类似于二元线性方程组的克莱姆法则,对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad \boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

若系数行列式 $\boldsymbol{D}\neq 0$,则该方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}, \quad x_2 = \frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}, \quad x_3 = \frac{\boldsymbol{D}_3}{\boldsymbol{D}}.$$

【例 1.4】 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\times5\times9+2\times6\times7+4\times8\times3-7\times5\times3$$
$$-4\times2\times9-1\times6\times8 = 45+84+96-105-72-48=0.$$

【例 1.5】 用行列式解三元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2+x_3=-2 \\ x_1-x_2-x_3=4 \\ -x_1+2x_2+6x_3=1 \end{cases}.$$

解 由于

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -36, \quad \boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -108,$$

$$\boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 90, \quad \boldsymbol{D}_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -54.$$

因此,方程组的解为

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}} = 3, \quad \boldsymbol{x}_2 = \frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}} = -\frac{5}{2}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \frac{\boldsymbol{D}_3}{\boldsymbol{D}} = \frac{3}{2}.$$

从上述讨论可以看出,引入行列式概念之后,二元、三元线性方程组的解可以公式化. 为了把这个思想推广到 n 元线性方程组,需要定义 n 阶行列式的概念.

习 题 1.1

1. 计算下列二阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & a+b & a+b+c \\ a & 2a+b & 3a+2b+c \end{vmatrix}$.

3. 用行列式解下列方程组.

(1) $\begin{cases} x+4y=2 \\ 3x+5y=3 \end{cases}$;　　(2) $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=8 \\ x_1+x_2+x_3=6; \\ x_1+2x_2+x_3=8 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1+3x_2=1 \\ 3x_1-2x_2=0 \end{cases}$;　　(4) $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=1 \\ 3x_2+2x_3=1. \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$

4. 已知 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$,求 $f(x)$的展开式.

5. 设 a,b 为实数,问 a,b 为何值时,行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$.

§1.2　n 阶行列式的概念

对角线法则只适用于二、三阶行列式.从二、三阶行列式的定义可以看出,行列式的值是一些“项”的代数和.例如三阶行列式的值中,每一项都是三个元素的乘积,并且这三个元素取自不同行与不同列,总项数以及每一项相应的正负号的确定有一定的规律,为了弄清这一规律,我们先介绍全排列及其逆序数的概念及性质.

1.2.1　全排列与逆序数

定义 1.2　由 n 个不同的元素所组成的一个有序数组,称为一个 **n 级全排列**,简称为**排列**.

例如,1432 和 4321 都是 4 级排列,而 345126 是一个 6 级排列.

按自然数顺序由小到大的排列,称为**自然排列**或**标准排列**.并规定自然排列的次序为**标准次序**.

定义 1.3　在排列 $p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n$ 中,如果 $p_s>p_t$,称 p_s 与 p_t 构成一个**逆序**.排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中所有逆序的总数称为该排列的**逆序数**,记为

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n).$$

在自然排列中没有逆序,其逆序数为 0.逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为

偶数的排列称为**偶排列**.

根据上述定义,可按如下方法计算排列的逆序数.

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的数有 t_i 个,就说元素 p_i 的逆序数为 t_i,全体元素逆序数的总和就是这个排列的逆序数,即

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i.$$

【例 1.6】 计算下列排列的逆序数,并判断排列的奇偶性.

(1) 31452;　　(2) 35412;

(3) $n(n-1)\cdots 21$;　　(4) $(2n)(2n-2)\cdots 42(2n-1)(2n-3)\cdots 31$.

解 (1) 在排列 31452 中

3 排在首位,逆序数为 0;

1 的前面比 1 大的数有一个,它是 3,故逆序数为 1;

4 的前面没有比它大的数,逆序数为 0;

5 是最大数,逆序数为 0;

2 的前面比 2 大的数有三个,它们是 3,4,5,故逆序数为 3.

将上述结果表示成如下形式

$$\begin{array}{cccccc} \text{排列} & 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_i & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

因此,这个排列的逆序数为 $\tau(31452)=0+1+0+0+3=4$,该排列为偶排列.

(2) 由于

$$\begin{array}{cccccc} \text{排列} & 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_i & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}$$

因此,这个排列的逆序数为 $\tau(35412)=0+0+1+3+3=7$,该排列为奇排列.

(3)由于

$$\begin{array}{cccccccc} \text{排列} & n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_i & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{array}$$

因此,这个排列的逆序数为

$$\tau[n(n-1)\cdots 21]=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,排列是偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时,排列是奇排列.

(4)由于

$$\begin{array}{ccccccccccc} \text{排列} & 2n & 2n-2 & \cdots & 4 & 2 & 2n-1 & 2n-3 & \cdots & 3 & 1 \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ t_i & 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 & 1 & 3 & \cdots & 2n-3 & 2n-1 \end{array}$$

因此,这个排列的逆序数为

$$\begin{aligned}&\tau((2n)(2n-2)\cdots42(2n-1)(2n-3)\cdots31)\\&=0+1+2+\cdots(n-2)+(n-1)+1+3+\cdots+(2n-3)+(2n-1)\\&=\frac{n(n-1)}{2}+n^2=\frac{n}{2}(3n-1).\end{aligned}$$

当 $n=4k$ 或 $4k+3$ 时,排列为偶排列;当 $n=4k+1$ 或 $4k+2$ 时,排列为奇排列.

定义 1.4 将一个排列中某两个数 p_s 与 p_t 的位置互换,而其余的数不动,就得到另一个排列,这样的变换称为**对换**,记为 (p_s,p_t). 将相邻两个数对换,称为**相邻对换**.

例如,对换排列 31452 中元素 1 和 5 的位置后,得到排列 35412. 排列 31452 的逆序数为 4,是偶排列,而排列的 35412 逆序数为 7,是奇排列. 一般地,有下述结论.

定理 1.1 任一排列经过一次对换后奇偶性改变.

证明 首先证明相邻对换情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$,其逆序数为 τ. 对换 a 与 b,变为新排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$,设其逆序数为 τ_1. 显然,排列中元素 $a_1,\cdots,a_l,b_1,\cdots,b_m$ 的逆序数经对换后没有改变,而元素 a 与 b 的逆序数改变.

当 $a<b$ 时,对换后,a 的逆序数增加 1,而 b 的逆序数不变,此时 $\tau_1=\tau+1$. 当 $a>b$ 时,对换后,a 的逆序数不变,而 b 的逆序数减少 1,此时 $\tau_1=\tau-1$. 而此时 $\tau\pm1$ 与 τ 的奇偶性不同.

所以,排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 的奇偶性改变.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_k bc_1\cdots c_s$,$a$ 与 b 之间相隔 k 个数,要实现 a 与 b 的对换,可先将 a 与 b_1 作相邻对换,再将 a 与 b_2 作相邻对换,照此下去,经过 $k+1$ 次相邻对换,将排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_k bc_1\cdots c_s$ 变成 $a_1\cdots a_l b_1\cdots b_k bac_1\cdots c_s$. 然后,再把 b 依次与 $b_k,\cdots,b_1$ 作 k 次相邻对换,变成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_k ac_1\cdots c_s$. 这样,经过 $2k+1$ 次相邻对换,实现了 a 与 b 的对换,而每次相邻对换改变排列的奇偶性,所以这两个排列的奇偶性正好相反.

1.2.2 行列式的定义

为了把二阶、三阶行列式的概念推广到一般的 n 阶行列式,下面先研究三阶行列式展开式的结构. 三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

从展开式可以看出:

(1) 三阶行列式的展开式共有 $3!=6$ 项,其中每一项均是取自不同行不同列的三个元素的乘积;

(2) 当该项三个元素的行标按标准次序排列时,其前面的正负号取决于列标排列的奇偶性,当列标排列为奇排列时,该项前面为负号,列标排列为偶排列时,该项前面为正号.

故三阶行列式的展开式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3},$$

其中 $\sum$ 是对 1,2,3 的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

把上述定义推广到一般情形,有

定义 1.5 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 ***n* 阶行列式**,简记做 $\det(a_{ij})$,其中横排和纵排分别称为它的行和列. 它表示由所有不同行不同列的 n 个元素的乘积(称为**通项**)$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的代数和,其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 某个 n 级排列,共有 $n!$ 项. 每项前的正负号规定为当 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 是偶数时取正号,当 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 是奇数时取负号. 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

这里 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 是对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和.

按此定义的二阶、三阶行列式,与 § 1.1 中用对角线法则定义的二阶、三阶行列式,显然是一致的.

特别地,当 $n=1$ 时,一阶行列式 $D=|a_{11}|=a_{11}$,注意不要与绝对值记号相混淆.

【例 1.7】 在六阶行列式的展开式中,项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 应带什么符号?

解 由于

$$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65} = a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65},$$

而元素列标排列 431265 的逆序数为 6,所以 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 前面应带正号.

【例 1.8】 证明若 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上的元素为零,则该行列式的值为零.

证明 因为 n 阶行列式的一般项为 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,即每一项都是取自不同行不同列 n 个元素的积. 而 n 阶行列式中共有 n^2 个元素,若有 n^2-n 个以上元素为零,则不为零的元素的个数小于 n. 从而,在行列式展开式中每一乘积项的 n 个元素中至少有一个元素为零,所以所有的乘积项均为零. 故该行列式的值为零.

1.2.3 几种特殊的行列式

1. 三角行列式

下三角行列式:主对角线右上方元素全为零的行列式称为下三角行列式. 下三角行列

式的值等于其主对角线上元素的乘积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明 由于当 $j>i$ 时, $a_{ij}=0$, 故 $\boldsymbol{D}$ 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i} 的下标应有 $p_i\leqslant i$, 即 $p_1\leqslant 1, p_2\leqslant 2, \cdots, p_n\leqslant n$.

在所有 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中, 能满足上述关系的排列只有一个, 即自然排列 $12\cdots n$, 所以 $\boldsymbol{D}$ 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$, 由于 $\tau(12\cdots n)=0$, 故

$$\boldsymbol{D} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上三角行列式: 主对角线左下方元素全为零的行列式称为上三角行列式. 上三角行列式的值等于其主对角线上元素的乘积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明同下三角行列式的证明. 请读者自证.

2. 对角行列式

主对角线上方、下方的元素全为零的行列式称为对角行列式. 对角行列式既是上三角行列式, 又是下三角行列式. 其值等于主对角线上元素的乘积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

【例 1.9】 证明 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中未写出的元素都是 0.

证明 若记 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}$, 则由行列式定义得

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\tau}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\tau}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中 τ 为排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数，即

$$\tau = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

【例 1.10】 求多项式

$$f(x) = \begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

中 x^4 项的系数.

解 $f(x)$中含 x 因子的元素有 $a_{11}=5x, a_{21}=x, a_{22}=x, a_{33}=x, a_{41}=x, a_{44}=2x$，因此，含有 x 因子的元素 a_{ij_i} 的列标只能取 $j_1=1, j_2=1,2, j_3=3, j_4=1,4$.

于是含 x^4 的项中元素列下标只能取 $j_1=1, j_2=2, j_3=3, j_4=4$，相应的 4 个元素列标排列只有一个自然顺序排列 1234，故含 x^4 的项为

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = (-1)^0 5x\cdot x\cdot x\cdot 2x = 10x^4,$$

故 $f(x)$中 x^4 的系数为 10.

定义 1.5 中，每一项相乘的 n 个元素的行标固定取 n 级自然排列. 事实上，数的乘法是可以交换的，这 n 个元素相乘的次序是可以改变的，故 n 阶行列式通项一般可写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 级排列. 问题是此时该项的正负号如何确定?

由于排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 可经若干次对换变成自然排列 $12\cdots n$，因此适当交换 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中元素的位置可得到 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，即

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} = a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

由于每交换式 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中的两个元素一次，对应的行标排列和列标排列均做了一次对换，因而它们的逆序之和的奇偶性不变，于是有

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} = (-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)} = (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)},$$

而 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$ 正是行列式展开式中 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的符号，从而有

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

据此，定义 1.5 还可以有下列表达式.

(1) 设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是取定的某个 n 级排列，则

$$\boldsymbol{D} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

特别的，取 $i_1i_2\cdots i_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 标准排列时，此即为定义 1.5.

(2) 设 $j_1j_2\cdots j_n$ 是取定的某个 n 级排列，则

$$\boldsymbol{D} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

特别的，取 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 标准排列时，有

$$\boldsymbol{D} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}.$$