高等教育"十二五"规划教材

微积分（下册）

Calculus

陆伟民 郁大刚 主编

科学出版社

高等教育“十二五”规划教材

微　积　分

（下册）

陆伟民　郁大刚　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是编者总结多年本科数学教学经验，探索民办高等院校、独立学院数学教学发展动向，分析同类教材发展趋势，并结合“微积分课程教学基本要求”编写而成的. 本书遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近实际应用的原则，并充分考虑了微积分学课程教学时数减少的趋势，着重突出微积分学的基本思想和基本方法. 为了更好地与中学数学教学相衔接，适当加入了一些中学数学的基础内容.

《微积分》分上、下两册. 本书为下册，包括多元微分学、二重积分、无穷级数、微分方程和差分方程等内容. 书中例题、习题较多，除每节配有习题外，在每章最后都配有适量的总习题，分为 A、B 两类，其中 A 类为基本题，B 类是提高题. 书末附有部分习题答案与提示.

本书可作为民办高等院校、独立学院经管类专业的教材，也可供其他高等院校经管类专业的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 下册/陆伟民，郁大刚主编. —北京：科学出版社，2013
高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-036500-2

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①陆… ②郁… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 012656 号

责任编辑：张振华 / 责任校对：柏连海
责任印制：吕春珉 / 封面设计：科地亚盟

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 1 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2013 年 1 月第一次印刷 印张：11 1/4
字数：252 000

定价：23.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新科〉）
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135235（VP04）

前　言

目前，民办高校、独立学院大多定位于培养创新应用型本科人才，但此类院校在数学教学中往往照搬公立大学成熟的微积分学教材，导致教学效果不佳. 因此通过基础课教学改革，加强学生实践能力与创新能力的培养，逐步提升办学质量，逐步形成民办高校、独立学院的办学特色已成为此类院校的当务之急. 正是在这种形势下，编者在总结多年本科数学教学经验、探索此类院校本科数学教学发展动向、分析同类教材发展趋势的基础上，编写了这本适合民办高校、独立学院文科类各专业本科生使用的微积分学教材.

本书依据教育部制定的“微积分学课程教学基本要求”编写而成，同时，遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近实际应用的原则，并充分考虑了微积分学课程教学时数减少的趋势，体现了以下特色：

首先，突出微积分学的基本思想和基本方法. 本书着眼于帮助学生掌握基本概念，了解相关内容的内在联系，在教学理念上不过分强调严密论证. 书中有些定理没有给出严格证明，只要求会应用定理.

其次，加强基本能力的培养. 本书例题、习题较多，除每节配有习题外，在每章最后都配有适量的总习题，分为 A、B 两类，其中 A 类为基本题，B 类为提高题，书末附有部分习题答案与提示，以帮助读者检测学习效果和巩固相关知识.

《微积分》分上、下两册，本书为下册. 上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分和定积分等内容. 下册包括多元微分学、二重积分、无穷级数、微分方程和差分方程. 上册由沈仙华、蔡剑编写，由沈仙华统稿. 下册由陆伟民、郁大刚编写，由陆伟民统稿.

南京航空航天大学张兴泰教授审阅了本书，提出了许多宝贵意见和建议，编者在编写本书时参阅了不少相关文献，出版社编辑也做了不少具体工作，谨在此表示衷心感谢.

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中的疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

编　者

2012 年 5 月

目　录

第六章　多元微分学

上册各章研究的函数都是一元函数，它只含有一个自变量. 但在实际问题中，往往要考虑因变量和多个自变量的情况，研究对象就变为多元函数. 多元函数的许多概念是在一元函数基础上的推广，处理问题的思想方法与一元函数有许多类似之处，但也存在着某些区别. 讨论多元函数时以二元函数为主要对象，这主要是由于二元函数的概念和研究方法比较直观，且与其他多元函数区别不大，容易推广.

第一节　空间解析几何简介

一、空间直角坐标系

在平面上，通过建立平面直角坐标系，把平面上的一个点与一对有序实数(x,y)一一对应，即可以用一组由两个实数组成的有序实数来表示平面上一个点的位置. 同样，把平面直角坐标系推广到空间直角坐标系，也可以用一组由三个实数组成的有序实数来表示空间一点的位置.

在空间中取定一点O，过O点作三条互相垂直且以O点为原点的数轴Ox，Oy，Oz，称为**坐标轴**，也分别简称为x轴、y轴、z轴，O点称为**坐标原点**，其中三条坐标轴的次序和方向通常按右手系排列(图 6-1)，这样就构成了**空间直角坐标系** $Oxyz$，任意两坐标轴所确定的平面称为**坐标平面**，按坐标轴的名称分别称为xOy面、yOz面和zOx面(或简称为xy面、yz面和zx面)，三个坐标平面将空间分为八个部分，称为八个**卦限**，如图 6-2 所示，在xOy面上方的四个卦限分别是第一、二、三、四卦限，在xOy面下方的四个卦限分别是第五、六、七、八卦限(图 6-2).

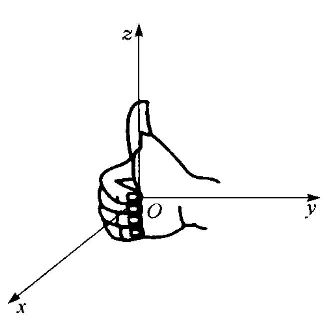

图 6-1

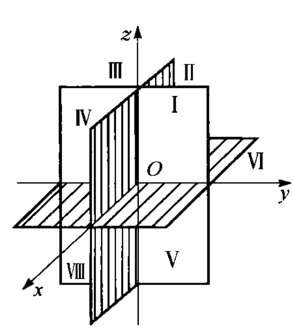

图 6-2

建立了空间直角坐标系后，即可用由三个数字组成的有序数对来表示空间点的位置.

设M是空间的一点，过M作三个平面分别垂直于三条坐标轴，与三条坐标轴分别交于P,Q,R三点，设三点关于所在坐标轴的坐标分别为x,y,z，这样就由点M唯一确定了

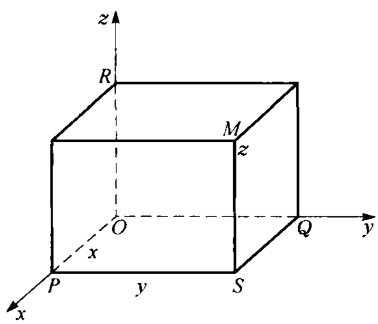

图 6-3

一个有序数组(x,y,z)；反之，对于任意一个有序数组(x,y,z)，在三条坐标轴上分别取点 P,Q,R，使其在各自坐标轴上的坐标分别为 x,y,z，过 P,Q,R 分别作垂直于相应坐标轴的平面，设这三个平面相交于点 M（图 6-3），于是，一个有序数组(x,y,z)就确定了空间唯一的点 M. 这样就建立了空间的点 M 与三元有序数组(x,y,z)之间的一一对应关系. 三元有序数组(x,y,z)称为点 M 的**坐标**，记为 $M(x,y,z)$. x,y,z 分别称为点 M 的 x 坐标（横坐标）、y 坐标（纵坐标）和 z 坐标（竖坐标）.

显然，原点 O 的坐标为$(0,0,0)$；在 x 轴、y 轴、z 轴上的点的坐标分别是$(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$；在坐标面 xOy，yOz，zOx 上的点的坐标分别是$(x,y,0)$，$(0,y,z)$，$(x,0,z)$. 在今后的叙述中，常把一个点和表示这个点的坐标对应起来而不加区别.

二、空间两点间距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$是空间两点（图 6-4）. 为求它们之间的距离，过 M_1，M_2 各作与坐标面平行的平面，构成一长方体，且它的各棱与坐标轴平行，则三棱之长分别为 $|x_2-x_1|$，$|y_2-y_1|$，$|z_2-z_1|$. 所以

$$|M_1M_2|$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是空间任意两点间的距离公式，它是平面上两点间距离公式的推广. 特别地，点 $M(x,y,z)$到原点$(0,0,0)$的距离公式为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

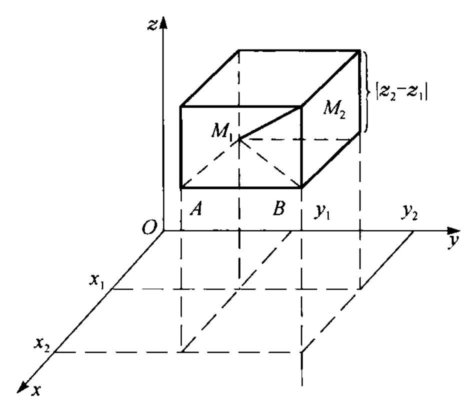

图 6-4

例 1　设点 P 在 z 轴上，它到点 $M(3,\sqrt{2},-3)$ 的距离是 M 到 xOy 平面距离的 2 倍，求 P 点坐标.

解　因点 P 在 z 轴上，设其坐标为 $P(0,0,z)$，则

$$|PM|=\sqrt{(3-0)^2+(\sqrt{2}-0)^2+(-3-z)^2},\quad |OM|=|-3|=3.$$

由$\sqrt{(3-0)^2+(\sqrt{2}-0)^2+(-3-z)^2}=6$，可解得 $z=2$ 或 $z=-8$，故所求点为 $P(0,0,2)$ 或 $P(0,0,-8)$.

三、平面

可以证明在空间中，三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$（A,B,C 不同时为零）表示平面（即满足条件 $Ax+By+Cz+D=0$ 的点(x,y,z)都在平面 π 上；平面 π 上的点

(x,y,z)都满足方程$Ax+By+Cz+D=0$).

当A,B,C,D都不为零时,该方程也可以化为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$,称为平面的截距式方程.其中$a,b,c$分别为平面在$x$轴、$y$轴、$z$轴上的截距.

当$D=0$时,$Ax+By+Cz=0$表示过原点$(0,0,0)$的平面;当A,B,C中有一项为零,如当$C=0$时,方程$Ax+By+D=0$表示平行于z轴的平面;当$C=D=0$时,方程$Ax+By=0$表示过z轴的平面.同理,方程$By+Cz+D=0$表示平行于x轴的平面,方程$By+Cz=0$表示过x轴的平面;方程$Ax+Cz+D=0$表示平行于y轴的平面,方程$Ax+Cz=0$表示过y轴的平面.

当A,B,C中有两项为零,如当$B=C=0$时,方程$Ax+D=0$表示平行于yOz面的平面,而当$B=C=D=0$时,方程$x=0$就是yOz面.同理,方程$By+D=0$表示平行于xOz面的平面,方程$y=0$表示xOz面;方程$Cz+D=0$表示平行于xOy面的平面,方程$z=0$表示xOy面.

例 2 指出下列平面的位置特点并作草图.

(1) $x+y-2z=0$;

(2) $3x+y=2$;

(3) $2y-3z=0$;

(4) $y+2=0$;

(5) $x+2y+2z-4=0$.

解 (1) $D=0$,方程中常数项为零,所以平面过坐标原点(图 6-5).

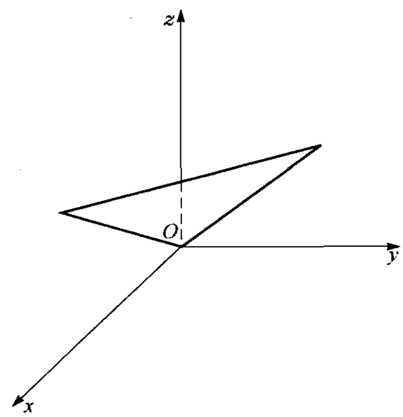

图 6-5

(2) $C=0$,方程中不含z项,故平面平行于z轴(图 6-6).

(3) $A=D=0$,方程中不含x项,且常数项为零,因此平面过x轴(图 6-7).

(4) $A=C=0$,方程中既不含x项又不含z项,因此平面平行于xOz面(图 6-8).

(5) A,B,C,D都不为零,可化为截距式作出草图(图 6-9).

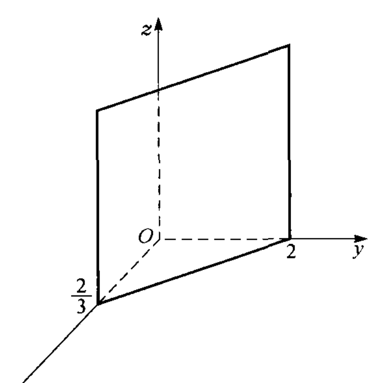

图 6-6

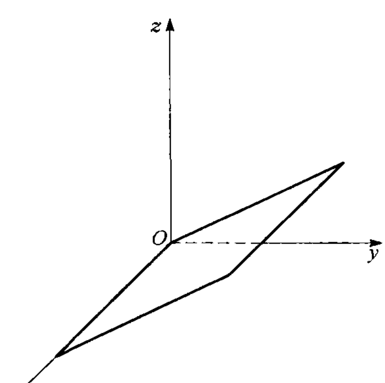

图 6-7

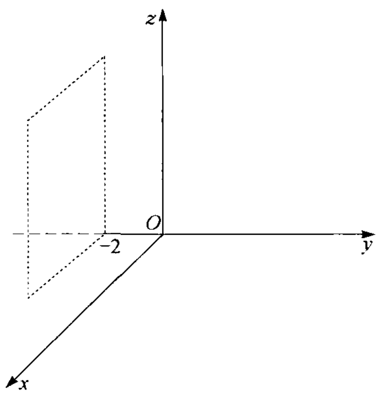

图 6-8

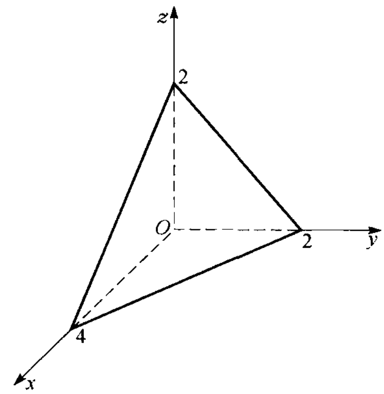

图 6-9

与平面中点到直线的距离公式类似,点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式为

$$\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

四、曲面方程

如果曲面 Σ 上任意一点的坐标都满足三元方程 $F(x,y,z)=0$;同时,满足方程 $F(x,y,z)=0$ 的 x,y,z 所构成的点(x,y,z)都在曲面 Σ 上,我们就把方程 $F(x,y,z)=0$ 称为曲面 Σ 的方程. 曲面 Σ 就称为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

1. 柱面

平行于定直线 L,并沿曲线 C 移动的直线所形成的曲面称为**柱面**(图 6-10),定曲线 C 称为柱面的**准线**,动直线称为柱面的**母线**.

下面推导一种特殊柱面的方程,即母线平行于坐标轴的柱面方程.

设柱面的母线平行于 z 轴,准线 C 是 xOy 面上的曲线,其方程为 $F(x,y)=0$,如图 6-11 所示. 在柱面上任取一点 $M(x_0,y_0,z_0)$,过 M 作平行于 z 轴的直线,它与 xOy 面交于点 $M_0(x_0,y_0,0)$,因 M_0 必在准线上,故有

$$F(x_0,y_0)=0.$$

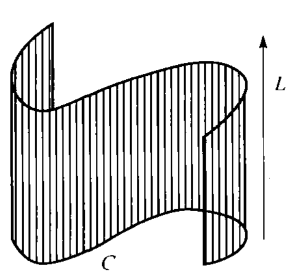

图 6-10

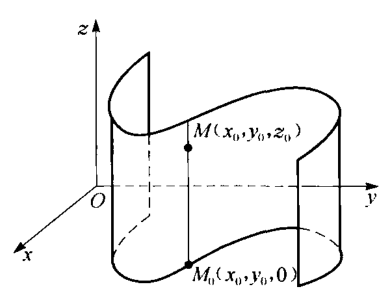

图 6-11

由于点 M 与点 M_0 有相同的横坐标与纵坐标，故 M 点的坐标也必满足方程 $F(x,y)=0$，因此方程

$$F(x,y)=0$$

表示母线平行于 z 轴的柱面.

一般地，只含 x,y 而缺 z 的方程 $F(x,y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面.

类似地，只含 x,z 而缺 y 的方程 $G(x,z)=0$ 与只含 y,z 而缺 x 的方程 $H(y,z)=0$ 分别表示母线平行于 y 轴和 x 轴的柱面.

例如，$x^2+y^2=9$ 在 xOy 平面上表示圆，在空间表示母线平行于 z 轴的圆柱面；$y^2=2x$ 在 xOy 平面上表示抛物线，在空间表示抛物柱面.

2. 旋转曲面

由一条平面曲线绕着同一平面内的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**，这条直线称为旋转曲面的**轴**，这条平面曲线称为旋转曲面的**母线**.

下面推导以坐标轴为轴的旋转曲面方程.

设在 yOz 面上曲线 L 的方程为

$$F(y,z)=0,$$

将 L 绕 z 轴旋转一周，得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面(图 6-12).

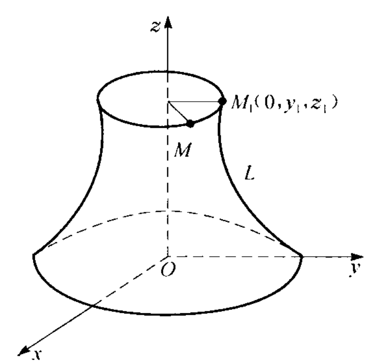

图 6-12

设 $M_1(0,y_1,z_1)$ 为曲线 L 上的任一点，那么有

$$F(y_1,z_1)=0.$$

当曲线 L 旋转时，点 M_1 转到 $M(x,y,z)$，这时 $z=z_1$ 保持不变，且点 M 到 z 轴的距离与点 M_1 到 z 轴的距离相同，即

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|.$$

将 $z=z_1$，$y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入式 $F(y_1,z_1)$，得

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

这就是所求旋转曲面的方程.

由此可知，yOz 面上曲线 L 的方程 $F(y,z)=0$ 中将 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，就得到曲线 L 绕 z 轴的旋转曲面的方程.

同理，曲线 L 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面方程为

$$F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

例 3　求 zOx 平面上抛物线 $z=3x^2$ 绕 z 轴旋转所得的旋转曲面方程.

解　在方程 $z=x^2$ 中，z 不变，将 x^2 换成 x^2+y^2，即

$$z=3x^2+3y^2.$$

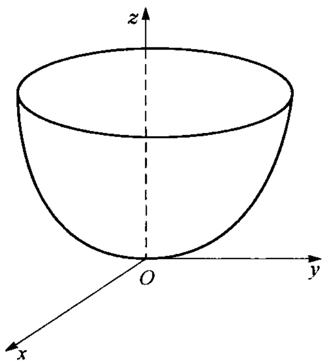

图 6-13

上式就是抛物线绕 z 轴旋转所得的旋转曲面方程，这种曲面称为**旋转抛物面**(图 6-13).

3. 几种常见的二次曲面

通常把三元二次方程 $F(x,y,z)=0$ 所表示的曲面称为二次曲面. 当然，平面也称为一次曲面.

(1) 球面.

球心在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为 R 的**球面方程**为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

当球心在原点时，半径为 R 的球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

该曲面也可以看作是 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 绕 x 轴(或 y 轴)旋转而成.

而 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示以原点为圆心，R 为半径的上半球面.

例 4　求 $x^2+y^2+z^2-2x+6y+4z-11=0$ 的球心坐标和半径.

解　将球面方程配方得

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=25.$$

可知球心坐标为$(1,-3,-2)$，半径为 5.

(2) 椭球面.

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a>0,b>0,c>0)$$

所确定的曲面称为**椭球面**(图 6-14).

当 $a=b$(或 $a=c$，或 $b=c$)时称为旋转椭球面；当 $a=b=c$ 时，就是球面.

(3) (椭)圆锥面.

设动直线 L 过定点 M_0，且与定曲线 C(C 不过定点 M_0)相交，该动直线沿 C 移动所生成的曲面称为**锥面**(图 6-15). 点 M_0 称为锥面的**顶点**，动直线 L 称为锥面的**母线**，定曲线 C 称为锥面的**准线**.

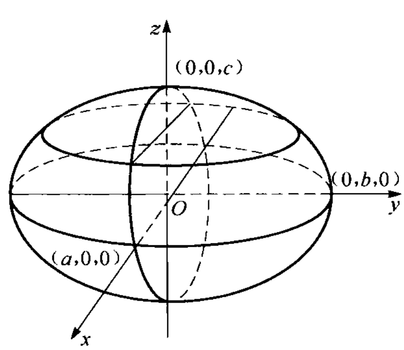

图 6-14

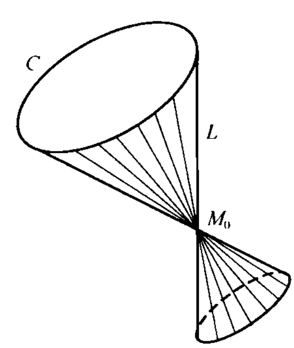

图 6-15

锥面的顶点与曲面上任何一点的连线全在曲面上.

例如,方程 $z^2=x^2+y^2$ 表示顶点在原点的圆锥面(图 6-16),它也可以看作是 yOz 平面上的直线 $z=y$ 绕 z 轴旋转而成的旋转面;还有 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 也是一个常用的锥面(图 6-17).

方程 $z^2=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ 表示顶点在原点的椭圆锥面.

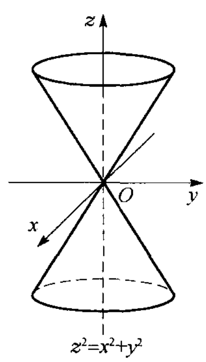

图 6-16

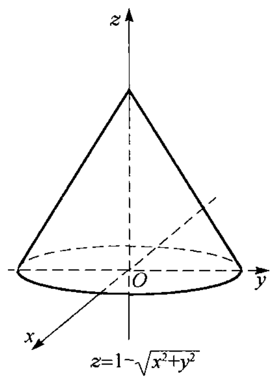

图 6-17

习题 6-1

1. 点(2,−3,−7)位于第____卦限;它到原点的距离为____;到 x 轴的距离为____;到 yOz 平面的距离为____;在 xOz 平面上的投影点为____.

2. 点(−3,1,5)关于 xOy 平面的对称点为____;关于 y 轴的对称点为____;关于原点的对称点为____.

3. 已知 $M(4,1,7)$,$N(-3,5,0)$,在 y 轴上求一点 P,使得 $|PM|=|PN|$.

4. 下列方程中,表示母线与 y 轴平行的柱面的是(　　).

　A. $y=x^2+z^2$;　　B. $x^2+y^2+z^2=2$;

　C. $x=x^2-z^2$;　　D. $x-y+2z=0$.

5. 以下表示母线平行于坐标轴的柱面的方程是(　　).

　A. $x^2+y^2=2-z^2$;　　B. $2y+y^2=2-z^2$;

　C. $x^2-y^2=2z$;　　D. $3(x^2+y^2)=z$.

6. 将 xOy 平面上的直线 $y=x$ 绕 y 轴旋转,所得的旋转曲面方程为(　　).

　A. $x^2=z^2+y^2$;　　B. $y^2=x^2+z^2$;

　C. $z^2=x^2+y^2$;　　D. $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

7. 由 yOz 平面上的曲线 $5z^2=3+y^2$ 绕 y 轴旋转一周,所生成的旋转曲面方程为____;xOz 平面上的曲线 $x^2-3z^2=4$ 绕 x 轴旋转而成的曲面方程为____.

8. 方程 $4x^2+4y+4z^2=5$ 表示的曲面是(　　).

　A. 旋转抛物面;　B. 球面;　C. 圆柱面;　D. 抛物柱面.

9. 旋转曲面 $x^2+y^2-2z^2=10$ 是由 yOz 平面上曲线____绕____轴旋转而成.

10. 指出下列平面的特点,并作草图.

(1) $x+2z=3$;

(2) $x=2$;

(3) $y=2x$;

(4) $2x-2y+z=3$.

第二节　多元函数的概念

一、预备知识

1. n 维空间

我们知道,数轴上的点可以与实数建立一一对应关系;在平面上引入直角坐标系后,平面上的点与二元有序数组(x,y)有一一对应关系;在空间引入直角坐标系后,空间中的点与三元有序数组(x,y,z)一一对应. 通常,分别把数轴、平面和空间称为一维空间、二维空间和三维空间. 一般地,把 n 元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$所组成的集合称为 **n 维空间**或 **n 维向量空间**,记为 $\mathbf{R}^n$. 这个集合中的元素$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为 $\mathbf{R}^n$ 中的点或向量,x_i 称为该点的第 i 个坐标.

设 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是 $\mathbf{R}^n$ 中的两点,我们规定 P、Q 间的距离为

$$\rho(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

易见,当 $n=1,2,3$ 时,它们分别是我们熟知的数轴上、平面上和空间中两点之间的距离公式.

2. 平面邻域

设点 $P_0(x_0,y_0)$是 xOy 平面上的一个点,若 $\delta>0$,则与点 P_0 的距离小于 δ 的点的全体,称为点 P_0 的 δ 邻域,即

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

几何上,$U(P_0,\delta)$表示一个以 P_0 为圆心,δ 为半径的圆的内部.

与一维的邻域一样,$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$表示 P_0 的 δ 空心邻域(图 6-18).

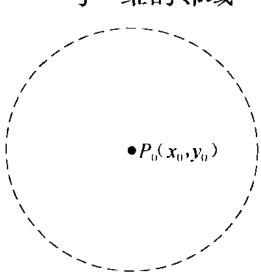

图 6-18

平面邻域的概念可以推广到 n 维空间:如三维空间中一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$的 δ 邻域为

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$$

这是一个以 P_0 为球心,δ 为半径的球的内部;P_0 的 δ 空心邻域为

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}.$$

3. 区域

设 E 是平面上的一个点集，P 是平面上的一个点，则：

若存在 P 的某个邻域 $U(P,\delta)$，使 $U(P,\delta)\subset E$，则称 P 为 E 的内点；

若存在 M 的某个邻域 $U(P,\delta)$，使 $U(P,\delta)\cap E=\varnothing$，则称 M 为 E 的外点；

若 N 的任意邻域 $U(P,\delta)$ 中既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点（P 不一定属于 E），则称 U 为 E 的边界点（图 6-19）；

若 E 中的每个点都是内点，则称 E 为开集. E 的边界点的全体称为 E 的边界.

若 E 中的任意两点，都可以用折线连接，且该折线上的点都属于 E，则称 E 是连通的（图 6-20）.

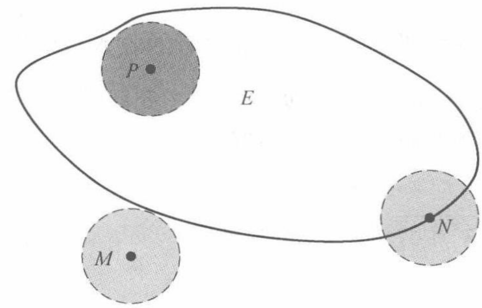

图 6-19

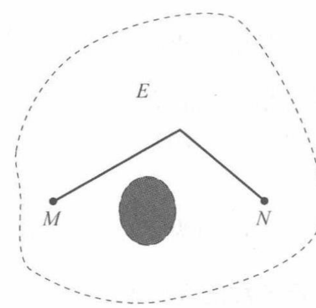

图 6-20

连通的开集称为区域或开区域. 区域和它的边界一起构成的点集称为闭区域.

以平面点集 $E=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2<2\}$ 为例：

满足 $1<x^2+y^2<2$ 的所有 (x,y) 都是 E 的内点；满足 $x^2+y^2=1$ 或 $x^2+y^2=2$ 的所有 (x,y) 都是 E 的边界点.

$E_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2<2\}$ 是开集、开区域；$E_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是闭区域.

$E_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2>2\}$ 是开集，但不是开区域.

O 是原点，若存在 $d>0$，使 $E\subset U(O,d)$，则称 E 为有界集；否则 E 是无界集.

例如，$E=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2<2\}$ 是有界集；$E_4=\{(x,y)\mid x^2+y^2>2\}$ 是无界集.

二、多元函数概念

在许多实际问题中，经常会遇到多个变量之间存在着相互依赖关系的情况，请看以下例题.

例 1　由物理学知道，理想气体的体积 V 与温度 T、压强 P 之间存在着关系：

$$V=\frac{RT}{P}\quad(R\text{ 为常数}).$$

当 (P,T) 在集合 $\{(P,T)\mid P>0,T>T_0\}$ 内取定一点后，V 的值也随之确定.

例 2　设 Z 表示居民人均消费收入，Y 表示国民收入总额，P 表示人口总数，S_1 表示

消费率(国民收入总额中用于消费的比例),S_2 表示居民消费率(消费总额中用于居民消费的比例),通常 S_1,S_2 是常数,则有

$$Z=S_1\cdot S_2\cdot\frac{Y}{P}$$

抽取上述两个例题的共性,给出二元函数的定义.

定义 设 D 是 xOy 平面上的一个平面非空点集,如果对于 D 内的任意一点 (x,y),按照某个对应法则 f,都有唯一确定的实数 z 与之对应,则称 f 是定义在 D 上的一个二元函数,记作 $z=f(x,y)$. 其中 x,y 称为自变量,z 称为因变量或函数,D 称为函数 f 的定义域,集合 $\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

例 1、例 2 中的函数分别可以表示为 $V=f(P,T)$,$Q=f(Y,P)$.

用同样的方法可以定义三元函数 $z=f(x_1,x_2,x_3)$,$(x_1,x_2,x_3)\in D$,乃至 n 元函数 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$.

某商品的需求量为 $Q=\frac{\sqrt{M}}{3P}P_1^{\frac{1}{3}}$,其中 P 是它的价格,M 是消费者的收入,P_1 是相关商品的价格. 则需求函数 Q 可以表示成 $Q=f(P,M,P_1)$,这就是一个三元函数.

若对于二元函数 $z=f(x,y)$,$(x,y)\in D$,如果任意实数 t,都有

$$f(tx,ty)=t^kf(x,y),$$

则称 $z=f(x,y)$ 为 k 次齐次函数. 例如,$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 为一次齐次函数.

三、二元函数的几何意义

设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D,则对任一点 $P(x,y)\in D$ 有一个 z 与之对应,当 (x,y) 取遍 D 上一切点时,相应地得到一个空间点集:$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$,我们称这个点集为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形(图 6-21). 它通常是一个曲面,它在 xOy 平面上的投影就是函数的定义域 D.

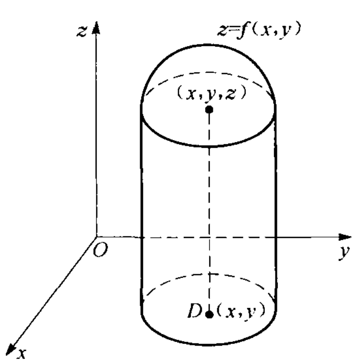

图 6-21

空间的曲面用三元方程表示,也可以用二元函数表示. 例如,过三点 $A(2,0,0)$,$B(0,3,0)$,$C(0,0,4)$ 的平面方程为 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$,它在 xOy 平面上的投影区域为整个 xOy 平面. 这个平面方程也可改写成二元函数 $z=4-2x-\frac{4}{3}y$,定义域为 xOy 平面.

又如球心在原点,半径为 r 的球面,其方程为 $x^2+y^2+z^2=r^2$. 它在 xOy 平面上的投影区域为 $x^2+y^2\leqslant r^2$,我们也可用两个二元函数

$$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}\quad 及\quad z=-\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

来表示这个曲面,而区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2\}$ 就是该函数的定义域.

例 3 求下列函数的定义域,并作出草图.

(1) $z=\arcsin(x+y)$;　　(2) $z=\ln(x^2-y)+\sqrt{4-x^2-y^2}$.