万向思维
www.wanxiangsiwei.com
培养学子 全球视野

主编 刘增利®

直通高考版

倍速®

100+100+100≟1000000

学习法

高中数学 必修⑤

人教A版

构建有效学习

教材核心知识透析 高考考点综合运用
典例变式互动多解 题型考向靶心预测

开明出版社

直通高考版

倍速®

100+100+100 $\stackrel{?}{=}$ 1000000

学习法

高中数学 必修⑤

人教A版

主　　　编　刘增利

本册主编　熊焕军

编　　　者　李秀华　黄淑利

开明出版社

图书在版编目（CIP）数据

倍速学习法：人教版．数学．5：必修／刘增利主编．-- 北京：开明出版社，2013.4
ISBN 978-7-5131-0948-2

Ⅰ．①倍… Ⅱ．①刘… Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第023240号

策划设计	万向思维教育科学研究院	出　　版	开明出版社
主　　编	刘增利	印　　刷	陕西思维印务有限公司
执行主编	杨文彬	印刷质检	高　峰 13096935553
责任编辑	范　英	经　　销	各地书店
研发统筹	冯艳红　沈志芳	开　　本	890×1240　1/16
责任审读	徐林林	印　　张	13
校订统筹	刘英锋　陈宏民	字　　数	364 千字
责任校对	刘艺利　韩亚过	版　　次	2013 年 4 月第 1 版
责任录排	周　旭	印　　次	2013 年 4 月第 1 次印刷
封面设计	大象设计　李诚真	定　　价	23.80 元
版式设计	李诚真		

万向思维教育图书官方网址:http://www.wanxiangsiwei.com
万向思维新浪微博@万向思维教育图书和腾讯微博@万向思维教育图书
最给力的学习网——啃书网(www.kbook.com.cn)
图书质量监督电话:010-88817647　售后服务电话:010-82553636
图书内容咨询电话:(必修⑤　人教A版) 010-82378880 转 114
通信地址:北京市海淀区王庄路 1 号清华同方科技广场 B 座 16 层(邮编 100083)

倍速学习法 有效学习宣言：更少时间，更快提高

使用图解

Bai du 百科 有效学习

■ 有效学习是什么

指符合人的认知规律的学习，其目的是通过优化学习方法提高学习效率和质量，用更少的时间，学到更多、更牢、更好的知识内容，做尽可能少的题掌握尽可能丰富和牢靠的知识——学一而知十、有的放矢、各个击破、学会学习、爱上学习。

■ 有效学习不是什么

不是盲目刻苦，不是题海战术，不是死记硬背，不是千篇一律地对待各类知识。

■ 有效学习涉及五大科学原理

A. 建构主义 ■作用于指导下的自我学习

B. 信息加工心理学 ■作用于寻找更有利于理解、记忆的方式，理解和存储知识

C. 从基础概念的建构到概念的综合应用 ■作用于通过学以致用的训练，理解知识之间的有机联系

D. 认知失衡原理、知识的同化与吸收、体验性教学素材库建立 ■作用于呈现更有体验感的学习材料

E. 学习风格的检测与应用 ■作用于根据学习风格提供有利的学习方式

第1步 化繁为简：知识讲解细致

按照教材知识点的顺序，结合实际教学对课内知识进行全面、细致的讲解。右侧全国各地区最新常考例题的搭配，简单明了地诠释了左侧的知识。左讲右例，点对点，学习过程化繁为简，吃透教材轻而易举。

第2步 化难为易：要点拓展全面

对教材中隐藏的要点、难点知识进行深入、透彻的纵向挖掘。拓展知识面，拓宽知识结构，加强知识讲解层次的梯度，兼顾各个层面学生的需求。要点、难点、易混易错点，逐点攻克，学习知识化难为易，让知识没有盲点。

第3步 化整为零：考点分类精准

全面、精准地以考点归类本节的典型例题，并且每个考点下面配以解决一类问题的方法，通过解一道题而掌握解一类题的方法，让学生在学习的过程中有"点"可查，有"法"可循。考点分类化整为零，达到授之以渔而非鱼的目的。

第4步 化静为动：变式例练迁移

对应左侧考点方法，精选变式题型，典例学法迁移，母题多向发散训练。重点、难点、常考点题型分解，逐点逐题练习。学法指导，突破考点考题的思维误区，减少失误。变式例练化静为动，达到融会贯通、举一反三的效果。

(01) 基本知能必会 造烛求明，读书求理 ZAOZHUQIUMINGDUSHUQIULI

课内知识点睛

知识点1 等比数列的前 n 项和公式(重点)

(1)定义

设 $\{a_n\}$ 为等比数列，公比为 q，则其前 n 项和公式为

$$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1),\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq1).\end{cases}$$

(2)等比数列前 n 项和公式的推导

除教材中的错位相减法求等比数列的前 n 项和公式外，还有以下两种方法来求.

①等比定理法：

由等比数列的定义知

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=q.$

当 $q\neq1$ 时，$\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}=q$，即 $\frac{S_n-a_1}{S_n-a_n}=q$，

故 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$；

当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$.

②拆项法：

常考题型例解

知例1-1 设等比数列 $\{a_n\}$ 中的前 n 项和为 S_n，若 $S_3+S_6=2S_9$，求公比 q 的值.

【思路分析】从 $S_3+S_6=2S_9$ 不难得出关于 q 的关系式，问题的关键是要对 q 分 $q=1$ 和 $q\neq1$ 两种情况讨论.

【解】若 $q=1$，则 $S_3+S_6=3a_1+6a_1=9a_1\neq2S_9$，$\therefore q\neq1$.

由已知得 $\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{2a_1(1-q^9)}{1-q}$，

$\therefore q^3(2q^6-q^3-1)=0$.

$\because q\neq0$，$\therefore 2q^6-q^3-1=0$，

$\therefore (q^3-1)(2q^3+1)=0$.

$\because q\neq1$，

$\therefore q^3=-\frac{1}{2}$，$\therefore q=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

【点拨】在解有关等比数列的前 n 项和问题中，对 q 的讨论是解题完备性的重要环节，是常考的知识点.

知例1-2 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_3=10$，$a_4+a_6=\frac{5}{4}$，求 a_4 和 S_5.

【思路分析】可将 a_1,a_3,a_4,a_6 均用 a_1 和公比 q 表示，解

(02) 拓展要点领悟 业精于勤，行成于思 YEJINGYUQINXINGCHENGYUSI

要点拓展全解

拓展1 错位相减法(重点&难点)

(1)错位相减法的适用条件

一般来说，如果一个数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，公差为 d，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，公比为 q，则求数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和就可以运用错位相减法.

(2)用"错位相减法"求数列的前 n 项和的方法

设 $S_n=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n$，

当 $q=1$ 时，$\{b_n\}$ 是常数列，

$S_n=b_1(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=\frac{nb_1(a_1+a_n)}{2}$；

当 $q\neq1$ 时，则有：

$qS_n=qa_1b_1+qa_2b_2+qa_3b_3+\cdots+qa_nb_n$

$=a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_{n+1}$

$\therefore (1-q)S_n=a_1b_1+b_2(a_2-a_1)+b_3(a_3-a_2)+\cdots+b_n(a_n-a_{n-1})-a_nb_{n+1}$

$=a_1b_1+d\cdot\frac{b_1\cdot q(1-q^{n-1})}{1-q}-a_nb_{n+1}$，

$\therefore S_n=\frac{a_1b_1+\frac{b_1dq(1-q^{n-1})}{1-q}-a_nb_{n+1}}{1-q}$.

题型诠释例解

要例1-1 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_2=7$，$a_5=16$，数列 $\{b_n\}$ 是各项为正数的数列，且 $b_1=2$，点 $(\log_2 b_n,\log_2 b_{n+1})$ 在直线 $y=x+1$ 上.

(1)求 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $c_n=a_nb_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

哈尔滨市2012届高考复习质量检测

【解】(1)由题意可知 $\begin{cases}7=a_1+d,\\16=a_1+4d,\end{cases}$

$a_1=4$，$d=3$，$a_n=3n+1$.

又点 $(\log_2 b_n,\log_2 b_{n+1})$ 在直线 $y=x+1$ 上，

$\log_2 b_{n+1}=\log_2 b_n+1$，

$\log_2\frac{b_{n+1}}{b_n}=1$，$\frac{b_{n+1}}{b_n}=2$，

$\therefore \{b_n\}$ 是首项为2，公比为2的等比数列，$\therefore b_n=2^n$.

(2)由(1)得 $c_n=(3n+1)2^n$，

$\therefore S_n=4\times2+7\times2^2+\cdots+(3n+1)2^n$，①

$2S_n=4\times2^2+7\times2^3+\cdots+(3n+1)2^{n+1}$，②

①-②得 $-S_n=4\times2+3\times2^2+\cdots+3\times2^n-(3n+1)2^{n+1}$.

$\therefore -S_n=8+3\times2^2(2^{n-1}-1)-(3n+1)2^{n+1}$

(03) 考点方法整合 ▸▸▸参考答案链接P161 积累知识，胜过黄金 JILEIZHISHISHENGGUOHUANGJIN

典例方法解析

考点1 等比数列前 n 项和公式的应用(必考)

方法：在运用等比数列前 n 项和公式时，应先判断公比 q 是否等于1，然后再代入公式求解.

例1 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$S_3=\frac{7}{2}$，$S_6=\frac{63}{2}$，求 a_n.

【解】$\because S_6\neq2S_3$，$\therefore q\neq1$. 又 $\because S_3=\frac{7}{2}$，$S_6=\frac{63}{2}$，

$\therefore \begin{cases}\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{7}{2},①\\ \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{63}{2}.②\end{cases}$

②÷①，得 $1+q^3=9$，$\therefore q=2$.

将 $q=2$ 代入①，得 $a_1=\frac{1}{2}$，$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot2^{n-1}=2^{n-2}$，即 $a_n=2^{n-2}$.

【点拨】在等比数列 $\{a_n\}$ 的五个量 a_1,q,a_n,n,S_n 中，a_1 与 q 是最基本的元素，当条件与结论间的联系不明显时，均可以用 a_1 与 q 表示 a_n 与 S_n，从而列方程组求解. 在解方程组时经常用到两式相除达到整体消元的目的，这是方程思想与整体思想

对应变式题练

题练1-1 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$8a_2+a_5=0$，则 $\frac{S_5}{S_2}=$(　　).

A. 11　B. 5　C. -8　D. -11

2010·浙江高考(文)

题练1-2 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $S_n=189$，$q=2$，$a_n=96$，求 n.

2012·北京海淀模拟

使用图解

全书结构

- 同步模块
  - 基本知能必会
    - 课内知识点睛
    - 常考题型例解
  - 拓展要点领悟
    - 要点拓展全解
    - 题型诠释例解
  - 考点方法整合
    - 典例方法解析
    - 综合技能提升
    - 数学思想方法
    - 对应变式题练
  - 真题考法解读
    - 例解真题考法
    - 精选模拟演练
  - 知能优化测训
    - 基础达标
    - 知能优化
    - 考例链接
- 全章总结
  - 全章专题归纳剖析
    - 思想方法归纳
    - 知识专题剖析
  - 全章知能同步检测

---

(04) 真题考法解读 ▸▸▸参考答案链接 P163　　近水知鱼性，近山识鸟音 JINSHUIZHIYUXINGJINSHANSHINIAOYIN

例解真题考法

考法1　等比数列前 n 项和公式的应用

考法提炼：涉及等比数列前 n 项和公式的考点在高考中多以选择题、填空题的形式出现，分值约为5分．注意结合等比数列的性质解决问题．

考题[1]　已知$\{a_n\}$为等差数列，其公差为-2，且a_7是a_3与a_9的等比中项，S_n为$\{a_n\}$的前 n 项和，$n\in\mathbf{N}^*$，则S_{10}的值为(　　).

A. -110　　B. -90

C. 90　　D. 110　　2011·天津高考(理)

【解析】由题意得$a_7^2=a_3\cdot a_9$，又公差$d=-2$，

$\therefore (a_3-8)^2=a_3(a_3-12)$，$\therefore a_3=16$.

$\therefore S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10(a_3+a_8)}{2}=5(a_3+a_3+5d)=5\times(16+16-10)=110$，故选D.

【答案】D.

精选模拟演练

1. 设等比数列$\{a_n\}$中，前 n 项和为S_n，已知$S_3=8$，$S_6=7$，则$a_7+a_8+a_9=$(　　).

A. $\frac{1}{8}$　　B. $-\frac{1}{8}$　　C. $\frac{57}{8}$　　D. $\frac{55}{8}$

2011·九江七校联考

2. 记等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若$S_3=2$，$S_6=18$，则$\frac{S_{10}}{S_5}$等于(　　).

A. -3　　B. 5　　C. -31　　D. 33

南昌大学附中2012届高三第三次月考

3. 设$\{a_n\}$是任意等比数列，它的前 n 项和，前 $2n$ 项和与前 $3n$ 项和分别为X,Y,Z，则下列等式中恒成立的是(　　).

A. $X+Z=2Y$　　B. $Y(Y-X)=Z(Z-X)$

C. $Y^2=XZ$　　D. $Y(Y-X)=X(Z-X)$

2010·安徽高考(理)

4. 设$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列，S_n为其前 n 项和．已知

(05) 知能优化测训 ▸▸▸参考答案链接 P165　　千锤成利器，百炼变纯钢 QIANCHUICHENGLIQIBAILIANBIANCHUNGANG

A 基础达标

1. 设$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列，S_n是它的前 n 项和，若$\{S_n\}$是等差数列，则 q 等于(　　).

A. 1　　B. 0

C. 1或0　　D. -1

2. 已知等比数列的公比为2，且前5项和为1，那么前10项和等于(　　).

A. 31　　B. 33

C. 35　　D. 37

3. 已知等比数列前20项和是24，前30项和是78，则前

考例链接：考点7【例9】；知识点1 知例1-1；知识点1 考点1；考点3【例5】

7. 某校为扩大教学规模，从今年起扩大招生，现有学生人数为 b 人，以后学生人数的年增长率为4.9‰．该校今年年初有旧实验设备 a 套，其中需要换掉的旧设备占了一半．学校决定每年以当年年初设备数量的10%的增长率增加新设备，同时每年淘汰 x 套旧设备．

(1)如果10年后该校学生的人均占有设备的比率正好比目前翻一番，那么每年应更换的旧设备是多少套?

(2)依照(1)的更换速度，共需多少年能更换所有需要更换的旧设备?

全章专题归纳剖析

思想方法归纳

专题1　函数与方程思想

在数列中，数列本身就是一种特殊的函数，这种函数的定义域是$\mathbf{N}^*$(或其有限子集)．数列具有单调性、周期性(满足$a_{n+T}=a_n$)，因此研究数列问题，可以类比函数的一些性质来研究．例如数列中求某项的取值范围问题、某个字母的取值范围问题、最值问题等就可以利用函数思想，转化成求函数值域问题或解不等式．在等差、等比数列问题中，已知五个量a_1，d(或q)，n，a_n，S_n中的几个求另几个时，往往是建立方程或方程组解决问题．

例[1]　已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=33$，$a_{n+1}-a_n=2n$，则$\frac{a_n}{n}$的最小值为________.　　2010·辽宁高考

【解析】$\because a_{n+1}-a_n=2n$，$a_1=33$，$\therefore a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-$

$\therefore T_n=\frac{n[9+(10-n)]}{2}=-\frac{1}{2}n^2+\frac{19}{2}n=-\frac{1}{2}\left(n-\frac{19}{2}\right)^2+\frac{361}{8}$.

$\because n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore$当$n=9$或$n=10$时，$T_n$有最大值45.

【点拨】利用函数思想求T_n的最大值时，要注意$n\in\mathbf{N}^*$这一条件．

专题2　分类讨论思想

在解决数学问题时，应注意问题的层次性，即考虑问题的方方面面，这时应该运用分类讨论思想．在讨论时，应做到不重不漏．

❶等差数列中的分类讨论问题

例[3]　已知数列$\{2^n a_n\}$的前 n 项和$S_n=9-6n$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=n\left(2-\log_2\frac{|a_n|}{3}\right)$，求数列$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$的前 n 项和T_n.

2011·广东广州模拟

【解】(1)当$n=1$时，$2a_1=S_1=3$，$\therefore a_1=\frac{3}{2}$.

全章知能同步检测

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，满分150分，考试时间120分钟

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 数列1，3^7，3^{14}，3^{21}，…中，3^{98}是这个数列的(　　).

A. 第13项　　B. 第14项

C. 第15项　　D. 不在此数列中

2. 给定数列1，2+3+4，5+6+7+8+9，10+11+12+13+14+15+16，…，则这个数列的一个通项公式是(　　).

11. 互不相等的三个正数x_1，x_2，x_3成等比数列，且点$P_1(\log_a x_1,\log_b y_1)$，$P_2(\log_a x_2,\log_b y_2)$，$P_3(\log_a x_3,\log_b y_3)$共线($a>0$且$a\neq1$，$b>0$且$b\neq1$)，则$y_1$，$y_2$，$y_3$(　　).

A. 是等差数列不是等比数列

B. 是等比数列不是等差数列

C. 可能是等比数列，也可能是等差数列

D. 既是等比数列又是等差数列

12. 某容器中盛满10 kg的纯酒精，倒出2 kg后再补上同质量的水，混合后再倒出2 kg，再补上同质量的水，倒出 n 次后容器中纯酒精的质量为(　　).

第5步　化暗为明：高考分析透彻

高考试题原型在教材，对比揭秘。精选考题，全析考点，了解考情，明确考法，深入、透彻地直击高频考点。精选全国各省市模拟试题，汲取考练精髓，零距离体验高考，备战高考。

第6步　化生为熟：练习巩固拔高

立足教材，夯实基础，注重能力，考究梯度。精心设置的一套优化测训题，考查全面、题型新颖、层级清晰，以便学生查漏补缺，拔高练习。考例链接，追本溯源，方便学生回归考点知识和例题方法，学有所用，学以致用，学用相长。

第7步　化分为合：专题突破优化

优化整合全章的数学思想、方法和知识，系统、全面地设置例题。梳理模块核心要点，构建模块知识体系。注重思维策略指导，突出学科方法优势，便于培养学生创新思维。

第8步　化辅为主：阶段检测仿真

精心选编涵盖全章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明、题量适中，与同步考试和高考接轨，仿真度高，利于学生同步检测，查漏补缺。

专题索引 拓展·考点·考法

页码

第一章 解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理

1.2 应用举例

1.3 实习作业

全章专题归纳剖析

第二章 数列

2.1 数列的概念与简单表示法

拓展·考点·考法 专题索引

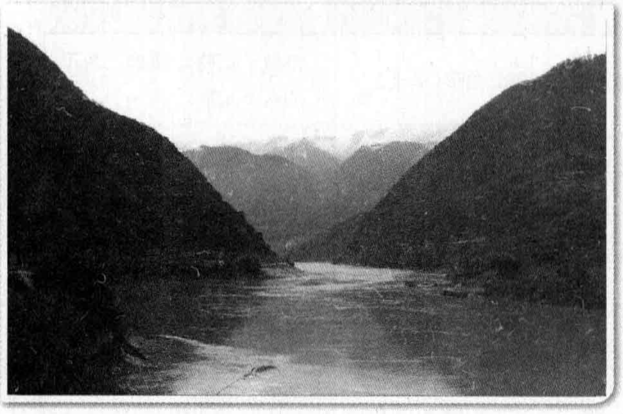
专题索引 拓展·考点·考法

页码

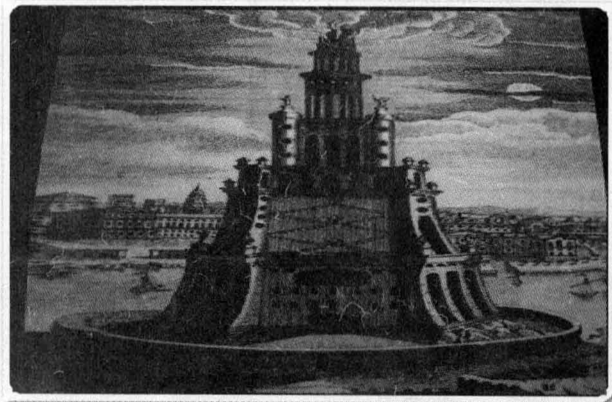
CONTENTS 目录

目录 CONTENTS

第一章 解三角形



1. 自三峡七百里中，两岸连山，略无阙处.
重岩叠嶂，隐天蔽日.
自非亭午夜分，不见曦月.
至于夏水襄陵，沿溯阻绝.
或王命急宣，有时朝发白帝，暮到江陵，
其间千二百里，虽乘奔御风，不以疾也. ——**关键词：方位角**



2. 亚历山大灯塔是古代七大奇观之一. 公元前，一艘埃及的皇家喜船，在驶入亚历山大港时，触礁沉没了，悲剧发生后，埃及国王托勒密二世下令在港口外一个小岛的石礁上，修建埃及亚历山大灯塔. 亚历山大灯塔预估高度 115 ~ 150 米，它是当时世上最高的建筑物，曾经它的烛光在晚上照耀着整个亚历山大港，保护着海上的船只. ——**关键词：俯角**

3. 伴随着社会经济的发展，物质生活的不断提高，城市内住宿小区的数目越来越多，而且普遍朝着现代化、高层化发展，逐渐成为城市新景观. 然而，林立的高楼带给人们现代化居住条件的同时也带来了一些意想不到的困扰，住房的采光问题日益突显. 很多住房户及建筑工程者都开始对房屋的采光问题有所关注，特别是低层住户常常反映到了冬天房屋内没有光照的问题. ——**关键词：角度**

全章概述

本章内容既与初中已学过的关于三角形的定性研究的结论相联系，又与三角函数知识相联系. 同时，也体现了向量及其运算的应用，高考中常与三角函数、向量知识联合起来考查.

本章主要包括正弦定理和余弦定理、解三角形的实际应用举例等内容. 教材以直角三角形为例引出正弦定理，然后给出了当三角形为锐角三角形时的证明方法，接着用向量方法证明了余弦定理. 最后通过解决一些与三角形有关的实际问题，说明正弦定理、余弦定理的重要作用. 正弦定理、余弦定理揭示了任意三角形边角之间的客观规律，是解三角形的重要工具.

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

学习内容	学习要求	☆高考考点☆	考查角度剖析
正弦定理	1. 通过对特殊三角形各量之间关系的研究,得出正弦定理; 2. 通过对三角形边角关系的探究,证明正弦定理; 3. 掌握正弦定理的变形及应用	①利用正弦定理解三角形(必考)	借助于正弦定理求三角形的六个元素
		②正弦定理的变形应用(必考)	通过将正弦定理变形解三角形
正弦定理的应用	4. 能运用正弦定理解斜三角形、判断三角形的形状; 5. 在运用正弦定理解三角形时,正确判断三角形的个数; 6. 利用边角互化解决相关问题	③三角形解的情况的判断(偶考)	三角形解的情况的判断,一般在选择题中出现
		④判断三角形的形状(偶考)	通过正弦定理进行边角互化,常以选择、填空、解答题的形式出现
正弦定理与三角恒等变换知识的综合应用	7. 结合三角知识,应用正弦定理解决化简、证明与求代数式范围的问题	⑤正弦定理在三角函数式的化简与证明中的应用(偶考)	常常由正弦定理把角的正弦用边表示,或边用角的正弦表示,从而使等式中只有边或只有角,常在解答题中出现
		⑥求代数式的范围与最值(必考)	利用正弦定理理清三角形中基本量间的关系或求出某些基本量

(01) 基本知能必会

造烛求明,读书求理 ZAOZHUQIUMINGDUSHUQIULI

课内知识点睛

知识点1 正弦定理(重点)

(1)正弦定理的内容

在一个三角形中,各边与它所对角的正弦的比相等,即 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

(2)正弦定理的适用范围

正弦定理适用于任意三角形,即不论是锐角三角形、直角三角形,还是钝角三角形都适用正弦定理.

(3)正弦定理的本质

正弦定理指出了任意三角形中三条边与对应角的正弦之间的一个关系式.由正弦函数在区间上的单调性可知,正弦定理非常好地描述了任意三角形中边与角的一种数量关系.

(4)正弦定理的关系式的理解

正弦定理的关系式是分子为边长,分母为该边所对角的正弦的分式连等式,实际上是三个边角关系式:$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$, $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$, $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

(5)正弦定理的应用

正弦定理的三个关系式都反映了三角形中任意两边及对角的关系,每个关系式都能知其中三个量得出另外一个量.

常考题型例解

易 知例1-1 有关正弦定理的叙述:

①正弦定理只适用于锐角三角形;

②正弦定理不适用于直角三角形;

③在某一确定的三角形中,各边与其所对角的正弦的比是一定值.

其中正确的个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解析】正弦定理适用于任意三角形,故①②均不正确;由正弦定理可知,三角形一旦确定,则各边与其所对角的正弦的比就确定了,故③正确.

【答案】B.

中 知例1-2 在△ABC中,$A:B:C=4:1:1$,则$a:b:c=$(　　).

A. $4:1:1$　　B. $2:1:1$　　C. $\sqrt{2}:1:1$　　D. $\sqrt{3}:1:1$

2012・蚌埠高二检测

【解析】∵ $A+B+C=180°$,$A:B:C=4:1:1$,∴ $A=120°$,$B=30°$,$C=30°$.由正弦定理的变形公式得 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\sin 120°:\sin 30°:\sin 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{3}:1:1$.故选D.

【答案】D.

【点拨】三角形内角和定理 $A+B+C=180°$ 是隐含条件,我们

【注意】正弦定理表达的是同一个三角形中的边与角的关系，必须在同一个三角形中使用.

知识点 2 解三角形（重点）

(1)概念

一般地，把三角形的三个角 A,B,C 和它们的对边 a,b,c 叫做三角形的元素. 已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形.

(2)正弦定理主要用来解决以下两类解三角形问题

①已知两角和任一边，求其他的两边和一角. 步骤为：

(ⅰ)由三角形内角和定理求出第三个角；

(ⅱ)由正弦定理公式的变形，求另外的两边.

②已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角，进而求其他的边和角. 步骤为：

(ⅰ)由正弦定理求出另一边所对角的正弦值；

(ⅱ)根据“$y=\sin x$”的值域判断是否有解；

(ⅲ)若有解，则结合“大边对大角”和“内角和定理”求出这个角和第三个角；

(ⅳ)由正弦定理求出第三边.

在做题时要对隐含条件敏感，要有一双“善于发现条件的眼睛”.

中 知例 2-1 (1) $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 若 $c=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{6}$，$B=120°$，则 a 等于(　　).

A. $\sqrt{6}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

(2)在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 若 $(\sqrt{3}b-c)\cos A=a\cos C$，则 $\cos A=$________.

【解析】(1)由正弦定理得 $\frac{\sqrt{6}}{\sin 120°}=\frac{\sqrt{2}}{\sin C}$，$\therefore \sin C=\frac{1}{2}$.

又$\because C$ 为锐角，$\therefore C=30°$，

$\therefore A=30°$，$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形，得 $a=c=\sqrt{2}$. 故选 D.

(2)由正弦定理得 $(\sqrt{3}\sin B-\sin C)\cos A=\sin A\cdot\cos C$，化简得 $\sqrt{3}\sin B\cos A=\sin(A+C)$. $\because \sin(A+C)=\sin B$，$\therefore \sqrt{3}\sin B\cos A=\sin B$. $\because 0<\sin B\leqslant 1$，$\therefore \cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【答案】(1)D；(2)$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【点拨】本题对应的知识点是正弦定理在解三角形中的应用，应注意三角形内角和公式的灵活运用.

02 拓展要点领悟

业精于勤，行成于思 YEJINGYUQINXINGCHENGYUSI

要点拓展全解

拓展 1 正弦定理的其他证明方法（难点）

对于正弦定理，教材中给出用三角函数定义的证明，除此以外还可以用向量法和几何法证明.

(1)用向量法证明

证明：如图 1-1.1-1，当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时，过 A 作单位向量 $\boldsymbol{j}$ 垂直于 $\overrightarrow{AB}$，则 $\boldsymbol{j}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$，$\boldsymbol{j}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}-B$，$\boldsymbol{j}$ 与 $\overrightarrow{CA}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}+A$，设 $AB=c$，$BC=a$，$AC=b$.

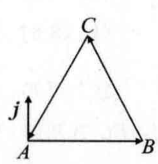


图 1-1.1-1

因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$，

所以 $\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{BC}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{j}\cdot\mathbf{0}=0$，

即 $|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\frac{\pi}{2}+|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)+|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{CA}|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right)=0$，

所以 $a\sin B=b\sin A$，

即 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

同理可得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形或直角三角形时，可以利用同样的方法证得结论，请自己证明.

(2)用平面几何知识证明

图 1-1.1-2

证明：如图 1-1.1-2，设 O 为锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心，外接圆的半径为 R，连接 BO 并延长交 $\odot O$ 于 A'，连接 $A'C$，则 $A'=A$，所以 $\sin A=\sin A'=$

题型诠释例解

中 要例 1-1 已知 $\triangle ABC$ 中，$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}$，$B=60°$，那么角 A 等于(　　).

A. 135°　　B. 90°　　C. 45°　　D. 30°

2012 · 北京海淀模拟

【解析】由正弦定理知 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $\frac{\sqrt{2}}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60°}$，解得 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $a=\sqrt{2}<b=\sqrt{3}$，所以 $A<B$，所以 $A=45°$.

【答案】C.

【点拨】应注意“在同一个三角形中，大边对大角，小边对小角”在解三角形中的应用.

中 要例 1-2 在 $\triangle ABC$ 中，$A=75°$，$B=45°$，$c=3\sqrt{2}$，求 a,b.

2012 · 聊城高二月考

【思路分析】由 $A+B+C=180°$，可求出 C，再由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 和 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，求出 a,b.

【解】$\because A=75°$，$B=45°$，$\therefore C=180°-(A+B)=60°$.

$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

$\therefore a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{3\sqrt{2}\sin 75°}{\sin 60°}=2\sqrt{6}\sin 75°$.

$\because \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，$\therefore b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{3\sqrt{2}\sin 45°}{\sin 60°}=2\sqrt{3}$.

$\because \sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\cdot\sin 30°=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，$\therefore a=3+\sqrt{3}$.

$\frac{BC}{A'B}=\frac{a}{2R}$,

则$\frac{a}{\sin A}=2R$.

同理可证$\frac{b}{\sin B}=2R,\frac{c}{\sin C}=2R$.

故有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

当$\triangle ABC$为钝角三角形或直角三角形时,可以利用同样的方法证得结论.

拓展2 正弦定理的变形公式(重点&难点)

1. $a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$,其中$R$为$\triangle ABC$外接圆的半径.

2. $\sin A=\frac{a}{2R},\sin B=\frac{b}{2R},\sin C=\frac{c}{2R}$($R$为$\triangle ABC$外接圆的半径).

3. 三角形的边长之比等于对应角的正弦之比,即$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

4. $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

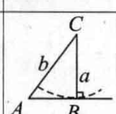
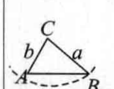
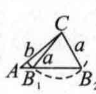
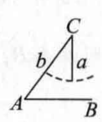
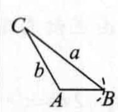
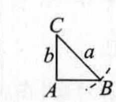
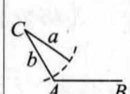
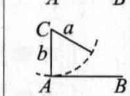
5. $a\sin B=b\sin A,a\sin C=c\sin A,b\sin C=c\sin B$.

拓展3 判断三角形解的个数问题(难点)

1. 已知两角和任意一边,求其他两边和另一角,由于两角已知,故第三个角确定,进而三角形唯一,所以解是唯一的.

2. 已知两边和其中一边的对角,解三角形时,将出现无解、一解和两解的情况,应分类讨论.

在$\triangle ABC$中,已知a、b和A,以点C为圆心,以边长a为半径画弧,此弧与除去顶点A的射线AB的公共点的个数即为三角形的个数.

	A为锐角			A为钝角或直角	
图形	 ①  ②			 	 
关系式	①$a=b\sin A$ ②$a\geqslant b$	$b\sin A<a<b$	$a<b\sin A$	$a>b$	$a\leqslant b$
解的情况	一解	两解	无解	一解	无解

拓展4 利用正弦定理判断三角形的形状(重点)

判定三角形的形状,应围绕三角形的边角关系进行思考,主要看其是不是正三角形、等腰三角形、直角三角形、钝角三角形或锐角三角形,要特别注意"等腰直角三角形"与"等腰三角形或直角三角形"的区别. 依据已知条件中的边角关系判断时,主要有如下两条途径:

(1)利用正弦定理(或下一节学习的余弦定理)把已知条件转化为边之间的关系,通过因式分解、配方等得出边的相应关系,从而判断三角形的形状;

(2)利用正、余弦定理把已知条件转化为内角的三角函数间的关系,通过三角恒等变换,得出内角的关系,从而判断出三角形的形状,此时要注意应用$A+B+C=\pi$这个结论.

【点拨】此种类型的题目是先算第三个角,再根据正弦定理求解,注意公式中边与对角的正弦的比值.

中 要例2-1 在$\triangle ABC$中,$a:b:c=1:3:5$,求$\frac{2\sin A-\sin B}{\sin C}$的值.

2012·湖北黄冈模拟

【思路分析】由变形公式$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$即可求解.

【解】$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=1:3:5$,

设$\sin A=x,\sin B=3x,\sin C=5x(x>0)$,

$\therefore \frac{2\sin A-\sin B}{\sin C}=\frac{2x-3x}{5x}=-\frac{1}{5}$.

【点拨】正弦定理有很多变形公式,求解问题时注意灵活运用.

中 要例3-1 在$\triangle ABC$中,角A,B,C的对边分别为a,b,c,$a=4,A=30^\circ,b=x(x>0)$,判断此三角形解的个数.

【思路分析】由于b是不确定的边长,无法知道a与b的大小关系,即无法判断B是锐角还是钝角,这就需要对x的取值分类讨论.

【解】当$x\leqslant 4$时,由大边对大角知B为锐角,$\sin B=\frac{x\sin A}{a}\leqslant\frac{1}{2}$,此时三角形有唯一解.

当$4<x<8$时,$\sin B=\frac{x\sin A}{a}$,

$\therefore \frac{1}{2}<\sin B<1$,$B$不一定为锐角,

$\therefore B$有两个值,此时$\triangle ABC$有两解.

当$x=8$时,$\sin B=1$,则$B=90^\circ$,此时$\triangle ABC$有一解.

当$x>8$时,$\sin B=\frac{x\sin A}{a}>1$,$B$无解,此时$\triangle ABC$无解.

综上可知:当$x\leqslant 4$或$x=8$时,$\triangle ABC$有一解;当$4<x<8$时,$\triangle ABC$有两解;当$x>8$时,$\triangle ABC$无解.

【点拨】对已知两边和其中一边的对角的三角形解的情况要熟练掌握,当其中一边不确定时需要分类讨论.

中 要例4-1 根据条件$b^2\sin^2 C+c^2\sin^2 B=2bc\cos B\cos C$判断$\triangle ABC$的形状.

【思路分析】利用正弦定理,把边的问题转化为角的问题.

【解】由正弦定理得$\sin^2 B\sin^2 C=\sin B\sin C\cos B\cos C$.

$\because \sin B\sin C\neq 0,\therefore \sin B\sin C=\cos B\cos C$,

即$\cos(B+C)=0,\therefore B+C=90^\circ,A=90^\circ$,

故$\triangle ABC$是直角三角形.

【点拨】此类问题的解决思路主要从边和角两个方面入手. 一般将已知条件中的边角关系利用正弦定理或余弦定理(下节学习)转化为角角的关系或边边的关系,再用三角恒等变换或代数式的恒等变形(如因式分解、配方等)求解.

典例方法解析

考点1 已知两边及其中一边的对角解三角形(必考)

方法:已知三角形的两边和其中一边的对角判断解的个数的步骤:

(1)根据边角关系判断三角形是否有解;

(2)若有解,用正弦定理求出另一边的对角的正弦值;

(3)下结论.①若所得值不在(0,1]内,则此三角形不存在;②若所得值在(0,1]内:(ⅰ)若是特殊角的三角函数值,求出所对应的角,注意用$A+B<180°$判断解的个数;(ⅱ)若所求角的三角函数值不是特殊值,则利用单位圆中的三角函数线判断解的个数.

例1 根据下列条件解三角形:

(1)$b=\sqrt{3}, B=60°, c=1$;

(2)$c=\sqrt{6}, A=45°, a=2$.

【思路分析】正弦定理可用于解决已知两边及其中一边的对角,求其他边和角的问题.

【解】(1)$\because \dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$,

$\therefore \sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{1\times\sin 60°}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$.

$\because b>c, B=60°$,

$\therefore C<B$,$\therefore C$为锐角,

$\therefore C=30°, A=90°$,

$\therefore a=\sqrt{b^2+c^2}=2$.

(2)$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$,

$\therefore \sin C=\dfrac{c\sin A}{a}=\dfrac{\sqrt{6}\times\sin 45°}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore C=60°$或$120°$.

当$C=60°$时,$B=75°$,$b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{6}\sin 75°}{\sin 60°}=\sqrt{3}+1$.

当$C=120°$时,$B=15°$,$b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{6}\sin 15°}{\sin 120°}=\sqrt{3}-1$.

$\therefore b=\sqrt{3}+1, B=75°, C=60°$或$b=\sqrt{3}-1, B=15°, C=120°$.

【点拨】已知两边a,c和边a的对角A求c的对角时,可以利用a,c与$c\sin A$之间的大小判断解的情况,然后求解,由于解的情况复杂,所以应在最后总结解的情况.

考点2 已知两角及一边解三角形(必考)

方法:如果已知三角形的任意两个角与一边,由三角形的内角和定理可以计算出三角形的第三个角,并由正弦定理计算出三角形的另两边.

例2 在$\triangle ABC$中,$A=30°, C=105°, a=10$,求b,c.

【解】$\because A=30°, C=105°$,

$\therefore B=45°$.

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$,

$\therefore b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}=\dfrac{10\sin 45°}{\sin 30°}=10\sqrt{2}$,$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{10\sin 105°}{\sin 30°}=5\sqrt{2}+5\sqrt{6}$.

对应变式题练

题练1-1 已知a,b,c分别是$\triangle ABC$的三个内角A,B,C所对的边,若$a=1$,$b=\sqrt{3}$,$A+C=2B$,则$\sin A=$________.

▶2011·临川一中期中

题练1-2 在$\triangle ABC$中,$B=30°$,$b=50\sqrt{3}$,$c=150$,求a的长.

▶2011·南师大附中过关检测

题练1-3 如图1-1.1-4,在$\triangle ABC$中,若$b=1$,$c=\sqrt{3}$,$C=\dfrac{2\pi}{3}$,则$a=$________.

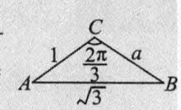


图1-1.1-4

▶2010·北京高考

题练2-1 在$\triangle ABC$中,已知$a=20$,$A=30°$,$C=45°$,解三角形.

▶2012·乐山一中月考

$\therefore b,c$ 的长分别为 $10\sqrt{2}$，$5\sqrt{2}+5\sqrt{6}$.

【点拨】此类问题结果为唯一解.如果已知三角形的两角和两角所夹的边，也是先利用三角形内角和为180°求出第三个角，再利用正弦定理求解.

考点3 正弦定理的变形应用(必考)

方法：设 R 为三角形外接圆半径，公式可扩展为：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，即当一内角为90°时，该角所对边为外接圆的直径.灵活运用正弦定理的几个变形：(1)$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$；(2)$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$；(3)$a\sin B=b\sin A$，$b\sin C=c\sin B$，$a\sin C=c\sin A$；(4)$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

例3 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A:\sin B:\sin C=k:(k+1):2k$，则 k 的取值范围为________.

【解析】根据变形式 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$，

可知对应边的关系，结合两边之和大于第三边的性质特点不难知道 k 的取值范围.

由正弦定理知 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$，$\therefore a:b:c=k:(k+1):2k$.

又由三角形两边之和大于第三边可得：$\begin{cases}k+k+1>2k,\\k+1+2k>k,\\k+2k>k+1,\end{cases}$解得 $k>\frac{1}{2}$.

【答案】$k>\frac{1}{2}$.

【点拨】在具体解题时，根据不同的题设条件选择不同的变形公式.

考点4 三角形解的情况的判断(偶考)

方法：当已知三角形的两边和其中一边的对角时，不能唯一确定三角形的形状，可能出现一解、两解或无解的情况，这时应结合“同一个三角形中，大边对大角，小边对小角”的定理及几何图形进行取舍.

例4 不解三角形，判断下列三角形解的个数.

(1)$a=5$，$b=4$，$A=120°$；

(2)$a=7$，$b=14$，$A=150°$；

(3)$a=9$，$b=10$，$A=60°$；

(4)$c=50$，$b=72$，$C=135°$.

【解】(1)因为 $\sin B=\frac{b\sin 120°}{a}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\triangle ABC$ 有一解.

(2)因为 $\sin B=\frac{b\sin 150°}{a}=1$，所以 $\triangle ABC$ 无解.

(3)因为 $\sin B=\frac{b\sin 60°}{a}=\frac{10}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$，而 $\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{5\sqrt{3}}{9}<1$，所以当 B 为锐角时，满足 $\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{9}$ 的 B 的取值范围为 $60°<B<90°$.

当 B 为钝角时，满足 $A+B<180°$，有 $90°<B<120°$，所以 $\triangle ABC$ 有两解.

(4)因为 $\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{72\sin C}{50}>\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $B>45°$，

可得 $B+C>180°$.故 $\triangle ABC$ 无解.

【点拨】求出 $\sin B$ 后，在 $(0,\pi)$ 内 B 可能有两个值，但不能认为此时一定有两解，因为不是纯粹在 $(0,\pi)$ 内求 B，而是在三角形中求 B.这时要根据“同一个三角形中，大边对大角，小边对小角”、“三角形内角和等于180°”等定理作出判断.

题练3-1 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，则 $\sin A:\sin B:\sin C=$________.

2011·松原市油田高中过关检测

题练3-2 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，则 $a\cos C+c\cos A$ 的值为________.

2011·长春市实验中学过关检测

题练4-1 已知下列各三角形中的两边及其中一边的对角，判断三角形是否有解，有解的作出解答.

(1)$a=7$，$b=8$，$A=105°$；

(2)$a=10$，$b=20$，$A=80°$；

(3)$b=10$，$c=5\sqrt{6}$，$C=60°$；

(4)$a=2\sqrt{3}$，$b=6$，$A=30°$.

#学习方法#重点内容要熟读牢记，对基本要领和定理等能准确阐述，并能真正理解它的意义；对基本公式应会自行推导，晓得它的来龙去脉.

综合技能提升

考点5 三角形形状的判定(偶考)

方法:判断三角形的形状,应围绕三角形的边角关系进行思考,主要看其是否是正三角形、等腰三角形、直角三角形、钝角三角形或锐角三角形,要特别注意“等腰直角三角形”与“等腰三角形或直角三角形”的区别.依据已知条件中的边角关系利用正弦定理把已知条件转化为内角的三角函数间的关系,通过三角恒等变换,得出内角的关系,从而判断出三角形的形状,此时要注意应用 $A+B+C=\pi$ 这个结论.

例5 在$\triangle ABC$中,已知 $a^2\tan B=b^2\tan A$,试判断$\triangle ABC$的形状.

【思路分析】根据正弦定理可以把问题转化为角的问题,借助三角恒等变换知识化简得到角与角的等量关系进一步判断.

【解】由已知得$\dfrac{a^2\sin B}{\cos B}=\dfrac{b^2\sin A}{\cos A}$.

由正弦定理的推广得 $a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$(R 为$\triangle ABC$的外接圆半径),

$\therefore \dfrac{4R^2\sin^2 A\sin B}{\cos B}=\dfrac{4R^2\sin^2 B\sin A}{\cos A}$,

即 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$,

$\therefore \sin 2A=\sin 2B$.

又$\because A,B$为三角形的内角,

$\therefore \triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形.

【点拨】本题中利用等式的形式,给出了$\triangle ABC$中的边角关系,在解答中可以先利用正弦定理把边都化为角,再利用三角关系进行化简、判断,这是求解此类问题的常用方法.

考点6 正弦定理的实际应用(偶考)

方法:用正弦定理解决实际问题,首先要正确画出符合题意的示意图,然后将问题转化为解三角形问题,即将实际问题转化为“数学模型”,这是我们解决这类问题的关键.如求最大值或最小值,则需经过化简或配方,并运用三角函数的性质解题.

例6 在埃及,有许多金字塔形的王陵,经过几千年的风化蚀食,有不少已经损坏了,考古人员在研究中测得一座金字塔的纵截面如图 1-1.1-3(顶部已经坍塌了),$A=50°$,$B=55°$,$AB=120$ m,如何求得它的高?(结果取整数)

【思路分析】本题可以转化成解三角形问题,先确定顶点 C,再求三角形的高.

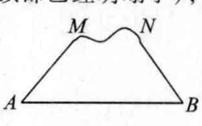


图 1-1.1-3

【解】延长 AM、BN 交于点 C,$C=180°-A-B=75°$.

由正弦定理有,$AC=\dfrac{AB}{\sin C}\cdot\sin B=\dfrac{120\sin 55°}{\sin 75°}$.

设高为 h,则 $h=AC\cdot\sin A=\dfrac{120\sin 55°}{\sin 75°}\cdot\sin 50°\approx 78$(m).

考点7 求最值或取值范围(必考)

方法:与正弦定理有关的三角函数最值的求法:①利用正弦定理理清三角形中基本量间的关系或求出某些基本量;②将要求最值或取值范围的量表示成某一变量的函数(包括三角函数),从而转化为求函数的最值问题.求式子的取值范围,可以将其转化为关于一个角的三角函数求最值问题.

例7 在$\triangle ABC$中,$c=\sqrt{2}+\sqrt{6}$,$C=30°$,求 $a+b$ 的取值范围.

【思路分析】我们研究取值范围和最值的最有力工具之一是函数知识,可以把 $a+b$ 化为某一个变量的函数,把求 $a+b$ 的取值范围问题,化为求函数值域的问题.

【解】$\because \dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a+b}{\sin A+\sin B}$,$c=\sqrt{2}+\sqrt{6}$,$C=30°$,

题练 5-1 若$\triangle ABC$中,$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin C$,则$\triangle ABC$是( ).

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰或直角三角形

▶2012 · 青岛二中仿真

题练 5-2 在$\triangle ABC$中,已知 $b=3$,$c=3\sqrt{3}$,$B=30°$,判断$\triangle ABC$的形状.

题练 5-3 已知方程 $x^2-(b\cos A)x+a\cos B=0$ 的两根之积等于两根之和,且 A,B 为$\triangle ABC$的内角,a,b 分别为 A,B 的对边,试判断$\triangle ABC$的形状.

题练 6-1 某部队在行军的过程中遇到一条河,河的两岸平行,现有米尺和 60°,45°测角仪,如何测量才能计算出河宽?

▶2012 · 安徽高二检测