北大燕园

考研必备(2002年版)

数学复习全书

【理工类】

主编 北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

国家行政学院出版社

考研必备（2002年版）

数学复习全书

【理工类】

主编 北京大学 李正元
清华大学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠
执笔 李正元 李永乐 袁荫棠
鹿立江 徐宝庆

国家行政学院出版社
·北京·

京新登字 323 号

图书在版编目（CIP）数据

2000 年全国硕士研究生入学考试数学复习全书：理工类/李正元等主编．
－北京：国家行政学院出版社，1999.4
ISBN 7-80140-053-4

Ⅰ.20…　Ⅱ.李…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-学习参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 09620 号

考研必备（2002 年版）

数学复习全书

［理工类］

李正元　李永乐　袁荫棠　主编

*

国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区厂洼街 11 号
邮政编码：100089
发行部电话：68920615
新华书店经销
北京市朝阳印刷厂印刷

*

787×1092　1/16 开本　34.75 印张　900 千字
2001 年 3 月第 3 版　2001 年 3 月第 1 次印刷
印数：1—5000 册
ISBN 7-80140-053-4/O·1　　定价：43.00 元

前　言

为了使考研同学能在较短时间内全面复习数学，达到硕士学习阶段应具备的数学能力，提高考研应试水平，以合格的数学成绩任国家挑选，作者根据教育部制订的《数学考试大纲》的要求和最新精神，深入研究了近年来考研命题的特点及动态，并结合作者多年来数学阅卷以及全国大部分城市“考研班”辅导的经验，编写了这本《2000 年考研数学复习全书》及其姊妹篇《2000 年考研数学全真模拟试题详解》(6 月出版)。在编写时，作者特别注重与学生的实际相结合，注重与考研的要求相结合。

本书每章均由以下四个部分构成：

一、本章知识串讲——编写该部分的目的主要使考生能明确本章的重点、难点及常考点，让考生弄清各知识点之间的相互联系，以便对本章内容有一个全局性的认识和把握。

二、大纲考查要点诠释——本部分对大纲所要求的知识点进行了全面地阐述，并对考试重点、难点以及常考点进行了剖析，指出了历届考生在运用基本概念、公式、定理等知识解题时普遍存在的问题及常犯的错误，同时给出了相应的注意事项，以加深考生对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

三、典型题型分析及解题方法与技巧——本部分对历年统考中常见题型进行了归纳分类，归纳总结了各种题型的解题方法，注重一题多解，以期开阔考生的解题思路，使所学知识融会贯通，并能综合、灵活地解决问题。

四、自测题及参考答案——本部分精选了适量的自测题，并附有参考答案和解题提示。只有适量的练习才能巩固所学知识，复习数学必须作题。为了让考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，作者特优化设计了与真题相仿的实战训练题编写在《2000 年考研数学全真模拟试题详解》一书中，以供考生选用。

特别需要强调的是，在 ’98 北大百年校庆之际，我们北大数学系 63 届校友聚会于北大燕园，畅谈中得知我们当中许多同学都在从事本科及研究生数学教学与数学研究工作，并有多年考研辅导的经验以及参加研究生入学考试阅卷的经历，对各类院校的考生有广泛的接触与了解，深知考生在考研数学备考中所面临的困惑。为了帮助考生全面系统并有针对性地复习，在大家的一致建议下，由我们执笔编写了这本《2000 年考研数学复习全书》及其姊妹篇《2000 年考研数学全真模拟试题详解》，期望对广大考生备考能有所裨益。

本书是考研应试者的良师益友，也是各类院校的学生自学教学、提高数学水平和教师进行教学辅导的一本极有价值的参考书。

由于时间仓促，书中疏漏之处在所难免，诚请专家和读者指正。

编　者

1999 年 4 月于北大燕园

第二版前言

本书是在作者多年考研数学辅导经验和阅卷经历的基础上编纂而成，去年5月正式出版．出版后，受到报考硕士研究生的考生和社会上读者的普遍欢迎．从反馈的信息中获悉，本书除考生用作应试复习参考书外，工科类在读大学生也将其作为数学的学习辅导资料，而教师则作为主要的教学参考用书之一．这既是对我们工作的肯定和鼓励，也是一种鞭策，促使我们对该书进行一次全面修正，以便及时反映当前研究生最新考试题型信息，使之与最新考试大纲吻合，更好地适应和满足读者考试复习辅导的需要．

2001年版在2000年数学复习全书版的基础上主要作了如下修改：(1) 录入了2000年考研数学典型考题并进行延拓，以帮助考生把握命题趋势和复习方向；(2) 调换并增加了若干典型例题和习题；(3) 将高等数学中第六章（几个重要定理及其应用）分解为两章（即微分学中的基本定理及其应用、多元函数积分学中的基本公式及其应用），并作了更加详细地讲解和说明，帮助考生对这些既是重点又是难点的考点能够彻底理解、吃透；(4) 补充了一些典型题型，特别是补充了颇具代表性的综合题题型，以解决许多考生对一些综合题无从下手的问题；(5) 在原书的基础上又归纳总结了一些常用结论，并加以证明和举例说明，使考生灵活应用，举一反三．

本书的高等数学部分由**北京大学李正元**修改完成，线性代数部分由**清华大学李永乐**修改完成，概率统计部分由**中国人民大学袁荫棠**修改完成．

编　者

2000年3月于北大

第三版前言

本书2002年版在2001年版的基础上重点作了如下修改：(1) 参编了2001年考研数学典型考题并进行延拓，以帮助考生把握命题趋势和复习方向；(2) 调换并增加了若干典型例题和习题，并修改了部分题的解法，使之更简捷；(3) **高等数学**部分重点修改了“第三章　一元函数积分及其计算”，补充了一些扩展性内容（如：原函数的存在性与不存在性等）；**线性代数**部分重点修改了“第四章　线性方程组”及“第五章　n阶矩阵的特征值与特征向量”；**概率统计**部分重新编写了“第二章　随机变量的概率分布及数字特征”，等等。作者对这些重点内容作了更加详细地讲解和说明，帮助考生对这些既是重点又是难点的考点能够彻底理解、吃透；(4) 补充了一些典型题型和简捷的解题方法，特别是补充了颇具代表性的综合题题型，以解决许多考生对一些综合题无从下手的问题，如：**高等数学**部分增加了“有关泰勒公式中值θ的性质的命题”等新题型及“积分不等式的证明”等解答新方法；**线性代数**部分增加了“有关基础解系的证明”等新题型及“行列式的计算、用特征值与特征向量反求矩阵A、线性相关与无关的证明”等新方法；**概率统计**部分增加了“随机变量数字特征的计算”等新题型及“随机变量数字特征的计算”等新方法。

本书的高等数学部分由**北京大学李正元**修改完成，线性代数部分由**清华大学李永乐**修改完成，概率统计部分由**中国人民大学袁荫棠**修改完成．

编　者

2001年3月于北大

共22章 每三天一章

目　录

第一篇　高等数学

第二篇 线性代数

第三篇 概率统计

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限、连续与求极限的方法

一、本章知识串讲

1. 微积分中研究的对象是函数. 函数概念的实质是变量之间确定的对应关系. 变量之间是否有函数关系，就看是否存在一种对应规则，使得其中一个量或几个量定了，另一个量也就被唯一确定，前者是一元函数，后者是多元函数.

函数这部分的重点是：复合函数、反函数和分段函数及函数记号的运算.

2. 极限是微积分的理论基础. 研究函数的性质实质上是研究各种类型的极限，如连续、导数、定积分、级数等等. 由此可见极限的重要性. 本章的重点内容是极限. 既要准确理解极限的概念，性质和极限存在的条件，又要能准确地求出各种极限. 求极限的方法很多，综合起来主要有：

① 利用极限的四则运算与幂指数运算法则；　② 利用洛必达法则；

③ 利用函数的连续性；　④ 利用变量替换与两个重要极限；

⑤ 数列极限转化为函数极限；　⑥ 利用夹逼定理；

⑦ 对递归数列先证明极限存在(常用到“单调有界数列有极限”的准则)，再利用递归关系求出极限；

⑧ 利用定积分求和式的极限；　⑨ 利用泰勒公式；

⑩ 利用导数的定义求极限.

3. 无穷小就是极限为零的变量. 极限问题可归结为无穷小问题. 极限方法的重要部分是无穷小分析，或说无穷小阶的估计与分析. 要理解无穷小及其阶的概念，学会比较无穷小的阶及确定无穷小阶的方法，会用等价无穷小因子替换求极限.

4. 我们研究的对象是连续函数或除若干点外是连续的函数. 由于函数的连续性是通过极限定义的，所以判断函数是否连续及函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限. 因此这部分也是本章的重点. 要掌握判断函数连续性及间断点类型的方法，特别是分段函数在连接点处的连续性.

二、大纲考查要点诠释

(一) 函数

1. 函数概念

函数关系的实质是变量之间的一种确定的对应关系. 定义域与对应规则是决定因素，有了它们函数的值域就自然被确定.

函数不依赖于对应规则的表现形式. 一个函数可能没有表达式，即使有表达式也可能在整个定义域上在自变量的不同变化范围，对应规则用不同的式子来表示，这就是所谓分段函数.

常量与变量，自变量与因变量是相对的. 一个量在某个过程中是常量，在另一过程中可以是变量，一个量在某个过程中是自变量，在另一过程中可以是因变量，这一点既简单又重要. 例如：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

在极限过程 $\Delta x \to 0$ 中 x 是常量. 求完了极限，x 可以是变量，$f'(x)$ 成为 x 的函数，它是 $f(x)$ 的导函数. $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 的复合函数中 u 是中间变量，它在函数 f 中是自变量，在函数 g 中是因变量.

2. 几类常见的函数

(1) 有界函数:若存在正数 M 使得 $\forall x \in X$ 有 $|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$ 是 X 上的有界函数或 $f(x)$ 在 X 上有界.它的几何意义是:函数图形界于直线 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间.

(2) 奇函数与偶函数:设区间 X 关于原点对称(若 $x \in X$,则 $-x \in X$),若 $\forall x \in X$,有 $f(x) = f(-x)$($f(x) = -f(-x)$),则称 $f(x)$ 在 X 上是偶函数(奇函数).它的几何意义是:奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

(3) 单调函数:设 $f(x)$ 定义在区间 X 上,$\forall x_1, x_2 \in X$,若 $x_1 < x_2$,有 $f(x_1) < f(x_2)$($f(x_1) > f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在区间 X 上单调增加(单调减少).它们统称为单调函数.$\forall x_1, x_2 \in X$,若 $x_1 < x_2$,有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$($f(x_1) \geqslant f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在区间 X 上单调不减(单调不增).

(4) 周期函数:设 $f(x)$ 定义在 X 上,若存在常数 $T \neq 0$,满足:$\forall x \in X$,有 $x \pm T \in X$ 且 $f(x+T) = f(x)$($\forall x \in X$),则称 $f(x)$ 为周期函数,T 为 $f(x)$ 的周期.它的几何意义是:自变量每增加或减少一固定的距离 T 后,图形重复出现.

若 $f(x)$ 以 T 为周期,则 $f(x)$ 有无穷多个周期,$nT(n = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 均为周期.若 $f(x)$ 的无穷多个正周期中存在最小数,称它为 $f(x)$ 的最小正周期,简称最小周期或周期.

【例 1.1】 设 $f(x) = x\tan x e^{\sin x}$,则 $f(x)$ 是( ).

(A) 偶函数 (B) 无界函数 (C) 周期函数 (D) 单调函数

【解法一】 由 $e^{\sin x}$ 有正下界:$e^{\sin x} \geqslant e^{-1}$ 及 $x\tan x$ 无界可证 $f(x)$ 无界.

因 $x\tan x$ 无界,则 $\forall M > 0, \exists x_0 \in$ 定义域,$|x_0 \tan x_0| > Me$,进而 $|f(x_0)| = |x_0 \tan x_0 e^{\sin x_0}| \geqslant Me \cdot e^{-1} = M$,即 $f(x)$ 无界.因此选(B).

【解法二】(排除法) 由于 $f(-x) = (-x)\tan(-x)e^{\sin(-x)} = x\tan x e^{-\sin x} \neq f(x)$,当 $\sin x \neq 0$ 时,$f(x)$ 不是偶函数.由 $f(0) = f(\pi) = 0$,知 $f(x)$ 不是单调函数.又 $f(x)$ 也不是周期函数,因此选(B).

3. 复合函数

设函数 $y = f(u)$,定义域 $D_f = U$,又有函数 $u = g(x)$,定义域 $D_g = X$,值域 $R_g = U'$.若 $U' \subset U$,可以在 X 上确定一个函数 $y = f(g(x))$,称为 $u = g(x)$ 与 $y = f(u)$ 的复合函数.

若 $R_g \cap D_f = \varnothing$,则不能构成复合函数 $y = f(g(x))$;

若 $R_g \subset D_f$,则可构成复合函数 $y = f(g(x))$,定义域为 X;

若 $R_g \cap D_f \neq \varnothing, R_g \not\subset D_f$,则可构成复合函数 $y = f(g(x))$,定义域包含在 X 中,但 $\neq X$.

【例 1.2】 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = e^x$, 求 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$.

【解】 基本思路是弄清两个函数定义域与值域的关系.

$$g(f(x)) = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$$

求 $f(g(x))$ 时,首先要考察:x 在什么范围内 $|g(x)| = e^x < 1, > 1$ 或 $= 0$.

$$|g(x)| = e^x \begin{cases} < 1, & x < 0, \\ = 1, & x = 0, \\ > 1, & x > 0, \end{cases} \quad \text{因此} \quad f(g(x)) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

【例 1.3】 设 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, $g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 求 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$.

【解】 $f(g(x)) = \frac{1}{2}[g(x) + |g(x)|] = g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$ (因为 $g(x) \geqslant 0$)

注意:$\forall x$,恒有 $f(x) \geqslant 0, f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ 则

$$g(f(x)) = f^2(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geqslant 0, \\ 0 & , x < 0. \end{cases}$$

4. 反函数

设有 $y = f(x), D_f = X, R_f = Y$,若 $\forall y \in Y$,有唯一确定的 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$,由此对应关系在 Y 上确定一个函数,称为 $y = f(x)$ 的反函数,记为 $x = f^{-1}(y)$. 习惯上,记 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$.

函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 有如下关系:

1° 若 $D_f = X, R_f = Y$,则 $D_{f^{-1}} = Y, R_{f^{-1}} = X$;

2° $f(f^{-1}(y)) = y \ (\forall y \in Y)$, $f^{-1}(f(x)) = x \ (\forall x \in D_f)$;

3° $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于 $y = x$ 对称,而 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图形重合.

$y = f(x), x \in X$ 且存在反函数 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_1$,有 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 特别地,若 $y = f(x)$ 在 X 上单调,则 $y = f(x)$ 在 X 上 $\exists$ 反函数.

【例 1.4】 求 $y = f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2 & , x < -1 \\ x^3 & , -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 12x - 16 & , x > 2 \end{cases}$ 的反函数.

【解】 当 $x < -1$ 时,$y = 1 - 2x^2 < -1$,则 $x = -\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}$ (另一舍去);

当 $-1 \leqslant x \leqslant 2$ 时,$y = x^3 \in [-1,8]$. $\forall y \in [-1,8]$,由 $y = x^3$,知 $x = \sqrt[3]{y}$;

当 $x > 2$ 时,$y = 12x - 16 > 8$. $\forall y > 8, y = 12x - 16$,知 $x = \dfrac{y+16}{12}$.

因此,反函数 $y = f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{1-x}{2}} & , x < -1, \\ \sqrt[3]{x} & , -1 \leqslant x \leqslant 8, \\ \dfrac{x+16}{12} & , x > 8. \end{cases}$

5. 初等函数

由六类基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算而得到的一切函数称为初等函数.

六类基本初等函数即指:

$y = c$(常数); $y = x^\alpha$; $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$; $y = \log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$;

$y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x$; $y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$.

6. 常见的函数形式

初等函数,隐函数 $(x - y + e^{xy} = 0)$,由参数方程确定的函数 $(x = \cos^3 t, y = \sin^3 t)$,由变限积分确定的函数 $\left(y = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)$,由函数项级数确定的函数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 以及由极限确定的函数等等.

(二) 极限的概念与性质

1. 定义

【定义 1.1】 $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$: $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N,当 $n > N$ 时,有 $|a_n - A| < \varepsilon$.

若 a_n 存在极限(有限数),又称 $\{a_n\}$ 收敛,否则称 $\{a_n\}$ 发散.

【定义 1.2】 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$: $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 正数 X,当 $|x| > X$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

类似可定义:$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

【定义 1.3】 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$: $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 正数 δ,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

类似可定义:$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A,\quad f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A.$

【定义 1.4】 设函数 $f(x,y)$ 在开区域或闭区域 D 有定义,$M_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点.

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$ 即 $\forall\varepsilon>0,\exists$ 正数 δ,当 $(x,y)\in D,0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

注意:这里的极限过程是点(x,y)在 D 内趋于点(x_0,y_0),它可以按任何方式沿任意曲线趋于(x_0,y_0).

2. 基本性质与两个重要极限

(1) 数列极限的基本性质

【定理 1.1】(极限的不等式性质) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=b.$

若 $a>b$,则 $\exists N$,当 $n>N$ 时,$x_n>y_n$; 若 $n>N$ 时,$x_n\geqslant y_n$,则 $a\geqslant b$.

【定理 1.2】(极限的唯一性) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=b$,则 $a=b$.

【定理 1.3】(收敛数列的有界性)

设 x_n 收敛,则 x_n 有界 (即 $\exists$ 常数 $M>0,|x_n|\leqslant M,n=1,2,\cdots$).

(2) 函数极限的基本性质

【定理 1.4】(极限的不等式性质) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B.$

若 $A>B$,则 $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)>g(x)$;

若 $f(x)\geqslant g(x)\ (0<|x-x_0|<\delta)$,则 $A\geqslant B$.

【推论】(极限的保号性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.若 $A>0\Rightarrow\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)>0$.若 $f(x)\geqslant 0\ (0<|x-x_0|<\delta)\Rightarrow A\geqslant 0$.

【定理 1.5】(极限的唯一性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$,则 $A=B$.

【定理 1.6】(存在极限的函数局部有界性)

设存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $U_0(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$ 内有界,即 $\exists\delta>0,M>0$ 使得 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)|\leqslant M$.

【注】 其它的极限过程如 $x\to x_0+0,x\to x_0-0,x\to+\infty,x\to-\infty$ 等等也有类似的结论.

(3) 两个重要极限

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}}\tag{1.1}$$

【例 1.5】 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2\sin\dfrac{1}{x}+2\sin x}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x\ln a}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sin x}{x}=3+0=3$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x\ln a}\xlongequal{t=a^x-1}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1.$

【评注】 要注意重要极限成立的条件,不要混淆,应熟悉等价表达式.

(三) 极限的存在与不存在问题

1. 数列敛散性的判别

【定理 1.7】(夹逼定理) 若 $\exists N$,当 $n>N$ 时,$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,且有 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=a$,

则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

【定理 1.8】(单调有界数列必收敛定理)　若数列 x_n 单调上升有上界,即 $x_{n+1} \geqslant x_n \quad (n = 1,2,\cdots)$ 并存在一个数 M 使得对一切的 n 有 $x_n \leqslant M$,则 x_n 收敛.即存在一个数 a,使得

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a,\text{且有 } x_n \leqslant a \ (n = 1,2,\cdots).$$

若数列 x_n 单调下降有下界,即 $x_{n+1} \leqslant x_n (n = 1,2,\cdots)$ 并存在一个数 m 使得对一切的 n 有 $x_n \geqslant m$,则 x_n 收敛.即存在一个数 a 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$,且有 $x_n \geqslant a \ (n = 1,2,\cdots)$.

此外,还可通过数列与级数的关系讨论敛散性:x_n 的敛散性与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 的敛散性相同.因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 的部分和数列是 $\{x_{n+1} - x_1\}$.

单调有界数列必有极限

【例 1.6】　设 $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$,　试证 $\{a_n\}$ 收敛.

【证明】　易见 $a_n \leqslant a_{n+1} \quad (n = 1,2,\cdots)$,只须再证 a_n 有上界:

$$a_n \leqslant 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$
$$= 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

因此利用单调有界数列必收敛定理即得结论.

2. 函数 $y = f(x)$ 的极限的存在与不存在问题

【定理 1.9】(夹逼定理)　设 $\exists\,\delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta$ 时,$h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$,又 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

【注】　其它的极限过程也有类似的结论.

【定理 1.10】(单侧极限与双侧极限的关系)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

$\sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3$

右极限=左极限?

对于分段函数　$f(x) = \begin{cases} g(x), & x_0 - \delta < x < x_0, \\ h(x), & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases}$　考察 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在就要分别求

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} h(x) \quad 与 \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} g(x).$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} a\dfrac{\sin x - x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}a = 2$

【例 1.7】　设 $f(x) = \begin{cases} a\dfrac{\sin x - x}{x^3}, & x > 0, \\ \dfrac{1}{x}\left(2\sin x - \displaystyle\int_0^x \sin t^2\,dt\right), & x < 0, \end{cases}$　问 a 为何值时 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在.

【分析】　分别求左、右极限 $f(0+0)$ 与 $f(0-0)$,由 $f(0+0) = f(0-0)$ 定出 a 值.

【解】　$f(0+0) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+}\left(a\dfrac{\sin x - x}{x^3}\right) \xlongequal{\frac{0}{0}\text{型}} \lim\limits_{x\to 0+} a\dfrac{\cos x - 1}{3x^2} = -\dfrac{a}{6}$,

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0-} f(x) = 2 - \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \sin t^2\,dt\right)'}{(x)'} = 2 - \lim_{x\to 0}\sin x^2 = 2.$$

由 $f(0+0) = f(0-0)$,得 $-\dfrac{a}{6} = 2$,即 $a = -12$.因此,仅当 $a = -12$ 时,存在 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$.

【例 1.8】　$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}}$ 是(　　).

(A) 0　　(B) $-\infty$　　(C) $+\infty$　　(D) 不存在但不是 ∞

【分析】　因 $\lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty$, $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{-t} = 0$.故要分别考察左、右极限.

【解】　$\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}} \xlongequal{t = \frac{1}{x-1}} \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t^2} = +\infty$,

$$\lim_{x\to 1-0}(x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}} \xlongequal{t=\frac{1}{x-1}} \lim_{t\to-\infty}\frac{e^t}{t^2}=0.$$

因此选(D).

【评注】 证明一元函数 $f(x)$ 的极限不存在常用的两种方法是:

1° 若 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.当 $x\to\infty$ 时的极限式中含有 $a^x(a>0,a\neq1)$,或 $\arctan x$, $\operatorname{arccot}x$,一定要分别求出 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 的极限值,若两者相等,则 $x\to\infty$ 时的极限存在,否则不存在.

2° 若 $\exists\, x_n\to x_0, x_n\neq x_0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$ 不存在或 $\exists\, x_n\to x_0(x_n\neq x_0), y_n\to x_0(y_n\neq x_0)$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to+\infty}f(y_n)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

【例 1.9】 证明 $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在.

【证明】 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$, $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$,则均有 $x_n\to0, y_n\to0\ (n\to+\infty)$,但

$$\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{1}{x_n}=1,\quad \lim_{n\to+\infty}\cos\frac{1}{y_n}=0.\quad 因此\quad \lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}\ 不存在.$$

3. 多元函数 $z=f(x,y)$ 极限的不存在问题

证明 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 不存在的方法:当 (x,y) 沿不同的路径趋于 (x_0,y_0) 时 $f(x,y)$ 趋于不同的值或 (x,y) 沿某路径趋于 (x_0,y_0) 时 $f(x,y)$ 趋于 ∞,则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 不存在.

【例 1.10】 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}$ 不存在.

【分析】 先考察 (x,y) 沿不同的直线趋于 $(0,0)$ 时 $f(x,y)$ 的极限.若不同,则得证;若相同,再考察 (x,y) 沿其它特殊的路径——曲线趋于 $(0,0)$ 时 $f(x,y)$ 的极限.

【证明】 令 $y=kx$ ((x,y) 沿不同的直线趋于 $(0,0)$),则

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to0}}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1+k^2)x^2}{(1+k^2+(1-k)^2)x^2}=\frac{1+k^2}{1+k^2+(1-k)^2}.$$

它随 k 而变,如 $k=0$ 时为 $\dfrac{1}{2}$, $k=1$ 时为 1.因此该极限不存在.

(四) 无穷小及其阶

1. 无穷小与无穷大的定义

【定义 1.5】 在某一极限过程中以零为极限的变量称为无穷小(量).

称 x_n 为无穷小,若 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$(记为 $x_n=o(1)\ (n\to+\infty)$);

称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷小,若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$(记为 $f(x)=o(1), x\to x_0$).

【定义 1.6】 称 x_n 为无穷大(量)($\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\infty$),若 $\forall M>0$, $\exists$ 自然数 N,当 $n>N$ 时, $|x_n|>M$.

称 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 为无穷大(量)($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$),若 $\forall M>0$, $\exists X>0$,当 $|x|>X$ 时, $|f(x)|>M$.

称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷大(量)($\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$),若 $\forall M>0$, $\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(x)|>M$.

类似可定义正无穷大(量)和负无穷大(量).

2. 无穷小与无穷大、无穷小与极限的关系

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.