



考研必备(2002年版)

数学

复习全书

【理工类】

主编 北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
中 国 人 民 大 学 袁荫棠

国家行政学院出版社

江南大学图书馆



90711072

90711072

考研必备 (2002 年版)

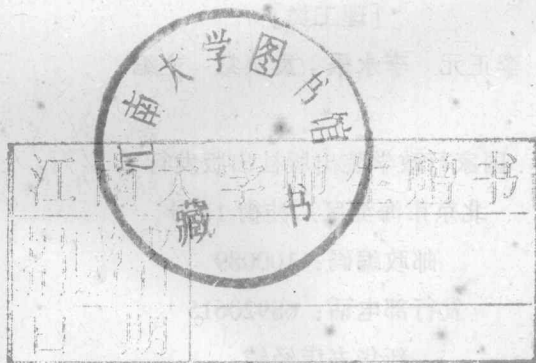
数学复习全书

【理工类】

14.16-b.16

主编 北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

执笔 李正元 李永乐 袁荫棠
鹿立江 徐宝庆



国家行政学院出版社
· 北 京 ·

京新登字 323 号

图书在版编目 (CIP) 数据

2000 年全国硕士研究生入学考试数学复习全书: 理工类/李正元等主编.

- 北京: 国家行政学院出版社, 1999.4

ISBN 7-80140-053-4

I. 20… II. 李… III. 高等数学-研究生-入学考试-学习参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 09620 号

考研必备 (2002 年版)

数学复习全书

[理工类]

李正元 李永乐 袁荫棠 主编

*

国家行政学院出版社出版发行

北京市海淀区厂洼街 11 号

邮政编码: 100089

发行部电话: 68920615

新华书店经销

北京市朝阳区印刷厂印刷

*

787×1092 1/16 开本 34.75 印张 900 千字

2001 年 3 月第 3 版 2001 年 3 月第 1 次印刷

印数: 1—5000 册

ISBN 7-80140-053-4/O·1 定价: 43.00 元

前 言

为了使考研同学能在较短时间内全面复习数学,达到硕士学习阶段应具备的数学能力,提高考研应试水平,以合格的数学成绩任国家挑选,作者根据教育部制订的《数学考试大纲》的要求和最新精神,深入研究了近年来考研命题的特点及动态,并结合作者多年来数学阅卷以及全国大部分城市“考研班”辅导的经验,编写了这本《2000年考研数学复习全书》及其姊妹篇《2000年考研数学全真模拟试题详解》(6月出版)。在编写时,作者特别注重与学生的实际相结合,注重与考研的要求相结合。

本书每章均由以下四个部分构成:

一、本章知识串讲——编写该部分的目的主要使考生能明确本章的重点、难点及常考点,让考生弄清各知识点之间的相互联系,以便对本章内容有一个全局性的认识和把握。

二、大纲考查要点注释——本部分对大纲所要求的知识点进行了全面地阐述,并对考试重点、难点以及常考点进行了剖析,指出了历届考生在运用基本概念、公式、定理等知识解题时普遍存在的问题及常犯的错误,同时给出了相应的注意事项,以加深考生对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

三、典型题型分析及解题方法与技巧——本部分对历年统考中常见题型进行了归纳分类,归纳总结了各种题型的解题方法,注重一题多解,以期开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,并能综合、灵活地解决问题。

四、自测题及参考答案——本部分精选了适量的自测题,并附有参考答案和解题提示。只有适量的练习才能巩固所学知识,复习数学必须做题。为了让考生更好地巩固所学知识,提高实际解题能力,作者特优化设计了与真题相仿的实战训练题编写在《2000年考研数学全真模拟试题详解》一书中,以供考生选用。

特别需要强调的是,在'98北大百年校庆之际,我们北大数学系63届校友聚会于北大燕园,畅谈中得知我们当中许多同学都在从事本科及研究生数学教学与数学研究工作,并有多年的考研辅导的经验以及参加研究生入学考试阅卷的经历,对各类院校的考生有广泛的接触与了解,深知考生在考研数学备考中所面临的困惑。为了帮助考生全面系统并有针对性地复习,在大家的一致建议下,由我们执笔编写了这本《2000年考研数学复习全书》及其姊妹篇《2000年考研数学全真模拟试题详解》,期望对广大考生备考能有所裨益。

本书是考研应试者的良师益友,也是各类院校的学生自学教学、提高数学水平和教师进行教学辅导的一本极有价值的参考书。

由于时间仓促,书中疏漏之处在所难免,诚请专家和读者指正。

编 者

1999年4月于北大燕园

第二版前言

本书是在作者多年考研数学辅导经验和阅卷经历的基础上编纂而成,去年5月正式出版.出版后,受到报考硕士研究生的考生和社会上读者的普遍欢迎.从反馈的信息中获悉,本书除考生用作应试复习参考书外,工科类在读大学生也将其作为数学的学习辅导资料,而教师则作为主要的教学参考用书之一.这既是对我们工作的肯定和鼓励,也是一种鞭策,促使我们对该书进行一次全面修正,以便及时反映当前研究生最新考试题型信息,使之与最新考试大纲吻合,更好地适应和满足读者考试复习辅导的需要.

2001年版在2000年数学复习全书版的基础上主要作了如下修改:(1)录入了2000年考研数学典型考题并进行延拓,以帮助考生把握命题趋势和复习方向;(2)调换并增加了若干典型例题和习题;(3)将高等数学中第六章(几个重要定理及其应用)分解为两章(即微分学中的基本定理及其应用、多元函数积分学中的基本公式及其应用),并作了更加详细地讲解和说明,帮助考生对这些既是重点又是难点的考点能够彻底理解、吃透;(4)补充了一些典型题型,特别是补充了颇具代表性的综合题题型,以解决许多考生对一些综合题无从下手的问题;(5)在原书的基础上又归纳总结了一些常用结论,并加以证明和举例说明,使考生灵活应用,举一反三.

本书的高等数学部分由北京大学李正元修改完成,线性代数部分由清华大学李永乐修改完成,概率统计部分由中国人民大学袁荫棠修改完成.

编者

2000年3月于北大

第三版前言

本书2002年版在2001年版的基础上重点作了如下修改:(1)参编了2001年考研数学典型考题并进行延拓,以帮助考生把握命题趋势和复习方向;(2)调换并增加了若干典型例题和习题,并修改了部分题的解法,使之更简捷;(3)高等数学部分重点修改了“第三章 一元函数积分及其计算”,补充了一些扩展性内容(如:原函数的存在性与不存在性等);线性代数部分重点修改了“第四章 线性方程组”及“第五章 n 阶矩阵的特征值与特征向量”;概率统计部分重新编写了“第二章 随机变量的概率分布及数字特征”,等等.作者对这些重点内容作了更加详细地讲解和说明,帮助考生对这些既是重点又是难点的考点能够彻底理解、吃透;(4)补充了一些典型题型和简捷的解题方法,特别是补充了颇具代表性的综合题题型,以解决许多考生对一些综合题无从下手的问题,如:高等数学部分增加了“有关泰勒公式中值 θ 的性质的命题”等新题型及“积分不等式的证明”等解答新方法;线性代数部分增加了“有关基础解系的证明”等新题型及“行列式的计算、用特征值与特征向量反求矩阵 A 、线性相关与无关的证明”等新方法;概率统计部分增加了“随机变量数字特征的计算”等新题型及“随机变量数字特征的计算”等新方法.

本书的高等数学部分由北京大学李正元修改完成,线性代数部分由清华大学李永乐修改完成,概率统计部分由中国人民大学袁荫棠修改完成.

编者

2001年3月于北大

目 录

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续与求极限的方法

方法	1
一、本章知识串讲	1
二、大纲考查要点诠释	1
(一) 函数	1
(二) 极限的概念与性质	3
(三) 极限的存在与不存在问题	4
(四) 无穷小及其阶	6
(五) 函数的连续性及其判断	8
(六) 求极限的方法	10
三、典型题型分析及解题方法与技巧	17
题型(一) 求反函数	17
题型(二) 求复合函数	17
题型(三) 利用函数概念求函数表达式	18
题型(四) 求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限	18
题型(五) 求 $0 \cdot \infty$ 或 $\infty - \infty$ 型的极限	20
题型(六) 求指数型($1^\infty, 0^0, \infty^0$)的极限	21
题型(七) 求含变限积分的不定式的极限	21
题型(八) 由极限值确定函数式中的参数	22
题型(九) 利用夹逼法求极限	23
题型(十) 求 n 项和数列的极限	23
题型(十一) 求 n 项积数列的极限	24
题型(十二) 求递归数列的极限	25
题型(十三) 利用函数极限求数列极限	26
题型(十四) 无穷小的比较与无穷小的阶的确定	27
题型(十五) 讨论函数的连续性与间断点的类型	28
题型(十六) 极限的证明题	29
自测题及参考答案	29
第二章 导数与微分概念及其计算	31
一、本章知识串讲	31

二、大纲考查要点诠释	31
(一) 一元函数的导数与微分	31
(二) 多元函数的偏导数、方向导数与全微分	35
(三) 按定义求导	38
(四) 基本初等函数导数表与导数四则运算法则	38
(五) 复合函数的微分法则	39
(六) 由复合函数求导法则导出的微分法则	41
(七) 复合函数求导法则的应用——变量替换下的偏导数计算	46
(八) 分段函数求导法	46
(九) 高阶导数及 n 阶导数的求法	48
(十) 方向导数的计算(数二不要求)	50
三、典型题型分析及解题方法与技巧	51
题型(一) 有关一元函数的导数与微分概念的命题	51
题型(二) 一元函数可导函数与不可导函数乘积的可导性的讨论	51
题型(三) 求一元各类函数的导数与微分	53
题型(四) 变限积分的求导	57
题型(五) 一元函数求导与求微分的综合题	58
题型(六) 求一元函数的 n 阶导数	59
题型(七) 一元分段函数的可导性与导函数的连续性等命题的讨论	59
题型(八) 有关多元函数偏导数与全微分概念的命题	61
题型(九) 求二元(三元)各类函数的偏导数与全微分	62
题型(十) 变量替换下方程式的变形(数二不要求)	67
题型(十一) 求二元、三元函数的梯度与方向导数(数二不要求)	67
题型(十二) 有关多元函数的综合	

题(教二不要求)	68
自测题及参考答案	69
第三章 一元函数积分及其计算	72
一、本章知识串讲	72
二、大纲考查要点诠释	72
(一)一元函数积分的概念、性质与基 本定理	72
(二)积分法则	77
(三)按函数类的积分法	85
(四)广义积分	88
三、典型题型分析及解题方法与技巧	89
题型(一) 有关原函数与定积分概念的 命题	89
题型(二) 积分值的比较或判断积分值 的符号	90
题型(三) 估计积分值	91
题型(四) 有关原函数的存在性问题	91
题型(五) 求分段函数的原函数	93
题型(六) 各类被积函数不定积分的 计算	93
题型(七) 各类被积函数定积分的计算	95
题型(八) 利用若干积分技巧计算积分	98
题型(九) 求形如 $\int_a^b (f(x) \int_a^x g(y) dy) dx$ 的积分	100
题型(十) 由函数方程求积分	101
题型(十一) 广义积分的计算	102
题型(十二) 证明积分等式	103
题型(十三) 证明积分不等式	104
题型(十四) 关于变限积分的讨论	107
题型(十五) 综合题	108
自测题及参考答案	110
第四章 微分学中的基本定理及其 应用	112
一、本章知识串讲	112
二、大纲考查要点诠释	112
(一)连续函数的性质	112
(二)微分中值定理及其应用	114
(三)利用导数研究函数的变化	115
(四)微分中值定理的其它应用	120
(五)一元函数的泰勒公式及其应用	120
(六)多元函数极值充分判别法	122
三、典型题型分析及解题方法与技巧	123
题型(一) 有关连续函数性质的命题	123

题型(二) 有关利用导数研究函数的 变化的命题	125
题型(三) 有关泰勒公式及其应用的 命题	130
题型(四) 讨论函数的零点	132
题型(五) 用微分学的方法证明不等式	141
题型(六) 有关泰勒公式的中值 θ 的 性质的命题	148
自测题及参考答案	150
第五章 向量代数和空间解析几何	152
一、本章知识串讲	152
二、大纲考查要点诠释	152
(一)空间直角坐标系	152
(二)向量的概念	152
(三)向量的运算	153
(四)平面方程、直线方程	156
(五)平面、直线之间相互关系的问题	157
(六)常用二次曲面的方程及其图形	158
(七)空间曲线在坐标平面上的投影	160
三、典型题型分析及解题方法与技巧	160
题型(一) 向量的运算	160
题型(二) 求平面方程	161
题型(三) 求空间的直线方程	163
题型(四) 求点、直线、平面间的关系	164
题型(五) 求投影方程	165
题型(六) 求曲面方程	166
自测题及参考答案	167
第六章 多元函数积分及其计算	168
一、本章知识串讲	168
二、大纲考查要点诠释	168
(一)多元函数积分的概念与性质	168
(二)在直角坐标系中化多元函数的积分 为定积分	172
(三)重积分的变量替换	178
(四)如何应用多元函数积分的计算公式 及如何简化计算	183
三、典型题型分析及解题方法与技巧	192
题型(一) 积分值的比较与估计	192
题型(二) 有关多元函数积分的概念 与性质的命题	193
题型(三) 对称性的应用	195
题型(四) 交换积分顺序与计算累次 积分	199
题型(五) 两种坐标系中累次积分的	

转换	202
题型(六) 二重积分的计算	202
题型(七) 三重积分的计算	206
题型(八) 曲线积分的计算	209
题型(九) 曲面积分的计算	211
题型(十) 证明题与综合题	213
自测题及参考答案	216

第七章 多元函数积分学中的基本公式

及其应用	217
一、本章知识串讲	217
二、大纲考查要点诠释	217
1. 多元函数积分学中的基本公式——格林公式, 高斯公式与斯托克斯公式	217
2. 向量场的通量与散度, 环流量与旋度	218
3. 格林公式, 高斯公式与斯托克斯公式的一个应用——简化多元函数积分的计算	220
4. 用线积分表示平面区域的面积, 用面积分表示空间区域的体积	223
5. 平面上曲线积分与路径无关问题	224
三、典型题型分析及解题方法与技巧	228
题型(一) 格林公式、高斯公式与斯托克斯公式在计算多元函数积分中的应用	228
题型(二) 平面上第二类曲线积分与路径无关问题与原函数的求法	232
题型(三) 散度与旋度的计算	235
题型(四) 综合题	236
自测题及参考答案	239

第八章 微积分学的应用

一、本章知识串讲	240
二、大纲考查要点诠释	240
(一) 微分学的几何应用	240
(二) 积分学应用的基本方法——微元分析法	244
(三) 积分学的几何应用	244
(四) 一元函数积分学的物理应用	252
(五) 多元函数积分学的物理应用(数二不要求)	254
(六) 一元函数的最大值与最小值问题	257
(七) 多元函数的最大值与最小值问题	259
三、典型题型分析及解题方法与技巧	261
题型(一) 一元函数微积分的几何应用	261
题型(二) 一元微积分的物理应用	268

题型(三) 一元函数的最值问题	270
题型(四) 综合题	272
题型(五) 多元函数微积分的几何应用(数二不要求)	274
题型(六) 多元函数积分学的物理应用(数二不要求)	278
题型(七) 多元函数的最值问题	281
题型(八) 综合题(数二不要求)	283
自测题及参考答案	284

第九章 无穷级数

一、本章知识串讲	286
二、大纲考查要点诠释	286
(一) 常数项级数的概念与基本性质	286
(二) 正项级数敛散性的判定	287
(三) 交错级数的敛散性判别法	288
(四) 绝对收敛与条件收敛	289
(五) 函数项级数的收敛域与和函数	289
(六) 幂级数的收敛域	290
(七) 幂级数的运算与和函数的性质	291
(八) 函数的幂级数展开	292
(九) 幂级数在近似计算上的简单应用	293
(十) 傅里叶级数	293
三、典型题型分析及解题方法与技巧	296
题型(一) 常数项级数敛散性的判定	296
题型(二) 求一般函数项级数的收敛域	301
题型(三) 幂级数有关问题的讨论	302
题型(四) 常数项级数求和	306
题型(五) 有关傅里叶级数的命题	308
题型(六) 证明题与综合题	311
自测题及参考答案	314

第十章 微分方程

一、本章知识串讲	316
二、大纲考查要点诠释	316
(一) 基本概念	316
(二) 一阶微分方程	317
(三) 可降阶的高阶方程	320
(四) 线性微分方程解的性质与结构	321
(五) 二阶和某些高阶常系数齐次线性方程、欧拉方程	322
(六) 二阶常系数非齐次线性方程	323
(七) 可化为求解微分方程的两类问题	324
(八) 一阶常系数线性方程组(数二不要求)	325
(九) 幂级数解法	326

(十)应用问题	326
三、典型题型分析及解题方法与技巧	327
题型(一) 变量可分离的方程与齐次方 程的求解	327
题型(二) 通过简单代换化为变量可分 离的方程的求解 (数二不要求)	327
题型(三) 一阶线性方程与可化为一阶 线性方程的求解	328
题型(四) 全微分方程与可化为全微分 方程的求解 (数二不要求)	329
题型(五) 可降阶的高阶微分方程的求 解	330
题型(六) 二阶线性常系数方程的求解	331
题型(七) 特殊的变系数二阶线性方程 的求解	332
题型(八) 已知特解求通解	333
题型(九) 含变限积分方程的求解	333
题型(十) 综合题与证明题	334
题型(十一) 有关微分方程应用题的 求解	334
自测题及参考答案	337

第二篇 线性代数

第一章 行列式	340
一、本章知识串讲	340
二、大纲考查要点诠释	340
1. 行列式的概念	340
2. 行列式按行(列)展开公式	341
3. 行列式的性质	342
4. 几个重要公式	343
三、典型题型分析及解题方法与技巧	344
题型(一) 有关行列式的概念与性质 的命题	344
题型(二) 行列式的计算	347
题型(三) 含参数行列式的计算	351
题型(四) 关于 $ A = 0$ 的证明	352
自测题及参考答案	353
第二章 矩阵及其运算	355
一、本章知识串讲	355
二、大纲考查要点诠释	355
1. 矩阵的概念	355

2. 几类特殊方阵	355
3. 矩阵的运算	356
4. 关于逆矩阵的运算规律	357
5. 关于矩阵转置的运算规律	357
6. 关于伴随矩阵的运算规律	357
7. 矩阵 A 可逆的充分必要条件	357
8. 初等变换	357
9. 初等矩阵	358
10. 矩阵的等价	358
11. 矩阵方程	358
三、典型题型分析及解题方法与技巧	358
题型(一) 有关矩阵的概念及运算	358
题型(二) 求方阵的幂	360
题型(三) 求与已知矩阵可交换的矩阵	362
题型(四) 有关初等矩阵的命题	364
题型(五) 矩阵可逆的计算与证明	365
题型(六) 求解矩阵方程	368
自测题及参考答案	371
第三章 n 维向量与向量空间	374
一、本章知识串讲	374
二、大纲考查要点诠释	374
1. n 维向量的概念与运算	374
2. 线性组合与线性表出	374
3. 线性相关与线性无关	375
4. 线性相关与线性表出	376
5. 向量组的秩与矩阵的秩	376
6. 矩阵秩的重要公式	376
7. 向量空间与子空间	377
8. 基、维数、坐标	377
9. 基变换与坐标变换	377
10. 标准正交基与 Schmidt 正交化	378
三、典型题型分析及解题方法与技巧	378
题型(一) 线性组合、线性相关的判别	378
题型(二) 线性相关与线性无关的证明	382
题型(三) 求秩与极大线性无关组	386
题型(四) 有关秩的证明	389
题型(五) 关于 $A = 0$ 的证明	390
题型(六) 有关向量空间的判定、维数、 基与坐标的命题	391
题型(七) 求过渡矩阵及坐标变换	392
题型(八) 求标准正交基	393
题型(九) 有关秩与直线平面的综合题	394
自测题及参考答案	396
第四章 线性方程组	399

一、本章知识串讲	399
二、大纲考查要点诠释	399
1. 线性方程组的各种表达形式	399
2. 齐次方程组 $Ax=0$ 恒有解 (必有零解)	399
3. 如 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l$ 是 $Ax=0$ 的基础 解系	399
4. 齐次方程组有非零解的判定	400
5. 非齐次线性方程组有解的判定	400
6. 非齐次线性方程组解的结构	400
7. 克莱姆(Cramer)法则	400
三、典型题型分析及解题方法与技巧	401
题型(一) 线性方程组解的基本概念	401
题型(二) 线性方程组的求解	404
题型(三) 含有参数的方程组解的讨论	405
题型(四) 有关基础解系的证明	406
题型(四) 有关线性方程组的证明题	408
自测题及参考答案	411

第五章 n 阶矩阵的特征值与特征向量

一、本章知识串讲	414
二、大纲考查要点诠释	414
1. 矩阵的特征值与特征向量的概念	414
2. 特征值与特征向量的求法	414
3. 特征值与特征向量的性质	415
4. 相似矩阵的概念与性质	415
5. 矩阵可相似对角化的充分必要条件	415
6. 化 A 为对角矩阵 Λ 的解题步骤	416
7. 实对称矩阵必可对角化	416
三、典型题型分析及解题方法与技巧	416
题型(一) 求矩阵的特征值和特征向量	416
题型(二) 用特征值和特征向量反求 矩阵 A	421
题型(三) 求矩阵 A 中的参数	423
题型(四) n 阶矩阵 A 能否对角化的 判定	424
题型(五) 求矩阵 A 的相似标准形	425
题型(六) 求相似时的矩阵 P	427
题型(七) 相似对角化的应用	428
题型(八) 有关特征值与特征向量的 证明	430
自测题及参考答案	431

第六章 二次型

一、本章知识串讲	434
二、大纲考查要点诠释	434

1. 二次型及其矩阵表示	434
2. 二次型的标准形	434
3. 惯性定理	435
4. 合同矩阵	436
5. 正定二次型与正定矩阵	436
三、典型题型分析及解题方法与技巧	436
题型(一) 有关二次型基本概念的 命题	436
题型(二) 化二次型为标准形	438
题型(三) 求解二次型标准形的逆 问题	442
题型(四) 判别二次型的正定性	443
题型(五) 有关正定性的证明	444
题型(六) 有关正定矩阵的综合题	445
自测题及参考答案	446

第三篇 概率统计

第一章 随机事件与概率

一、本章知识串讲	448
二、大纲考查要点诠释	448
(一) 随机事件的关系与运算	448
(二) 随机事件的概率	449
(三) 条件概率与全概率公式	451
(四) 事件的独立性与伯努利公式	452
三、典型题型分析及解题方法与技巧	453
题型(一) 随机事件间的关系与运算	453
题型(二) 有关概率的定义与性质的 命题	454
题型(三) 利用全概率公式与贝叶斯 公式计算概率	457
自测题及参考答案	461

第二章 随机变量的分布与数字特征

一、本章知识串讲	464
二、大纲考查要点诠释	464
1. 随机变量	464
2. 分布函数	464
3. 离散型随机变量	465
4. 连续型随机变量	465
5. 几个常见分布	466
6. 随机变量函数的分布	468
7. 一维随机变量的数字特征	468
三、典型题型分析及解题方法与技巧	469
题型(一) 确定随机变量概率分布中的	

未知参数	469
题型(二) 确定随机变量的概率分布	471
题型(三) 求随机变量函数的分布	474
题型(四) 随机变量数字特征的计算	477
题型(五) 综合应用题	479
自测题及参考答案	483
第三章 二维随机变量的概率分布及其	
数字特征	486
一、本章知识串讲	486
二、大纲考查要点诠释	486
1. 二维随机变量的联合分布函数与边缘	
分布函数	486
2. 二维离散型随机变量	486
3. 二维连续型随机变量	487
4. 二维随机变量的条件分布	488
5. 两个常见的二维连续型随机变量的	
分布	489
6. 二维随机变量的协方差、相关系数	
与相互独立性	490
7. 随机变量的矩	492
8. 二维随机变量函数的分布	492
三、典型题型分析及解题方法与技巧	493
题型(一) 有关概率分布的计算	493
题型(二) 有关分布函数及密度函数	
的命题	495
题型(三) 求两个随机变量函数的分	
布	499
题型(四) 关于数字特征的命题	503
题型(五) 应用题与综合题	508
自测题及参考答案	509

第四章 大数定律和中心极限定理	513
一、本章知识串讲	513
二、大纲考查要点诠释	513
(一) 大数定律	513
(二) 中心极限定理	514
三、典型题型分析及解题方法与技巧	515
题型(一) 切比雪夫不等式与大数	
定律	515
题型(二) 中心极限定理的应用	516
自测题及参考答案	521
第五章 数理统计的基本概念	523
一、本章知识串讲	523
二、大纲考查要点诠释	523
(一) 总体、样本、样本的数字特征	523
(二) 统计量及抽样分布	523
三、典型题型分析及解题方法与技巧	526
自测题及参考答案	530
第六章 参数估计和假设检验	531
一、本章知识串讲	531
二、大纲考查要点诠释	531
(一) 统计估计	531
(二) 假设检验	534
三、典型题型分析及解题方法与技巧	535
题型(一) 最大似然估计与矩估计	535
题型(二) 点估计的无偏性与有效性	537
题型(三) 正态总体期望与方差的区	
间估计	539
题型(四) 正态总体期望与方差的假	
设检验	540
自测题及参考答案	543

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续与求极限的方法

一、本章知识串讲

1. 微积分中研究的对象是函数. 函数概念的实质是变量之间确定的对应关系. 变量之间是否有函数关系, 就看是否存在一种对应规则, 使得其中一个量或几个量定了, 另一个量也就被唯一确定, 前者是一元函数, 后者是多元函数.

函数这部分的重点是: 复合函数、反函数和分段函数及函数记号的运算.

2. 极限是微积分的理论基础. 研究函数的性质实质上是研究各种类型的极限, 如连续、导数、定积分、级数等等. 由此可见极限的重要性. 本章的重点内容是极限. 既要准确理解极限的概念, 性质和极限存在的条件, 又要能准确地求出各种极限. 求极限的方法很多, 综合起来主要有:

- | | |
|---|------------------|
| ① 利用极限的四则运算与幂指数运算法则; | ② 利用洛必达法则; |
| ③ 利用函数的连续性; | ④ 利用变量替换与两个重要极限; |
| ⑤ 数列极限转化为函数极限; | ⑥ 利用夹逼定理; |
| ⑦ 对递归数列先证明极限存在(常用到“单调有界数列有极限”的准则), 再利用递归关系求出极限; | |
| ⑧ 利用定积分求和式的极限; | ⑨ 利用泰勒公式; |
| ⑩ 利用导数的定义求极限. | |

3. 无穷小就是极限为零的变量. 极限问题可归结为无穷小问题. 极限方法的重要部分是无穷小分析, 或说无穷小阶的估计与分析. 要理解无穷小及其阶的概念, 学会比较无穷小的阶及确定无穷小阶的方法, 会用等价无穷小因子替换求极限.

4. 我们研究的对象是连续函数或除若干点外是连续的函数. 由于函数的连续性是通过极限定义的, 所以判断函数是否连续及函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限. 因此这部分也是本章的重点. 要掌握判断函数连续性 & 间断点类型的方法, 特别是分段函数在连接点处的连续性.

二、大纲考查要点诠释

(一) 函数

1. 函数概念

函数关系的实质是变量之间的一种确定的对应关系. 定义域与对应规则是决定因素, 有了它们函数的值域就自然被确定.

函数不依赖于对应规则的表现形式. 一个函数可能没有表达式, 即使有表达式也可能在整个定义域上在自变量的不同变化范围, 对应规则用不同的式子来表示, 这就是所谓分段函数.

常量与变量, 自变量与因变量是相对的. 一个量在某个过程中是常量, 在另一过程中可以是变量, 一个量在某个过程中是自变量, 在另一过程中可以是因变量, 这一点既简单又重要. 例如:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

在极限过程 $\Delta x \rightarrow 0$ 中 x 是常量, 求完了极限, x 可以是变量, $f'(x)$ 成为 x 的函数, 它是 $f(x)$ 的导函数. $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 的复合函数中 u 是中间变量, 它在函数 f 中是自变量, 在函数 g 中是因变量.

2. 几类常见的函数

(1) 有界函数:若存在正数 M 使得 $\forall x \in X$ 有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 是 X 上的有界函数或 $f(x)$ 在 X 上有界. 它的几何意义是:函数图形界于直线 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间.

(2) 奇函数与偶函数:设区间 X 关于原点对称(若 $x \in X$, 则 $-x \in X$), 若 $\forall x \in X$, 有 $f(x) = f(-x)$ ($f(x) = -f(-x)$), 则称 $f(x)$ 在 X 上是偶函数(奇函数). 它的几何意义是:奇函数的图形关于原点对称, 偶函数的图形关于 y 轴对称.

(3) 单调函数:设 $f(x)$ 定义在区间 X 上, $\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 X 上单调增加(单调减少). 它们统称为单调函数. $\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 X 上单调不减(单调不增).

(4) 周期函数:设 $f(x)$ 定义在 X 上, 若存在常数 $T \neq 0$, 满足: $\forall x \in X$, 有 $x \pm T \in X$ 且 $f(x+T) = f(x)$ ($\forall x \in X$), 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 为 $f(x)$ 的周期. 它的几何意义是:自变量每增加或减少一固定的距离 T 后, 图形重复出现.

若 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(x)$ 有无穷多个周期, nT ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) 均为周期. 若 $f(x)$ 的无穷多个正周期中存在最小数, 称它为 $f(x)$ 的最小正周期, 简称最小周期或周期.

【例 1.1】 设 $f(x) = x \tan x e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是().

(A) 偶函数 (B) 无界函数 (C) 周期函数 (D) 单调函数

【解法一】 由 $e^{\sin x}$ 有正下界: $e^{\sin x} \geq e^{-1}$ 及 $x \tan x$ 无界可证 $f(x)$ 无界.

因 $x \tan x$ 无界, 则 $\forall M > 0, \exists x_0 \in \text{定义域}, |x_0 \tan x_0| > Me$, 进而 $|f(x_0)| = |x_0 \tan x_0 e^{\sin x_0}| \geq Me \cdot e^{-1} = M$, 即 $f(x)$ 无界. 因此选(B).

【解法二】(排除法) 由于 $f(-x) = (-x) \tan(-x) e^{\sin(-x)} = x \tan x e^{-\sin x} \neq f(x)$, 当 $\sin x \neq 0$ 时, $f(x)$ 不是偶函数. 由 $f(0) = f(\pi) = 0$, 知 $f(x)$ 不是单调函数. 又 $f(x)$ 也不是周期函数, 因此选(B).

3. 复合函数

设函数 $y = f(u)$, 定义域 $D_f = U$, 又有函数 $u = g(x)$, 定义域 $D_g = X$, 值域 $R_g = U'$. 若 $U' \subset U$, 可以在 X 上确定一个函数 $y = f(g(x))$, 称为 $u = g(x)$ 与 $y = f(u)$ 的复合函数.

若 $R_g \cap D_f = \emptyset$, 则不能构成复合函数 $y = f(g(x))$;

若 $R_g \subset D_f$, 则可构成复合函数 $y = f(g(x))$, 定义域为 X ;

若 $R_g \cap D_f \neq \emptyset, R_g \not\subset D_f$, 则可构成复合函数 $y = f(g(x))$, 定义域包含在 X 中, 但 $\neq X$.

【例 1.2】 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & , |x| < 1, \\ 0 & , |x| = 1, \\ -1 & , |x| > 1, \end{cases} g(x) = e^x$, 求 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$.

【解】 基本思路是弄清两个函数定义域与值域的关系.

$$g(f(x)) = e^{f(x)} = \begin{cases} e & , |x| < 1, \\ 1 & , |x| = 1, \\ e^{-1} & , |x| > 1. \end{cases}$$

求 $f(g(x))$ 时, 首先要考察: x 在什么范围内 $|g(x)| = e^x < 1, > 1$ 或 $= 0$.

$$|g(x)| = e^x \begin{cases} < 1 & , x < 0, \\ = 1 & , x = 0, \\ > 1 & , x > 0, \end{cases} \text{ 因此 } f(g(x)) = \begin{cases} 1 & , x < 0, \\ 0 & , x = 0, \\ -1 & , x > 0. \end{cases}$$

【例 1.3】 设 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x < 0, \\ x^2 & , x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$.

【解】 $f(g(x)) = \frac{1}{2}[g(x) + |g(x)|] = g(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x < 0, \\ x^2 & , x \geq 0. \end{cases}$ (因为 $g(x) \geq 0$)

注意: $\forall x$, 恒有 $f(x) \geq 0$, $f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0, \\ 0 & , x < 0, \end{cases}$ 则

$$g(f(x)) = f^2(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

4. 反函数

设有 $y = f(x)$, $D_f = X$, $R_f = Y$, 若 $\forall y \in Y$, 有唯一确定的 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$, 由此对应关系在 Y 上确定一个函数, 称为 $y = f(x)$ 的反函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$. 习惯上, 记 $y = f(x)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$.

函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 有如下关系:

1° 若 $D_f = X$, $R_f = Y$, 则 $D_{f^{-1}} = Y$, $R_{f^{-1}} = X$;

2° $f(f^{-1}(y)) = y$ ($\forall y \in Y$), $f^{-1}(f(x)) = x$ ($\forall x \in D_f$);

3° $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于 $y = x$ 对称, 而 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图形重合.

$y = f(x)$, $x \in X$ 且存在反函数 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 特别地, 若 $y = f(x)$ 在 X 上单调, 则 $y = f(x)$ 在 X 上 $\exists$ 反函数.

【例 1.4】求 $y = f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x < -1 \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2 \\ 12x - 16, & x > 2 \end{cases}$ 的反函数.

【解】当 $x < -1$ 时, $y = 1 - 2x^2 < -1$, 则 $x = -\sqrt{\frac{1-y}{2}}$ (另一舍去);

当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, $y = x^3 \in [-1, 8]$. $\forall y \in [-1, 8]$, 由 $y = x^3$, 知 $x = \sqrt[3]{y}$;

当 $x > 2$ 时, $y = 12x - 16 > 8$. $\forall y > 8$, $y = 12x - 16$, 知 $x = \frac{y+16}{12}$.

因此, 反函数 $y = f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1 \leq x \leq 8, \\ \frac{x+16}{12}, & x > 8. \end{cases}$

5. 初等函数

由六类基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算而得到的一切函数称为初等函数.

六类基本初等函数即指:

$y = c$ (常数); $y = x^a$; $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$); $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$);

$y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x$; $y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$.

6. 常见的函数形式

初等函数, 隐函数 ($x - y + e^{xy} = 0$), 由参数方程确定的函数 ($x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$), 由变限积分确定的函数 ($y = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt$), 由函数项级数确定的函数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 以及由极限确定的函数等等.

(二) 极限的概念与性质

1. 定义

【定义 1.1】 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A : \forall \epsilon > 0, \exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - A| < \epsilon$.

若 a_n 存在极限 (有限数), 又称 $\{a_n\}$ 收敛, 否则称 $\{a_n\}$ 发散.

【定义 1.2】 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A : \forall \epsilon > 0, \exists$ 正数 X , 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

类似可定义: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

【定义 1.3】 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A : \forall \epsilon > 0, \exists$ 正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

类似可定义: $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$, $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$.

【定义 1.4】 设函数 $f(x, y)$ 在开区域或闭区域 D 有定义, $M_0(x_0, y_0)$ 是 D 的内点或边界点.

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$ 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 正数 δ , 当 $(x, y) \in D, 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ 时, 有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

注意: 这里的极限过程是点 (x, y) 在 D 内趋于点 (x_0, y_0) , 它可以按任何方式沿任意曲线趋于 (x_0, y_0) .

2. 基本性质与两个重要极限

(1) 数列极限的基本性质

【定理 1.1】(极限的不等式性质) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b$.

若 $a > b$, 则 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $x_n > y_n$; 若 $n > N$ 时, $x_n \geq y_n$, 则 $a \geq b$.

【定理 1.2】(极限的唯一性) 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$, 则 $a = b$.

【定理 1.3】(收敛数列的有界性)

设 x_n 收敛, 则 x_n 有界 (即 $\exists$ 常数 $M > 0, |x_n| \leq M, n = 1, 2, \dots$).

(2) 函数极限的基本性质

【定理 1.4】(极限的不等式性质) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$.

若 $A > B$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > g(x)$;

若 $f(x) \geq g(x) (0 < |x - x_0| < \delta)$, 则 $A \geq B$.

【推论】(极限的保号性) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. 若 $A > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > 0$. 若 $f(x) \geq 0 (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow A \geq 0$.

【定理 1.5】(极限的唯一性) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$, 则 $A = B$.

【定理 1.6】(存在极限的函数局部有界性)

设存在极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $U_0(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界, 即 $\exists \delta > 0, M > 0$ 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x)| \leq M$.

【注】其它的极限过程如 $x \rightarrow x_0 + 0, x \rightarrow x_0 - 0, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ 等等也有类似的结论.

(3) 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

(1.1)

【例 1.5】 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 \sin \frac{1}{x} + 2 \sin x}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a}.$$

【解】 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \sin x}{x} = 3 + 0 = 3;$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} \stackrel{t = a^x - 1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1 + t)} = 1.$$

【评注】 要注意重要极限成立的条件, 不要混淆, 应熟悉等价表达式.

(三) 极限的存在与不存在问题

1. 数列敛散性的判别

【定理 1.7】(夹逼定理) 若 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a$,

则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$.

【定理 1.8】(单调有界数列必收敛定理) 若数列 x_n 单调上升有上界, 即 $x_{n+1} \geq x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) 并存在一个数 M 使得对一切的 n 有 $x_n \leq M$, 则 x_n 收敛. 即存在一个数 a , 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \text{ 且有 } x_n \leq a \quad (n = 1, 2, \dots).$$

若数列 x_n 单调下降有下界, 即 $x_{n+1} \leq x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) 并存在一个数 m 使得对一切的 n 有 $x_n \geq m$, 则 x_n 收敛. 即存在一个数 a 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, 且有 $x_n \geq a$ ($n = 1, 2, \dots$).

此外, 还可通过数列与级数的关系讨论敛散性: x_n 的敛散性与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 的敛散性相同. 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n) \text{ 的部分和数列是 } \{x_{n+1} - x_1\}.$$

【例 1.6】 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$, 试证 $\{a_n\}$ 收敛.

【证明】 易见 $a_n \leq a_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$), 只须再证 a_n 有上界:

$$\begin{aligned} a_n &\leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

因此利用单调有界数列必收敛定理即得结论.

2. 函数 $y = f(x)$ 的极限的存在与不存在问题

【定理 1.9】(夹逼定理) 设 $\exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 又 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

【注】 其它的极限过程也有类似的结论.

【定理 1.10】(单侧极限与双侧极限的关系)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A.$$

对于分段函数 $f(x) = \begin{cases} g(x), & x_0 - \delta < x < x_0, \\ h(x), & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases}$ 考察 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否存在就要分别求

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) \text{ 与 } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x).$$

【例 1.7】 设 $f(x) = \begin{cases} a \frac{\sin x - x}{x^3}, & x > 0, \\ \frac{1}{x} \left(2\sin x - \int_0^x \sin t^2 dt \right), & x < 0, \end{cases}$

问 a 为何值时 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

【分析】 分别求左、右极限 $f(0+0)$ 与 $f(0-0)$, 由 $f(0+0) = f(0-0)$ 定出 a 值.

$$\text{【解】 } f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(a \frac{\sin x - x}{x^3} \right) \stackrel{\frac{0}{0} \text{ 型}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} a \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{a}{6},$$

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\left(\int_0^x \sin t^2 dt \right)'}{(x)'} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x^2 = 2.$$

由 $f(0+0) = f(0-0)$, 得 $-\frac{a}{6} = 2$, 即 $a = -12$. 因此, 仅当 $a = -12$ 时, 存在 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

【例 1.8】 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}}$ 是 ().

(A) 0 (B) $-\infty$ (C) $+\infty$ (D) 不存在但不是 ∞

【分析】 因 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$. 故要分别考察左、右极限.

$$\text{【解】 } \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}} \stackrel{t = \frac{1}{x-1}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (x-1)^2 e^{\frac{1}{x-1}} \stackrel{t = \frac{1}{x-1}}{=} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{t^2} = 0.$$

因此选(D).

【评注】 证明一元函数 $f(x)$ 的极限不存在常用的两种方法是:

1° 若 $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在. 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限式中含有 $a^x (a > 0, a \neq 1)$, 或 $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$, 一定要分别求出 $x \rightarrow +\infty$ 与 $x \rightarrow -\infty$ 的极限值, 若两者相等, 则 $x \rightarrow \infty$ 时的极限存在, 否则不存在.

2° 若 $\exists x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ 不存在或 $\exists x_n \rightarrow x_0 (x_n \neq x_0), y_n \rightarrow x_0 (y_n \neq x_0)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.

【例 1.9】 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在.

【证明】 取 $x_n = \frac{1}{2n\pi}, y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 则均有 $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$, 但

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{y_n} = 0. \quad \text{因此} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \text{ 不存在.}$$

3. 多元函数 $z = f(x, y)$ 极限的不存在问题

证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 不存在的方法: 当 (x, y) 沿不同的路径趋于 (x_0, y_0) 时 $f(x, y)$ 趋于不同的值或 (x, y) 沿某路径趋于 (x_0, y_0) 时 $f(x, y)$ 趋于 ∞ , 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 不存在.

【例 1.10】 证明极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + (x-y)^2}$ 不存在.

【分析】 先考察 (x, y) 沿不同的直线趋于 $(0, 0)$ 时 $f(x, y)$ 的极限. 若不同, 则得证; 若相同, 再考察 (x, y) 沿其它特殊的路径——曲线趋于 $(0, 0)$ 时 $f(x, y)$ 的极限.

【证明】 令 $y = kx$ ((x, y) 沿不同的直线趋于 $(0, 0)$), 则

$$\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+k^2)x^2}{(1+k^2+(1-k)^2)x^2} = \frac{1+k^2}{1+k^2+(1-k)^2}.$$

它随 k 而变, 如 $k = 0$ 时为 $\frac{1}{2}$, $k = 1$ 时为 1. 因此该极限不存在.

(四) 无穷小及其阶

1. 无穷小与无穷大的定义

【定义 1.5】 在某一极限过程中以零为极限的变量称为无穷小(量).

称 x_n 为无穷小, 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ (记为 $x_n = o(1) (n \rightarrow +\infty)$);

称 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷小, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (记为 $f(x) = o(1), x \rightarrow x_0$).

【定义 1.6】 称 x_n 为无穷大(量) ($\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty$), 若 $\forall M > 0, \exists$ 自然数 N , 当 $n > N$ 时, $|x_n| > M$.

称 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 为无穷大(量) ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$), 若 $\forall M > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, $|f(x)| > M$.

称 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷大(量) ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$), 若 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$|f(x)| > M$.

类似可定义正无穷大(量)和负无穷大(量).

2. 无穷小与无穷大、无穷小与极限的关系

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$