考研数学大纲配套系列辅导用书推荐

高教版 2014

考研数学
基础过关500题

主编 王 莉

送精讲导学课程

登录官方微博 http://weibo.com/wl1966

或中国教育考试在线 http://www.eduexam.com.cn 分享资源、课程和冲刺密卷

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

考研数学大纲配套系列辅导用书推荐

2014

考研数学
基础过关500题

主编　王　莉

2014 KAOYAN SHUXUE JICHU GUOGUAN 500TI

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

《考研数学基础过关 500 题》分高等数学、线性代数、概率论与数理统计三部分，每部分基本上与考研数学大纲同步划分章节，设置有选择题和填空题两种题型，选择题侧重考查对基本概念和基本理论的理解程度，填空题侧重考查对基本公式和运算法则的掌握程度。书中有的题目数学一、数学二、数学三等不同的卷种不作要求，请读者阅读时注意。

图书在版编目(CIP)数据

2014 考研数学基础过关 500 题/王莉主编. —北京：高等教育出版社，2013.5

ISBN 978-7-04-037299-1

Ⅰ.①2… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 084026 号

策划编辑 刘 佳 责任编辑 张耀明 封面设计 于 涛 版式设计 余 杨
责任校对 孟 玲 责任印制 张福涛

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京市鑫霸印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm × 1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	20.25	版 次	2013 年 5 月第 1 版
字 数	490 千字	印 次	2013 年 5 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	38.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 37299-00

前 言

为了帮助有志于报考硕士学位研究生的广大同学全面、系统、深入、高效地复习数学课程，提高考研应试能力，并为今后研究生学业奠定坚实的数学基础，作者根据教育部考试中心最新颁布的《数学考试大纲》，结合作者多年在全国各地辅导班的授课经验，以作者的考研辅导讲义为蓝本，切实考虑到考研学子的不同需求，编写了《考研数学复习教程》、《考研数学基础过关500题》、《考研数学大纲配套1000题》、《考研数学10年真题解析》以及《考研数学全真模拟题》等系列丛书。其中《考研数学基础过关500题》适宜于复习前期配合教材使用——夯实基础；《考研数学复习教程》与《考研数学大纲配套1000题》适宜于复习中期攻坚阶段使用——强化解题定式训练，培养解题能力；《考研数学10年真题解析》与《考研数学全真模拟题》适宜于后期使用——模拟演练、巩固提高。考生可根据自己的具体情况选用。

本书《考研数学基础过关500题》的结构及特点如下：

本书分高等数学、线性代数、概率论与数理统计三部分，每部分基本上与考研数学大纲同步划分章节，设置有选择题和填空题两种题型，选择题侧重考查对基本概念和基本理论的理解程度，填空题侧重考查对基本公式和运算法则的掌握程度。本书只设置两种题型主要是针对于考研数学试卷的23道题中有8个选择题、6个填空题，题量占了整个试卷的60%，为了解决考生选择题和填空题得分偏低的问题。

本书每章选编的题目力争覆盖本章的所有知识点，围绕定义、定理、性质以及基本公式和运算法则，由易到难，由简到繁，注意梯次，既注重基础知识的解读，也注重了典型问题的方法总结，能够有效地帮助读者搞懂概念、搞透原理、搞熟方法，夯实基础。书中的每道题都有详细的分析求解过程和必要的总结说明，建议读者先动脑思考、动笔去做，然后再看解答过程，认真体会题后的总结。

书中有的题目数学一、数学二、数学三等不同的卷种不作要求，请读者阅读时注意。

本书可供大学本、专科院校的学生在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计时参考。

在编写本书过程中，作者参考了许多教材和有关著作，引用了其中的一些例子，恕不一一列出，在此谨向有关作者致谢。

鉴于作者水平有限，书中疏漏之处在所难免，恳请同行专家和读者批评指正。

编　者

2013年3月

目 录

第一篇 高等数学

第二篇 线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限与连续

一、选择题

1. 设函数$f(x)=x\sin x\ln(1+|\cos x|)$，则$f(x)$是

(A) 偶函数.　　(B) 有界函数.　　(C) 周期函数.　　(D) 单调函数.

【答案】 (A).

【分析】 本题考查函数的基本性质，对于奇偶性和周期性，一般用定义及相关的结论进行判定. 对于单调性，可利用$f'(x)$的符号判定，对于有界性，简单的情形可将函数取绝对值，进行放缩；一般情况下可利用闭区间上连续函数的性质或有极限的函数必局部有界来判定. 当然，若能求出$f(x)$在区间I上的最大(小)值，也可知$f(x)$在区间I上有上(下)界.

对于本题，由函数奇偶性定义容易看出选项(A)正确.

解 因$f(-x)=(-x)\sin(-x)\ln(1+|\cos(-x)|)=x\sin x\ln(1+|\cos x|)=f(x)$，故$f(x)$为偶函数，应选(A).

> **注** 对于考查函数的基本性质问题，要能够根据所给函数的特征，迅速将其限定在某范围内，其一般结论如下：
>
> (1) 表达式中含有绝对值符号的函数在其定义区间内一般不具有单调性，如本题. 但也有例外，如$f(x)=x|x|$在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.
>
> (2) 含有幂函数x^n因子的函数不是周期函数.

2. 设$f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$，$g(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 则

(A) $f[g(x)]=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(B) $f[g(x)]=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $f[g(x)]=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(D) $f[g(x)]=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

【答案】 (C).

【分析】 本题考查分段函数的复合问题，只要按部就班，逐步替换即可.

解 将$f(x)$中的所有自变量x都用$g(x)$替换，得

$$f[g(x)]=\frac{1}{2}[g(x)+|g(x)|].$$

再将$g(x)$的表达式分段代入可得

$$f[g(x)]=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+|x|), & x<0,\\ \dfrac{1}{2}(x^2+|x^2|), & x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

因而(C)正确.

3. 下列命题中错误的是

(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|$存在.

(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|$存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$.

(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

【答案】 (B).

【分析】 本题考查数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|$之间的关系,可利用数列极限的"$\varepsilon-N$"定义进行分析.

解 对于选项(A),不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则由数列极限定义可知,对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,使得当$n>N$时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon$,进而有

$$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|<\varepsilon,$$

再由数列极限定义知,$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$,选项(A)正确.

对于选项(B),可用反例排除. 令$x_n=(-1)^n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=1$,而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在,故选项(B)不正确.

对于选项(C)和(D),请读者仿照(A)的方法证明,(C)和(D)都是正确的.

注 由本题可得一般结论如下:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$,其中$a$为任意实数.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$.

4. 下列数列收敛的是

(A) $f(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}+1, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{n}-1, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$　　(B) $f(n)=\begin{cases}\dfrac{1+3^n}{3^n}, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{1-3^n}{3^n}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

(C) $f(n)=(-1)^{n-1}\dfrac{3n^2}{n^2+1}$.　　(D) $f(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2n}, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{n-1}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

【答案】 (D).

【分析】 本题考查数列极限的性质:数列收敛的充分必要条件是其任一子列收敛于同一个极限值. 由此可知,若数列的某两个子列收敛于不同的极限值,则该数列必发散.

解 对于选项(A),因n为奇数且$n\to\infty$时,$f(n)\to1$;n为偶数且$n\to\infty$时,$f(n)\to-1$,故此数列不收敛. 类似地可知,选项(B)、(C)的数列也发散.

对于选项(D),可利用数列极限定义证得$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=0$,请读者仿上题自行证明.

> **注** 选项(D)的一般形式为:对于数列$\{x_n\}$,若$k\to\infty$时,$x_{2k-1}\to a$,$x_{2k}\to a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

5. 下列命题正确的是

(A) 若$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

(B) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

(C) 若$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$与$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$都存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$存在.

(D) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$都存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$存在.

【答案】 (C).

【分析】 本题考查极限的四则运算法则的应用条件.

解 对于选项(C),由极限的四则运算法则可知

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim_{x\to x_0}f(x),$$

因而(C)正确.

对于选项(A),(B),(D),可用反例排除.令$f(x)=x$,$g(x)=-x$,则$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)+g(x)]=0$,但$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$都不存在,选项(A)错误.令$f(x)=0$,$g(x)=x$,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)g(x)=0$,但$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$不存在,选项(B)错误.令$f(x)=x$,$g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$,则$\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$,但$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在,选项(D)也不正确.

> **注** 极限四则运算法则的条件绝不可忽视!只有当极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都存在时,才有
>
> $$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x),$$
>
> $$\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x).$$
>
> 而由$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$存在不能推得极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$是否存在.

6. 考虑下列式子

① $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$; ② $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=0$;

③ $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$; ④ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=0$.

其中正确的个数为

(A) 1个. (B) 2个. (C) 3个. (D) 4个.

【答案】 (B).

【分析】 本题主要考查重要极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,不能只看形式,必须抓住其本质.

解 由无穷小量的运算性质“无穷小与有界函数之积仍为无穷小”可知,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x=0,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=0,$$

可见①式错误，④式正确.

又由重要极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$及极限的四则运算法则知

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1,$$

可见②式错误，③式正确，故应选(B).

> **注** 重要极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$的一般形式为：若$\lim\alpha(x)=0$，则$\lim\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$，此处的自变量$x$趋向于什么是次要的.

7. 下列各式中正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x}}=\mathrm{e}^{-1}$.

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=-\mathrm{e}$.　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x}}=\mathrm{e}$.

【答案】 (D).

【分析】 本题主要考查重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$或$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$. 该重要极限属于$1^{\infty}$型未定式，而选项(A)，(B)均不属于$1^{\infty}$未定式，所以解题时不能只看形式，必须抓住其本质.

解 由重要极限结论$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$与$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，可立即排除(A)，(B)(请读者自行计算，选项(A)，(B)的结果均为1).

对于选项(C)，因

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{(-x)}\right]^{-x}\right\}^{-1}=\mathrm{e}^{-1},$$

可见选项(C)不正确，故应选(D)，请读者仿照上述求解过程自行验证(D)的正确性.

> **注** 重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$的一般形式为：若$\lim\alpha(x)=0$，则$\lim[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\mathrm{e}$，此处自变量$x$的变化方式也是次要的.

8. 当$x\to1$时，函数$\frac{x^2-1}{x-1}\arctan\frac{1}{x-1}$的极限

(A) 不存在.　　(B) 等于$-\pi$.　　(C) 等于π.　　(D) 等于0.

【答案】 (A).

【分析】 本题考查求具体函数的极限，其关键是求解极限因子$\lim\limits_{x\to1}\arctan\frac{1}{x-1}$，这需要从左、

右极限入手.

解 因

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}\arctan\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x+1)\arctan\frac{1}{x-1}=-\pi,$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}\arctan\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(x+1)\arctan\frac{1}{x-1}=\pi,$$

故 $x\to1$ 时,函数极限不存在,应选(A).

注 微积分中有几个类似本题的极限 $\lim\limits_{x\to1}\arctan\frac{1}{x-1}$,希望读者牢记,并能灵活应用.

(1) $e^x\to\begin{cases}+\infty, & \text{当 } x\to+\infty \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\to-\infty \text{ 时},\end{cases}$ $e^{\frac{1}{x}}\to\begin{cases}+\infty, & \text{当 } x\to0^+ \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\to0^- \text{ 时}\end{cases}$

$e^{-x}\to\begin{cases}0, & \text{当 } x\to+\infty \text{ 时},\\ +\infty, & \text{当 } x\to-\infty \text{ 时},\end{cases}$ $e^{-\frac{1}{x}}\to\begin{cases}0, & \text{当 } x\to0^+ \text{ 时},\\ +\infty, & \text{当 } x\to0^- \text{ 时}.\end{cases}$

(2) $\arctan x\to\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{当 } x\to+\infty \text{ 时},\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{当 } x\to-\infty \text{ 时},\end{cases}$ $\arctan\frac{1}{x}\to\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \text{当 } x\to0^+ \text{ 时},\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{当 } x\to0^- \text{ 时},\end{cases}$

$\operatorname{arccot} x\to\begin{cases}0, & \text{当 } x\to+\infty \text{ 时},\\ \pi, & \text{当 } x\to-\infty \text{ 时},\end{cases}$ $\operatorname{arccot}\frac{1}{x}\to\begin{cases}0, & \text{当 } x\to0^+ \text{ 时},\\ \pi, & \text{当 } x\to0^- \text{ 时}.\end{cases}$

上面列出的是这几个极限的基本型,只要抓住这几个基本型的本质,各种变化便能应对自如.本题中 $\arctan\frac{1}{x-1}(x\to1)$ 便是 $\arctan\frac{1}{x}(x\to0)$ 的一种变形.请读者思考,$x\to1$ 时,$e^{\frac{1}{x-1}}\to$?($x\to1^-$ 时,$e^{\frac{1}{x-1}}\to0$;$x\to1^+$ 时,$e^{\frac{1}{x-1}}\to+\infty$.)

9. 当 $x\to0$ 时,函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$ 是

(A) 无穷小. (B) 无穷大.

(C) 有界的,但不是无穷小. (D) 无界的,但不是无穷大.

【答案】 (D).

【分析】 本题考查无穷小与无穷大、有界变量与无界变量的概念.由于所给函数形式较为简单,可通过对自变量 x 赋特殊值,推得正确选项.

解 分别取 $x=\frac{1}{2n\pi}$ 及 $x=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$,则当 $n\to\infty$ 时,$x\to0$,

$$f\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=(2n\pi)^2\cos(2n\pi)=(2n\pi)^2\to\infty,$$

$$f\left(\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

可见 $f(x)$ 当 $x\to0$ 时是无界的,但不是无穷大,应选(D).

注　无穷大量与无界变量是两个比较容易混淆的概念，其关系为无穷大量必无界，而无界变量不一定是无穷大量.

10. 设$f(x)=a^x+b^{3x}-2$，其中a,b是大于1的常数，且$ab^3\neq e$，则当$x\to 0$时，

(A) $f(x)$与x是等价的无穷小.

(B) $f(x)$与x是同阶但非等价的无穷小.

(C) $f(x)$是比x高阶的无穷小.

(D) $f(x)$是比x低阶的无穷小.

【答案】　(B).

【分析】　本题考查无穷小的阶的比较问题，可根据无穷小阶的定义，直接求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，由极限值的情况得出结论.

解1　利用等价无穷小代换与极限四则运算法则求解. 因

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^{3x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^{3x}-1}{x}\right),$$

由当$x\to 0$时，$a^x-1\sim x\ln a$，$b^{3x}-1\sim 3x\ln b$，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x}=\ln a,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{b^{3x-1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\ln b}{x}=3\ln b.$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\ln a+3\ln b=\ln(ab^3).$$

由a,b是大于1的常数，且$ab^3\neq e$，可知$\ln(ab^3)\neq 0$，且$\ln(ab^3)\neq 1$，因而$x\to 0$时，$f(x)$与x是同阶但不是等价的无穷小. 应选(B).

解2　利用洛必达法则求解. 因

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^{3x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^{3x}\ln b\cdot 3}{1}=\ln(ab^3),$$

以下同解1.

注　1) 解1利用了等价无穷小代换，常用的等价无穷小如下，望读者牢记.

当$x\to 0$时，$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$a^x-1\sim x\ln a\,(a>0,a\neq 1)$，$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\dfrac{1}{n}x$.

2) 在进行无穷小的阶的比较或求$\dfrac{0}{0}$与$\infty\cdot 0$型未定式极限问题中，一个非常有用的工具是带佩亚诺(Peano)型余项的泰勒公式，现将常用的列举如下，望读者牢记(只要记住泰勒公式即可).

当$x\to 0$时，

① $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$.

② $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$.

③ $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$.

④ $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$.

⑤ $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+o(x^2)$.

⑥ $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$（注意，此公式后面的项无此规律！）.

⑦ $\arcsin x=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$（注意，此公式后面的项无此规律！）.

⑧ $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$.

具体应用时，如果阶数不够，只要再增加项数即可，如

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3).$$

其他的类似.

3）上述列出的等价无穷小与泰勒公式只是它们的基本型，希望读者能够灵活运用在此基础之上的等价变形. 如

$$x\to\infty \text{ 时}，\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}，\quad \sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{3!}\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

另请读者思考：等价无穷小与带佩亚诺型余项的泰勒公式之间有何关系？

11. 当 $x\to0$ 时，下列无穷小量中比其他三个都高阶的是

（A）$x\ln(1+x)$.　　（B）$1-\cos^2 x$.

（C）$\sqrt[3]{1+x^2}-1$.　　（D）$\tan x-\sin x$.

【答案】（D）.

【分析】 本题与上题类似，考查无穷小阶的比较问题，可利用等价无穷小代换快速确定出四个选项无穷小关于 x 的阶，以此可得.

解 因 $x\to0$ 时，

$x\ln(1+x)\sim x^2$，

$1-\cos^2x=(1+\cos x)(1-\cos x)\sim x^2$，（非零的极限因子 $(1+\cos x)$ 可计算出来）

$\sqrt[3]{1+x^2}-1\sim\frac{1}{3}x^2$，

$$\tan x-\sin x=\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)=\sin x\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x}\sim\frac{1}{2}x^3,$$

故应选（D）.

注 选项（D）也可用带佩亚诺型余项的泰勒公式定阶. 因 $x\to0$ 时，

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

故 $x\to0$ 时，$\tan x-\sin x=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\sim\frac{1}{2}x^3$.

12. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 a,b,c,d 为常数，且 $ac\neq0$，则必有

（A）$a=4c$.　　（B）$a=-4c$.　　（C）$b=4d$.　　（D）$b=-4d$.

【答案】（B）.

【分析】 本题从形式上看是确定极限式中未知参数间的关系，其本质仍是无穷小阶的比较问题. 由极限值为 2 可知，分子、分母当 $x\to0$ 时为同阶的无穷小，而由 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限值仅取决于分子和分母的最低阶无穷小项之比（类似于极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ 的值仅取决于分子、分母的最高幂次项之比），可立即得出正确选项.

解1　当 $x\to0$ 时，由带佩亚诺型余项的泰勒公式可知，$\tan x,\ln(1-2x)$ 均为 x 的 1 阶无穷小；而 $1-\cos x,1-e^{-x^2}$ 均为 x 的 2 阶无穷小，又 a,c 均不为 0，因此有

$$\lim_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{a\tan x}{c\ln(1-2x)}=\lim_{x\to0}\frac{ax}{c\cdot(-2x)}=-\frac{a}{2c},$$

故有 $-\frac{a}{2c}=2$，即 $a=-4c$，应选（B）.

解2　因分子、分母均为 x 的 1 阶无穷小，将分子、分母同除以 x，得

$$\lim_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{a\tan x}{x}+\dfrac{b(1-\cos x)}{x}}{\dfrac{c\ln(1-2x)}{x}+\dfrac{d(1-e^{-x^2})}{x}}.$$

而

$$\lim_{x\to0}\frac{a\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{ax}{x}=a,\quad \lim_{x\to0}\frac{b(1-\cos x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{b\cdot\frac{1}{2}x^2}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{c\ln(1-2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{c\cdot(-2x)}{x}=-2c,\quad \lim_{x\to0}\frac{d(1-e^{-x^2})}{x}=\lim_{x\to0}\frac{dx^2}{x}=0,$$

由极限四则运算法则，得

$$\lim_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=-\frac{a}{2c}=2,\ 即\ a=-4c.$$

解3　利用带佩亚诺型余项的泰勒公式先将所给极限式化为 x 的有理式，再同除以分子、分母的最低阶无穷小可得. 因

$$\tan x=x+o(x),\quad 1-\cos x=\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

$$\ln(1-2x)=-2x+o(x),\quad 1-e^{-x^2}=x^2+o(x^2),$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{ax+o(x)+\frac{b}{2}x^2+o(x^2)}{-2cx+o(x)+dx^2+o(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a+\frac{o(x)}{x}+\frac{b}{2}x+\frac{o(x^2)}{x}}{-2c+\frac{o(x)}{x}+dx+\frac{o(x^2)}{x}}=-\frac{a}{2c}=2,\text{即 } a=-4c.$$

注 1) 解 1 的方法只能用于求解填空题或选择题,其实质是利用了等价无穷小代换,即

当 $a\neq0,x\to0$ 时,$a\tan x+b(1-\cos x)\sim a\tan x$;

当 $c\neq0,x\to0$ 时,$c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})\sim c\ln(1-2x)$,

即有限个无穷小的代数和,其阶仅取决于其中的最低阶部分.

2) 此题若用洛必达法则求解,其繁琐可想而知.

13. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$,则

(A) $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$. (B) $a=0,b=-2$.

(C) $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$. (D) $a=1,b=-2$.

【答案】 (C).

【分析】 本题本质上仍是考查无穷小量阶的问题,利用带佩亚诺余项的泰勒公式求解将十分快捷,只需将 $\ln(1+x)$ 展开到 x^2 项即可(为什么?因为分母是 x^2 阶的无穷小).

解 因 $x\to0$ 时,$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$,故

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(ax+bx^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-a)x-\left(b+\frac{1}{2}\right)x^2+o(x^2)}{x^2}=2.$$

由于极限值为 2,说明分子与分母是同阶无穷小,即分子是与 x^2 同阶的无穷小,故应使分子中 x 的 1 阶无穷小项"消失",即使其系数为零,即 $1-a=0,a=1$(否则该极限不存在).而此时可得

$$-\left(b+\frac{1}{2}\right)=2,\quad b=-\frac{5}{2},$$

因而应选(C).

注 1) 本题也可用洛必达法则求解,但稍复杂些,请读者练习.

2) 若将题中条件的极限值改为 0 或 ∞,那么 a,b 取值如何?此时应分别将 $\ln(1+x)$ 展开到哪一项?(若极限值为 0,则可将 $\ln(1+x)$ 展开到 x^2 项,$a=1,b=-\dfrac{1}{2}$;若极限值为 ∞,则也应将 $\ln(1+x)$ 展开到 x^2 项,看得更清晰,此时 $a\neq1,b$ 任意取值).

14. 设$f(x)=\begin{cases}(x-1)\arctan\dfrac{1}{x^2-1}, & x\neq\pm1,\\ 0, & x=\pm1,\end{cases}$ 则函数$f(x)$

(A) 在$x=-1$处连续,在$x=1$处间断.

(B) 在$x=-1$处间断,在$x=1$处连续.

(C) 在$x=-1,x=1$处都连续.

(D) 在$x=-1,x=1$处都间断.

【答案】 (B).

【分析】 本题考查函数连续性概念,利用函数连续性定义进行分析即可.

解 显然$f(\pm1)=0$. 因

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}(x-1)\arctan\frac{1}{x^2-1}=-2\cdot\frac{\pi}{2}=-\pi,$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}(x-1)\arctan\frac{1}{x^2-1}=-2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi,$$

故$\lim\limits_{x\to-1}f(x)$不存在,因而$f(x)$在$x=-1$处不连续,$x=-1$是$f(x)$的跳跃间断点.

又$\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$,而$\arctan\dfrac{1}{x^2-1}$是有界函数,故由无穷小运算性质知

$$\lim_{x\to1}(x-1)\arctan\frac{1}{x^2-1}=0=f(1),$$

即$f(x)$在$x=1$处连续,应选(B).

注 考查函数$f(x)$在点x_0处的连续性问题即看$f(x)$在点x_0处是否同时满足以下三条:

(1) $f(x)$在点x_0的某邻域内有定义;

(2) 极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在(对于分段函数,一般从左、右极限入手讨论);

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$(比较(1),(2)即可).

若上述三条性质不能同时满足,则该点必为函数$f(x)$的间断点,间断点的类型由该点处的左、右极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$是否都存在来界定.

当$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在时,则为第一类间断点. 此时,若左、右极限相等,则为可去间断点;若左、右极限不相等,则为跳跃间断点. 第一类间断点只此两种情形.

当$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$中至少有一个不存在时,则为第二类间断点. 若左、右极限至少有一个为无穷大,则为无穷间断点;若左、右极限至少有一个在某范围内上、下振荡,则为振荡间断点. 由于极限不存在的方式较多,故第二类间断点不只此两种情形.

15. 设$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq0,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$ 其中$f(x)$在$x=0$处可导,$f'(0)\neq0$,$f(0)=0$. 则$x=0$是函数$F(x)$的