中考快速实效训练系列

（数学分册）

分册主编　王玉琨

uai Su Shi Xiao Xun Lian

今日中国出版社

中考快速实效训练系列

（数学分册）

丛书总主编　赵如云
丛书常务编委　谢宇鸿
分册主编　王玉琨
编写人员　王保善　刘玉芬
冷定秀　许建丽
王玉琨

今日中国出版社

(京)新登字132号

责任编辑:陆里
封面设计:广义

中考快速实效训练系列
(按照新大纲、新说明、新方案、新思路编写)
(数学分册)

丛书总主编　赵如云
丛书常务编委　谢宇鸿
分册主编　王玉琨
编写人员　王保善　刘玉芬　冷定秀
许建丽　王玉琨

*

今日中国出版社出版
新华书店北京发行所发行
中国人民解放军四二二九工厂印刷

*

787×1092毫米　1/32　印张:7　字数:135千字
1993年9月第一版　1994年9月北京第二次印刷
书号:ISBN7-5072-0674-2/G·145　印数:5000-15000
定价:5.00元　(全套定价:30.00元)

初中

序

按照新大纲、新说明、新方案、新思路编写的《中考快速实效训练系列》丛书再版了。

本丛书的对象主要是全国各地参加1995年普通高中、职业高中、中等师范、中专和中技考试的1000万左右的初中毕业生和应考的复读生以及主持中考复习的教师。本丛书有广泛的实用性，为广大的考生和教师提供及时的、快速的、实效的、优质的服务，努力做到三个“有利于”。即：有利于考生中考考出好成绩；有利于普通高中、职业高中、中师、中专、中技选拔人才；有利于初中各科的教学和教改。

本丛书按照国家教委颁布的新教学大纲和新的考试说明，结合各省、市、自治区实际情况来编写，既不扩大中考范围，也不缩小中考范围，努力把重点复习和全面复习统一起来；强调把握基础知识，力求领会得准确、灵活、深入，解决易错、易混的问题；注重快速实效地提高实际能力和应试能力，适应中考走向标准化，适应常见的多种题型。努力增强理论联系实际的能力，特别是增强判断是非能力和分析归纳能力。总之，从各地实际出发，突出特点，尽力把知识、能力、觉悟统一起来。

本丛书有四个特点：第一，注重形成系列。把单元能力练习和综合能力练习结合起来，长成一棵知识树，突出了整体性、系统性。第二，注重能力训练。努力帮助考生适应由知识性考试转化为能力型考试，由传统化考试转向标准化考试，克服死记硬背。第三，注重加快速度。本丛书不是以多取胜，而是注重复习和考试的质量，提高效率，快速反应，争取主动。第四，注重实际

效果。本丛书每册都分为两大部分：答题思路技巧与系列能力练习，系列能力练习不仅有试题和答案而且有简析，注意解决重点和难点问题，力图获得实效。

本丛书荟萃全国各地有水平、有经验、有名望的优秀教师编写，去粗取精，博采众长，尽管如此，书中难免有不足之处，恳请各位指正。

丛书总主编

1994年8月

目　录

I　答题思路技巧

(一) 代数答题思想与技巧

初中代数主要包括以下内容:(1) 实数的概念及其运算、(2) 解析式的恒等变形:整式、分式、根式(主要是二次根式)、(3) 方程和方程组、一元一次方程、一元二次方程、二元一次方程组、三元一次方程组、简单高次方程、分式方程、无理方程和二元二次方程组、(4) 不等式:一元一次不等式、一元二次不等式、一元一次不等式组、分式不等式、含绝对值的不等式、(5) 函数:函数的概念、正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数、(6) 解三角形:三角函数的概念、解直角三角形、解斜三角形等,这些内容构成了初中代数的基础知识。

常用到的数学思想有:“矛盾转化思想”、“分类讨论思想”、“数形结合思想”以及“方程思想”、所学过的数学方法有:“消元法”具体的消元法有“代入消元法”和“加减消元法”。“换元法”、“配方法”、“待定系数法”、“反证法”、重要的思维方法,有综合法、分析法,解答任何一个题目都需要通过思索来寻求解题的途径,这种思维的方法按理路的顺逆又有“综合法”、与“分析法”之别,综合法是从命题的条件出发,经过逐步的逻辑推理,最后达到待解的结论,其特点是从“已知”看“可知”,逐步推向“末知”,而分析法是从待解的结论出发,一步一步地探索回溯,最后达到命题的“已知”,其特点是从“末知”看“需知”,逐步靠拢“已知”。数学思想和数学方法属于数学基础知识的范筹,它在数学认知结构中起着固定的作用,同时又揭示了知识之间的内在联

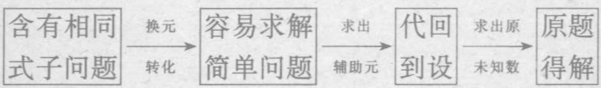
系，因此掌握好这些基本数学思想和方法能促进逻辑思维能力的发展，是逐步养成思维能力的重要途径。

整个阶段，有两次较大的知识飞跃，(1) 由算术过渡到代数，即由具体的数发展到用字母表示数，它具有概括性、抽象性，(2) 由常量数学过渡到变量数学，它是通过平面直角坐标系把平面上的点和一对有序实数建立一一对应之后，从数量关系和空间形式两个侧面反映客观事物的互相关系，尽管这些知识是初步的，但给我们学习增添了一定的困难。通过我们系统的复习，一定要做到：对基础知识的理解要更准确、更深刻、对基本技能的掌握要更熟练、更灵活，学会交替使用分析法和综合法的解题思路，合理地使用数学思想和方法这个重要工具解答综合题，逐步养成运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力，逐步学会分析、综合、归纳、演绎、概括、抽象、类比等重要的思想方法。下面就如何运用数学思想和方法搞好复习说一点看法。

一、转化思想

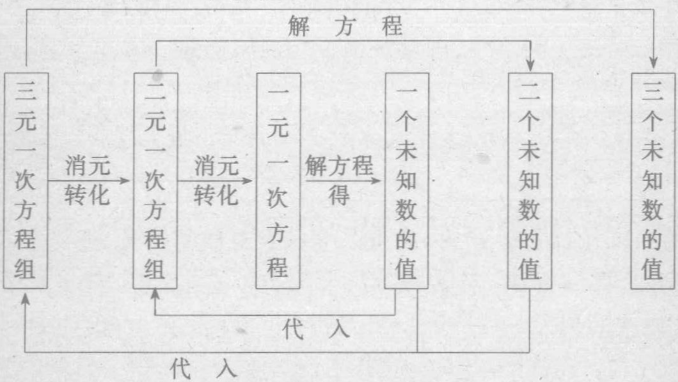
运用转化思想可以把生疏的问题转化为熟悉的问题，把复杂的问题转化为简单的问题，例 1 解方程 $x^4-2x^3-3x^2+4x-12=0$，配方：$(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12=0$，设 $x^2-x=y$，则原方程转化为：$y^2-4y-12=0$，高次方程，通过分解降次法和换元法转化为低次方程，例 2、解方程，$\frac{x^2-5}{x-1}-\frac{10(x-1)}{x^2-5}=7$，若直接去分母，会出现高次方程，给解方程带来困难，若认真审题，注意到方程中两个分式互为倒数，设 $\frac{x^2-5}{x-1}=y$，则：$\frac{10(x-1)}{x^2-5}=\frac{10}{y}$，原方程转化为 $y-\frac{10}{y}=7$，就比较容易了，解分式方程经常通过去分母法或换元法转化为整式方程；例 3：在实数范围内解方程：$3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$，

如果采用乘方法，去掉根式，化为有理方程，则变为高次方程，给解方程带来困难，如果将方程中不含根号的各项变形、整理为 $3(x^2+5x+1)+2\sqrt{x^2+5x+1}-5=0$，使根号外的多次项式与根号内的多项式相同，化成具有平方关系的无理方程，若设 $\sqrt{x^2+5x+1}=y$ 则原方程转化为 $3y^2+2y-5=0$，把无理方程转化为有理方程，通过以上各例，我们不难看出，转化的思想在解方程中应用是很普遍的，换元法，担负着重要的纽带和桥梁的作用，它能化难为易，化繁为简，使解方程顺利完成。利用换元法解决问题的思维结构框图为：



由于解分式方程和无理方程不是同解变形，因此必须检验。

解方程组要紧紧抓着“消元”和“降次”两个方向，无论是消元还是降次都体现了转化的思想。解三元一次方程组思维结构



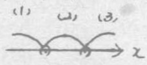
框图为：其它章节的转化思想就不一一分析了。

二、分类讨论的思想

分类就是根据事物的共同性和差异性，把具有相同属性的

事物归入一类，把具有不同属性的事物，归入不同的类。再对于各个较小类进行研究，使问题在各种不同情况下，分别得到各种相应的结论，就是分类讨论。这种分类讨论的思想的应用从初一就开始了，并且贯穿于初中数学的始终，那么为什么要进行分类讨论？对于每一个题目又怎样分类呢？

(1) 有些数学概念是分类定义的，因些在解决这些问题时，就要进行分类讨论。例如：绝对值的定义：一个正数的绝对值是它本身，一个负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零；表示为 $|a|=\begin{cases}a(a>0)\\0(a=0)\\-a(a<0)\end{cases}$。

例 1：化简 $\sqrt{(x-1)^2}+|x+1|$，$\because \sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$，$\therefore$ 本题是计算两个绝对值的和，$\because$ 绝对值的定义是分三类给出的，$\therefore$ 只有知道了 $(x-1)$，$(x+1)$ 是正、负、零时绝对值的符号才能去掉，而 $(x-1)$ 的值是正、是负、是零，要由 $x>1$、$x<1$，$x=1$ 来决定，因些化简这种问题要分以下三步：(a) 确定零点：令 $x-1=0$：$x=1$；$x+1=0$：$x=-1$，$\therefore x=1$，$x=-1$ 是两个零点；(b) 分段：$x=1$，$x=-1$ 两个零点把实数分为三段 ，(c) 讨论：在每一段上 $(x-1)$，$(x+1)$ 的值的符号都是确定的，故可以去掉绝对值的符号，近而合并、化简。这样的方法，叫做“零点、分段、讨论法”。解：当 $x<-1$ 时，原式 $=|X-1|+|x+1|=-(x-1)-(x+1)=-2x$；当 $-1\leqslant x<1$ 时，原式 $=|x-1|+|x+1|=(x-1)-(x+1)=-2$；
当 $x\geqslant 1$ 时，原式 $=|x-1|+|x+1|=(x-1)+(x+1)=2x$

通过分类、讨论，把抽象问题具体化了。

关于二次根式，主要掌握好 $\sqrt{a^2}=|a|$ 这一性质就转化为绝对值问题了。

(2) 有些数学定理、公式、法则、性质是分类给出的，因些在运用它们解决某些问题时，就要进行分类讨论，分类的依据就是公式的条件。例1函数 $y=(m-1)x^{15-m^2}$ 是反比例函数，当 x 的值增大时，y 的值怎样变化？反比例函数的性质，是分类给出的：$y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$，当 $k>0$ 时，双曲线两支分别在第一、三象限内，在每一个象限中，y 随 x 的增大而减小；当 $k<0$ 时，双曲线两支分别在第二、四象限内，在每一个象限中，y 随 x 的增大而增大。因此，在解答这类问题时，首先根据反比例函数的定义，得到函数的解析式为 $y=\dfrac{3}{x}$ 或 $y=\dfrac{-5}{x}$，再根据性质分两种情况讨论即可。这类问题在初中数学中是很多的。

(3) 在不同的情况下，所用的方法不同，因此，要分类讨论。例如：因式分解的步骤：(a) 提取公因式法；(b) 应用公式法；(c) 十字相乘法；(d) 分组分解法等，认真阅读课本，我们发现，因式分解有清晰的程序，有章可循，学习它时，首先按多项式的项数进行分类：二项式可以应用提取公因式法，和公式法，具体运用两项公式：平方差公式法、立方差公式法、立方和公式法等；三项式可以运用提取公因式法、完全平方公式法及十字相乘法。四项式可以运用提取公因式法，分组分解法等。多项式的项数不同，分解因式的方法也不同，这样按项数分类不仅有利于掌握因式分解的方法，也有利于逐步培养"分类"方法的能力。

(4) 由于运算的需要必须进行分类讨论

例1. 解关于 x 的方程 $ax=b$，解这种含有字母系数的方程、首先要分清方程有解还是无解，其次要弄清有解时，有多少个解？

具体的说：因为方程两边都除以 a，所以必须以 a 是否为零做标准进行讨论：当 $a \neq 0$ 时，$x = \frac{b}{a}$，方程有唯一解；当 $a = 0$ 时，若 $b \neq 0$，则方程无解，若 $b = 0$ 时，则 x 可为一切实数，此时有无穷多解，这个问题看起来似乎很难理解，其实就是除法运算的需要。例 2. m 取何值时，方程 $(m^2 - 2)x^2 - 2(m + 1)x + 1 = 0$ (a) 有两个不相等的实数根？(b) 有两个相等的实数根？(c) 没有实数根；当 $m^2 - 2 = 0$ 时，原方程不是二次方程，当 $m^2 - 2 \neq 0$ 时，方程才是二次方程，所以必须限定 $m^2 - 2 \neq 0$；当 $m^2 - 2 \neq 0$ 时，由求根公式

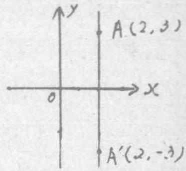
$$x = \frac{2(m + 1) \pm \sqrt{[-2(m + 1)]^2 - 4(m^2 - 2)}}{2(m^2 - 2)}$$

这里，又有开平方的运算：所以，当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根，当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根，当 $\Delta < 0$ 时，方程没有实根。转化为解不等式和方程，问题得到了解决。这个讨论实际上是开平方运算的需要。

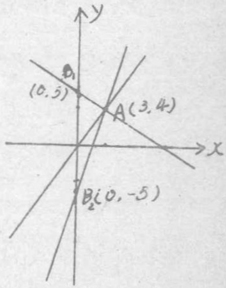
三、数形结合的思想

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的一门科学，数与形是数学中的两个最基本的概念，把数和形结合起来研究问题也贯穿于全部内容之中，数和形结合，相互为用是一种重要方法，在解决某些数学问题时，既要善于把形转化为数，也要善于把数转化为形、把数形结合起来，双向思维来研究问题，就能拓宽思路，提高解题的灵活性和准确性。初中阶段：数轴建立了实数和数轴上的点之间的一一对应关系，掌握数形结合的思想有利于加深对概念的理解，例如：相反数的意义：课本上这样叙述的“只有符号不同的两个数，我们就说其中一个是另一个的相反数，零的相反数是零”从数看，只有符号不同，因此求一个数的相反数只需在其前面加上“负号”，从形看，在数轴上表示一对

相反数的两点，分别在数轴原点的两侧，并离原点的距离相等。关于对称点的坐标问题，也是用数形结合的思想去理解更好些。例如 A 点坐标为 $A(2,3)$，A 点关于 x 轴对称点的坐标为 $A_1(2,-3)$，从横纵坐标数看，它们的横坐标相等，纵坐标互为相反数，从形看，以 x 轴为折痕，对折 A,A' 两点互相重合。平面直角坐标系建立了平面上的点和一对有序实数之间的一一对应关系，为数形结合创造了更加有利的条件，它也为常量数学过渡到变量数学架起了桥梁，从广义讲，点组成曲线，数组成方程，点与数既因坐标系的建立而结合起来了，那么曲线和方程当然也就结合起来了。下面，我们着重分析在确定函数的解析式，求函数的最值，以及四个“二次”之间的关系等问题，掌握数形结合的思想方法，理解数形互相转化的精神实质。(1) 确定函数的解析式：



例 1. 正比例函数 $y=k_1x$ 与一次函数 $y=k_2x+b$ 图象交于 $A(3,4)$ 点，一次函数的图象交 y 轴于 B 点，且 $OA=OB$，求正比例函数和一次函数的解析式。



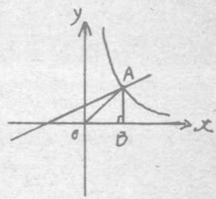
确定函数的解析式，一般采用待定系数法，因为正比例函数只有一个待定系数 k_1，因此只需给出关于 x 和 y 的一组对应值即可，已知图象经过 $A(3,4)$ 点，那么 A 点坐标满足正比例函数解析式，也就是 $x=3$，$y=4$ 是方程 $y=k_1x$ 的一组解，$\therefore k_1=\frac{4}{3}$，解析式为 $y=\frac{4}{3}x$；而一次函数 $y=k_2x+b(k_2\neq 0)$ 中，含有两个待定系数 k_2 和 b，因此需要给出 x 和 y 的两组对应值，才能求出待定系数 k_2 和 b，因为 O,A 两点间的距离为 $OA=\sqrt{3^2+4^2}=5$，如

果 $y=k_2x+b$ 在 y 轴上的截距是正值，图象经过 $B_1(0,5)$ 点，由

方程组 $\begin{cases}3k_2+b=4\\0\cdot k_2+b=5\end{cases}$：$\begin{cases}k_2=-\dfrac{1}{3}\\b^2=5\end{cases}$，此时解析式为 $y_1=-\dfrac{1}{3}x$

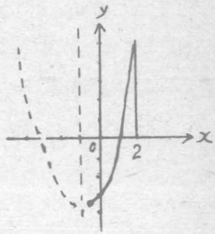
$+5$，如果 $y=k_2x+b$ 在 y 轴上的截距为负值，图象经过 $B_2(0,-5)$，此时解析式为 $y_2=3x-5$。从数看，图象经过 $A((3,4)$ 点，另一条件只能从"$OA=OB$"中挖掘，从形看有两条直线都满足条件，因此，"形"启示了我们本题定有两解，必须对截距进行分类讨论。

例 2 如图：$Rt\triangle ABO$ 的顶点 $A(a,b)$ 是直线 $y=x+k$ 和双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 在第一象限内的交点，且 $S_{\triangle AOB}=3$ 求一次函数和反比例函数的解析式



因为 $A(a,b)$ 点在双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 上，那么点 A 的坐标满足方程 $y=\dfrac{k}{x}$，即：$b=\dfrac{k}{a}$，这样就有，$k=ab$，可见，k 可以用 a,b 表示出来；通过对图象的观察、分析，$OB=a$，$BA=b$，$\therefore S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}ab=3$，$\therefore ab=6$，即 $\triangle AOB$ 的面积也可以用 A 点坐标 a,b 表示出来，这样就可以求出 K 的值，$\begin{cases}k=ab\\\dfrac{1}{2}ab=3\end{cases}\Rightarrow K=6$，反比例函数的解析式为 $y=\dfrac{6}{x}$，一次函数的解析式为 $y=x+6$，通过以上两例可以清楚地明白，确定函数的解析式，通常采用待定系数法，对已知条件的分析，待定系数关系式的确定，都离不开对函数的图象进行分析，即要经过由形到式或由式到形的多次反复，来建立图象待定系数关系式之间的联系，这一切都需要运用数形结合的思想和方法，找到

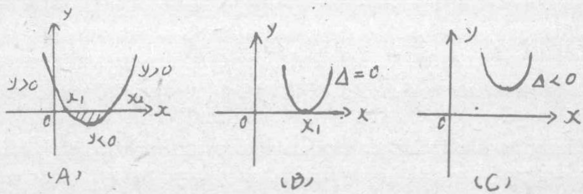
解题的突破口和途径。例3：已知二次函数的图象经过(2,5)，(−1，−4)，(−2，−3)三点，①求这个二次函数的解析式；②若当$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$时，求函数的最大值和最小值。设解析式为$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，因为二次函数的解析式中，含有三个待定系数$a,b,c$，因此需要三个独立条件，才能求出待定系数的值，因为图象经过(2,5)、(−1，−4)，(−2，−3)三点，所以可通过方程组$\begin{cases}4a+2b+c=5\\a-b+c=-4\\4a-2b+c=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\\c=-3\end{cases}$，故所求的解析式为$y=x^2+2x-3$。求函数的最大值和最小值$y=(x+1)^2-4$，对称轴方程为$x=-1$，顶点坐标为(−1，−4)，顶点不在$x$的取值范围内，∴当$x=-\frac{1}{2}$时，函数有最小值$-3\frac{1}{4}$，当$x=2$时，函数有最大值5，如果离开了数形结合的思想，不对图象进行全面的观察、分析，就有可能误认为函数在顶点处取得最小值−4。



二次函数、一元二次方程、一元二次不等式、二次三次式之间有着极其密切的联系，事实上，解一元二次方程的问题就是求当$y=0$时自变量x的值，求得方程的解，便可从容地将二次三次式分解因式，解一元二次不等式就是求$y>0$或$y<0$时自变量x的取值范围。这一切都离不开使用数形结合的思想。

确定二次函数的解析式需要三个独立条件，若已知图象经过三点，则选用一般式$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$；若已知图象的顶点、对称轴，则选用顶点式：$y=a(x+h)^2+k$；若已知函数图象与x轴的两个交点坐标，则选用交点式$y=a(x-x_1)(x-x_2)$为宜，确定函数的解析式，采用待定系数法，需要几个独立

条件，要看解析式中有几个待定系数而定。二次函数的极值和最值是统一的，当自变量的取值为全体实数时，函数 y 在顶点处取得最值，是最大值还是最小值要由 a 的符号确定；当自变量 x 的取值范围受到某种限制时，函数在顶点或在自变量 x 可取值的端点处取得。若顶点在取值范围内，函数在此处取得最值，若顶点不在此取值范围内，函数就在端点处取得最值，这一切，都需做出函数的图象，根据图象的直观性，给出定性的分析，再通过计算，做出定量的分析。可见：图象是起到了“直观的数学语言”的作用。解一元二次不等式时，我们可以利用二次项系数与判别式的值来确定不等式的解集。当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，$\Delta>0$，抛物线与 x 轴有两个交点 $(x_1,0)(x_2,0)$，$x_1<x_2$，$\therefore ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $x_1<x<x_2$　$ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $x<x_1$ 或 $x>x_2$；作出图象如 (A)



当 $a>0$，$\Delta=0$，抛物线与 x 轴相切，则 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $x\neq-\dfrac{b}{2a}$ 的一切实数；$ax^2+bx+c<0$ 的解集为空集；作图象如 (B)

当 $a>0$，$\Delta<0$ 时，$ax^2+bx+c>0$ 的解集为全体实数，$ax^2+bx+c<0$ 的解集为空集；如 (c)；对于 $a<0$ 时，请同学们相应地解决或将不等式两边都乘以 -1 即可。这里，也清楚地看到图象的直观作用。