电磁场原理与计算

纪英楠　许炳如　编

西北工业大学出版社

ISBN 7-5612-0500-7/TN·14
定 价：9.0元

电磁场原理与计算

纪英楠　许炳如　编

西北工业大学出版社

1993 年 1 月　西安

（陕）新登字 009 号

【内容简介】 本书内容为宏观电磁场理论及电磁场方程解析解的计算。既介绍了基本理论，又注重提高电磁场计算的实际能力。

全书共分六章，第一、二章为基本理论及与求解电磁场方程有关的基本原理、定理；第三至六章为典型计算方法，其中第三至五章为解标量场方程的分离变量法、汉克尔变换法和格林函数法；第六章为解矢量场方程的矢量本征函数展开法及并矢格林函数法。

本书可作为应用地球物理、电工等专业研究生或物理与电子学类专业本科高年级学生的教学参考书，也可供有关教师及科技人员参考。

电磁场原理与计算

纪英楠　许炳如　编

责任编辑　王俊轩

责任校对　许行芝

*

西北工业大学出版社出版发行

（西安市友谊西路 127 号　邮编：710072）

陕西省新华书店经销

西安石油学院学报编辑部电脑排版

西北工业大学印刷厂印装

ISBN 7-5612-0500-7/TN・14

*

开本 787×1092 毫米　1/16　14 印张　340 千字

1993 年 1 月第 1 版　　1993 年 12 月第 2 次印刷

印数 1001—1500 册　定价：9.90元

前　　言

电磁场理论是电磁场正、反演计算的基础，因此是地球物理、电工、通讯等专业的重要基础课程。勘探地球物理中的电法勘探、测井等方法与电磁场理论的关系尤为密切。

电磁场理论的内容很丰富，本书只限于介绍电磁场的宏观规律及基本计算方法，特别注重使读者能掌握实际解法，提高解决实际问题的能力。例如对于格林函数解法，不只限于导出表达式，而且具体介绍了求格林函数的几种方法，并举例说明。涉及电磁场与媒质相互作用微观机制的问题，如频散等，就不介绍了。

本书主要讨论交变电磁场，内容包括以下几部分：

一、电磁场基本规律（第一章）；

二、电磁场基本原理与定理（第二章）；

三、电磁场常用的解析解法（第三至六章）。

由于本书是供硕士研究生和本科高年级学生或具有相同程度的科技人员使用的，因此认为读者已具备关于电磁场的基本知识，以麦克斯韦方程为出发点，对于波动方程等的推导过程也都从略。为了读者阅读其他书刊的方便，集中介绍了目前常用的几种势函数及其方程。

解电磁场问题常要用一些特解法，也常用某种等效模型代替原始的问题。并且，对复杂的问题有时要做模型实验，以验证某些正、反演计算的正确性。无论是特解法、等效模型还是模型实验，都必须遵守一定的条件，才能保证结果的正确。这些条件并不会限制计算工作的进展，相反，是为探索解电磁场正、反演问题的新方法提供科学的依据。因此了解这些条件是非常重要的。在第二章内集中介绍了一些为了简化问题或运用特殊解法可以依据的原理和定理。首先介绍了关于交变电磁场的唯一性定理，明确了保证交变场解的唯一性的条件，连同一般电磁场原理书籍中介绍的关于稳恒场的唯一性定理，说明了各种电磁场问题具有唯一解的条件。关于二重性的概念、镜象原理、互易定理则为简化问题或运用特解法提供了依据和方法。等效原理和感应定理则提供把较难处理的源分布问题转化为较易处理的等效分布的方法。相似性定理说明模型实验必须遵循的准则。

第三至六章介绍电磁问题的基本解析解法，其中第四章专门介绍实际中最常用到的平面波场和偶极子场在半空间和层状媒质中的分布和传播性质。对于场源为平面波、电偶极子或磁偶极子在半空间或层状媒质中存在有限异常体的情况，可以用场的叠加性求解，而本章中关于平面波场和偶极子场的结果，可以作为问题的一次场（或入射场）。第三、五两章介绍标量波动方程的分离变量解法和格林函数解法。第六章则介绍解矢量波动方程的波函数展开法与格林函数（并矢格林函数）方法。解析解法中常用的有积分法、分离变量法、积分变换法和格林函数法。因为积分法除对有限的几种规则源分布可以直接应用外，对较复杂的源分布实质上与格林函数法是一回事，因此不再介绍积分法。积分变换对解决某些电路问题是有效的，对于两个以上变量的场问题而言，一种情况是起减少变量的作用，本书在格林函数法解

题中作了介绍；另一种情况是利用积分变换把解表为积分形式，再作进一步运算，在某些特殊情况下可以求得表为解析式的解，本书在第三和第五章中作了介绍和应用（汉克尔 换或傅立叶—贝塞尔变换，没有单列一章）。有些情况下，直接解矢量场的微分方程比先求标量势函数或分别解分量方程更方便，或更易于求解，尤其是对电场和磁场强度这两个物理量而言。因此在第六章较系统地介绍了矢量波动方程的两种解法，并在附录中列出几种坐标系的矢量波函数和并矢格林函数。

通常把电磁场问题的解法分为三类，即解析法（或严格解析法，如分离变量法、格林函数法、积分变换法等）、近似解析法（如微扰法、变分法、几何绕射理论等）和数值法。表面上看来，解析法由于不能解决复杂的情况，似乎意义不大。实际上解析法仍有其重要意义和优点。因为由严格解析解得到的积分或求和表达式物理意义比较清楚、便于分析问题，而且在此基础上用近似算法（如数值积分或取有限项的和）得到的数值解有时比纯数值解的计算简便，计算量少。这种在解析解基础上进行近似计算或把解析解与数值方法结合起来的方法，或者可以称为半解析法或混合法，如果结合运用得当往往是很有效的。例如，用等效源概念及并矢格林函数方法，可以得出一些比较复杂问题的解析解，再结合运用数值方法，可以求出以数值形式表示的场的分布。因此，本书着重介绍基本解析解法，并在第六章中初步介绍了等效源与并矢格林函数结合的方法，国内外已经用这类方法解决了不少问题。我们相信，如果牢固掌握了电磁场基本性质和基本解析解法，又掌握常用的数值解法（或近似解法），再根据问题的性质将这两方面结合起来，是能够解决一些比较复杂的问题的。

考虑到本书的目的并限于篇幅，有些涉及到的问题未作具体证明（如并矢格林函数的对称性质）或不能充分展开，对于这类内容，可阅读本书的参考文献有关部分来解决。

本书由西安石油学院许炳如和长春地质学院纪英楠合编，最后由许炳如统编全稿。

限于作者水平，书中错漏或不当之处在所难免，希望读者批评指正。

编者

1992 年 9 月

目　　录

第一章　电磁场基本方程

§1.1　麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程是电磁场基本实验规律的总结和推广，又是讨论各种具体的电磁场问题的出发点，是本课程的基础。通常应用其微分形式：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} (\text{麦克斯韦} - \text{安培定律}) \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} (\text{法拉第电磁感应定律}) \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 (\text{毕奥} - \text{萨伐尔定律}) \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho (\text{高斯定律}) \end{cases} \tag{1-1}$$

式中 $\vec{J}$、ρ 分别为传导电流密度和自由电荷密度；$\vec{B}$、$\vec{E}$、$\vec{H}$、$\vec{D}$ 分别为磁感应强度、电场强度、磁场强度和电感应强度，是描写电磁场的最基本的物理量，也称为场矢量。

通常，反映电荷守恒的连续性方程

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1-2}$$

也作为一个基本方程一并考虑。

但是（1—1）和（1—2）的五个方程（实质是九个标量方程）并非都是互相独立的（例如，由（1—1）中的第一式和（1—2）可以导出（1—1）中的第四式），即使九个方程都独立，也不足以解出四个场矢量的 12 个分量。实际上矢量 $\vec{B}$ 与 $\vec{H}$、$\vec{D}$ 与 $\vec{E}$ 等之间都有相互联系。把这些联系都考虑在内，就可以由（1—1）式确定场矢量了。确定场矢量间关系的公式称为本构关系。

§1.2　本构关系（物性方程）与媒质的极化

上述 $\vec{B}$ 与 $\vec{H}$、$\vec{D}$ 与 $\vec{E}$ 等场量间的关系，实际反映媒质极化对场的影响，称为本构关系或物性方程。物质受场的作用时极化电荷或电流产生的二次场，将与一次场叠加，形成总场，媒质的影响宏观上由本构关系描述。

一、各向同性媒质

1. 电极化与介电常数

极化过程由极化强度 $\vec{P}$ 描述：

$$\vec{P} = \lim_{\triangle v \to 0} \sum_{\triangle v} \vec{p} / \triangle v = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \tag{1-3}$$

式中 $\triangle v$ 是在媒质中任意点所取的小体积，$\sum_{\triangle v}\vec{p}$ 是 $\triangle v$ 内所有偶极距之和。因此极化强度是单位体积的偶极距。χ 称为（电）极化率。

体极化电荷 $\qquad \rho' = -\nabla\cdot\vec{P}$

而媒质 1 和 2 的界面上由于两媒质中极化强度不同而出现的面感应电荷

$$\sigma' = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\cdot\vec{n}$$

$\vec{n}$ 是界面上由媒质 1 指向媒质 2 的单位法线矢量。

代入高斯定理

$$\nabla\cdot\vec{E} = (\rho + \rho')/\varepsilon$$

得
$$\nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E}) = \rho + (-\nabla\cdot\vec{P}) = \rho - \nabla\cdot(\varepsilon_0\chi\vec{E})$$

$$\nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\chi\vec{E}) = \nabla\cdot[\varepsilon_0(1+\chi)\vec{E}) = \rho$$

令
$$\varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \vec{D}$$

令
$$1 + \chi = \varepsilon_r \tag{1-4}$$

$$\varepsilon_0(1+\chi) = \varepsilon_0\varepsilon_r = \varepsilon \tag{1-5}$$

即有
$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} \tag{1-6}$$

式中 ε 为媒质的介电常数，ε_r 为其相对介电常数。

2. 磁化与磁导率

磁化过程是由于媒质内分子电流极化的结果，因此可以作与电介质类似的处理，定义磁化强度 $\vec{M}$ 为：

$$\vec{M} = \lim_{\triangle v\to 0}(\sum_{\triangle v}\vec{m}/\triangle v) = \chi_m\vec{H} \tag{1-7}$$

式中 $\vec{m}$ 为分子电流磁矩，$\sum\vec{m}$ 为 $\triangle v$ 内分子电流磁矩之和，χ_m 为磁化率。

用类似于电场中讨论极化问题的步骤可得磁感应强度 B：

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} \tag{1-8}$$

式中 $\mu = \mu_0(1+\chi_m)$ 称为磁导率，μ_r 为相对磁导率。

3. 电导率

在导电媒质中，传导电流密度与场强的关系为：

$$\vec{J} = \gamma\vec{E} \tag{1-9}$$

式中 γ 为媒质电导率，这个本构关系是由欧姆定律导出的。

一般说来，ε，μ 和 γ 为位置的函数，但在均匀媒质中，它们可以用一常数表示。

二、各向异性媒质

物质由于晶体结构、层理、片理或其中晶粒的定性排列，在电磁性质上呈现出各向异性，这时的本构关系远较各向同性的情况复杂，我们引入相应的数学工具表示这种关系。

1. 各向异性媒质中的介电常数

各向异性媒质受到电场作用时，由于媒质在不同方向的响应不同，结果使 $\vec{P}$ 与电场 $\vec{E}$ 方向不同，为了表示出这种复杂的 $\vec{P}\sim\vec{E}$ 关系，先假设外场 $\vec{E}$ 是沿 x 轴方向的：$\vec{E} = E_1\vec{e_1}$，$\vec{e_1}$ 为 x 轴方向的单位矢量。一般情况下 $\vec{P}$ 不沿 x 轴方向，因此须用其正交分量表示：

$$\vec{P}_1 = \varepsilon_0 \chi_{11} E_1 \vec{e}_1$$
$$\vec{P}_2 = \varepsilon_0 x_{21} E_1 \vec{e}_2$$
$$\vec{P}_3 = \varepsilon_0 x_{31} E_1 \vec{e}_3$$

其中 $x_{i1}(i=1,2,3)$ 表示在沿 x 轴向的场强作用下媒质沿 x,y,z 方向的极化率。

同理，当 $\vec{E}$ 分别为 $E_2\vec{e}_2$、$E_3\vec{e}_3$ 时，也可写出类似关系。因此，对于任意方向的电场作用，即 $\vec{E}=E_1\vec{e}_1+E_2\vec{e}_2+E_3\vec{e}_3$，极化强度

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{P}_3 \\ &= \varepsilon_0(x_{11}E_1+x_{12}E_2+x_{13}E_3)\vec{e}_1+\varepsilon_0(x_{21}E_1+x_{22}E_2+x_{23}E_3)\vec{e}_2 \\ &\quad +\varepsilon_0(x_{31}E_1+x_{32}E_2+x_{33}E_3)\vec{e}_3 \\ &= \sum_i\sum_j \varepsilon_0 x_{ij}E_i\vec{e}_j\end{aligned} \tag{1-10}$$

由此可见，如果以上述关系中的九个 x_{ij} 组成一个 3×3 矩阵

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_{11} & \mathbf{x}_{12} & \mathbf{x}_{13}\\ \mathbf{x}_{21} & \mathbf{x}_{22} & \mathbf{x}_{23}\\ \mathbf{x}_{31} & \mathbf{x}_{32} & \mathbf{x}_{33}\end{pmatrix} \tag{1-11}$$

则 $\vec{\mathrm{P}}\sim\vec{\mathrm{E}}$ 的关系就可以用矩阵表示

$$(P_1,P_2,P_3)=\varepsilon_0\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}E_1\\E_2\\E_3\end{bmatrix}=\varepsilon_0[X][E] \tag{1-12}$$

若进一步令

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_0(1+x_{ij}) \tag{1-13}$$

则有

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{pmatrix} \tag{1-14}$$

因此各向异性媒质中电场的本构关系可以表为

$$(D_1,D_2,D_3)=[\boldsymbol{\varepsilon}][E] \tag{1-15}$$

磁各向异性媒质中 $\vec{B}$ 与 $\vec{H}$ 的关系同导电媒质中 $\vec{J}$ 与 $\vec{E}$ 的关系可作完全类似的讨论和表示。

2. 并矢及其基本运算

引入“并矢”这一数学工具可以更直接、简洁地表示各向异性媒质中的本构关系（包括大小和方向），并便于进行推导和运算。

(a) 定义：并矢是两个矢量不加运算的组合，只有当它和其他矢量或并矢进行某种运算时，才具有实际意义。

设 $\vec{A}=\sum_i A_i\vec{e}_i$，$\vec{B}=\sum_i B_i\vec{e}_i$ 为两矢量，则

$$\vec{\vec{C}}=\vec{A}\vec{B} \tag{1-16}$$

称为并矢，也可写作 $\overleftrightarrow{\mathrm{C}}$。

令 $C_{ij}=A_iB_j$，　　i，j=1，2，3；

可以规定并矢$\vec{\vec{C}}$的两种展开式如下。

前乘展开式：

$$\vec{\vec{C}}=\vec{e}_1(\vec{e}_1c_{11}+\vec{e}_2c_{12}+\vec{e}_3c_{13})+\vec{e}_2(\vec{e}_1c_{21}+\vec{e}_2c_{22}+\vec{e}_3c_{23})$$

$$+\vec{e}_3(\vec{e}_1c_{31}+\vec{e}_2c_{32}+\vec{e}_3c_{33})$$

$$=\sum_j \vec{e}_j(\vec{e}_1c_{j1}+\vec{e}_2c_{j2}+\vec{e}_3c_{j3})$$

$$=\sum_j \vec{e}_j(\sum_j)\ \vec{e}_ic_{ji}$$

$$=\vec{e}_i{}^{(1)}\vec{c}+\vec{e}_2{}^{(2)}\vec{c}+\vec{e}_3{}^{(3)}\vec{c}$$

$$=\sum_j \vec{e}_j{}^{(j)}\vec{c} \qquad (1-17a)$$

后乘展开式：

$$\vec{\vec{C}}=(\vec{e}_1c_{11}+\vec{e}_2c_{21}+\vec{e}_3c_{31})\,\vec{e}_1+(\vec{e}_1c_{12}+\vec{e}_2c_{22}+\vec{e}_3c_{32})\,\vec{e}_2$$

$$+(\vec{e}_1c_{13}+\vec{e}_2c_{23}+\vec{e}_3c_{33})\,\vec{e}_3$$

$$=\sum_j(\vec{e}_1c_{1j}+\vec{e}_2c_{2j}+\vec{e}_3c_{3j})\vec{e}_j$$

$$=\sum_j(\sum_i \vec{e}_ic\ ij)\ \vec{e}_j$$

$$=\vec{c}^{(1)}\,\vec{e}_1+\vec{c}^{(2)}\,\vec{e}_2+\vec{c}^{(3)}\,\vec{e}_3$$

$$=\sum_j\vec{c}^{(j)}\,\vec{e}_j \qquad (1-17b)$$

两种展开式分别在与前面或后面的量发生运算关系时应用。其中 ${}^{(j)}\vec{c}=\sum_i\vec{e}_ic_{ji}$ 和 $\vec{c}^{(j)}=\sum_i\vec{e}_ic_{ij}$ 分别称为前乘矢量和后乘矢量，它们的性质与普通的矢量相同，因此也遵守矢量运算规则。在有关并矢的运算中，常可根据具体情况把并矢展开为前乘或后乘矢量进行运算，因此 ${}^{(i)}\vec{c}$ 和 $\vec{c}^{(j)}$ 就是普通矢量，这样展开后使运算更容易进行。

因为并矢中的各系数 A_iB_j 实际就是普通的标量，因此并矢$\vec{\vec{C}}$的定义中，c_{ij} 和 c_{ji} 不限于两矢量的分量乘积，可以是任意标量。

还可以定义一特殊的并矢，称为“单位并矢”

$$\vec{\vec{I}}=\vec{e}_1\,\vec{e}_1+\vec{e}_2\,\vec{e}_2+\vec{e}_3\,\vec{e}_3 \qquad (1-18)$$

(b) 并矢与矢量的点积

$$\vec{\vec{C}}\cdot\vec{A}=[\vec{c}^{(1)}\,\vec{e}_1+\vec{c}^{(2)}\,\vec{e}_2+\vec{c}^{(3)}\,\vec{e}_3]\cdot(A_1\,\vec{e}_1+A_2\,\vec{e}_2+A_3\,\vec{e}_3)$$

$$=\vec{c}^{(1)}\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1A_1+\vec{c}^{(2)}\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2A_2+\vec{c}^{(3)}\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3A_3$$

$$=\sum_j(\sum_i\vec{e}_ic_{ij})A_j$$

$$=(c_{11}A_1+c_{12}A_2+c_{13}A_3)\,\vec{e}_1+(c_{21}A_1+c_{22}A_2+c_{23}A_3)\,\vec{e}_2$$

$$+(c_{31}A_1+c_{32}A_2+c_{33}A_3)\,\vec{e}_3 \qquad (1-19)$$

由此可见，并矢与矢量的点积为一矢量，它的各项系数和矩阵乘法的结果相同，但这个

点积有确定的方向，因此包含了更多的内容。

用前乘展开式可得出 $\vec{A}\cdot\vec{\vec{C}}$ 的表达式，一般情况下 $\vec{A}\cdot\vec{\vec{C}}\neq\vec{\vec{C}}\cdot\vec{A}$。

很容易证明 $\vec{\vec{I}}\cdot\vec{A}=\vec{A}$。

(c) 并矢与 ∇ 算子的点积

这种点积与（b）类似，只须注意 ∇ 兼有矢量和微分两重性质，在直角坐标系中

$$\nabla\cdot\vec{\vec{C}}=\nabla\cdot(\vec{e}_1{}^{(x)}\vec{c}+\vec{e}_2{}^{(y)}\vec{c}+\vec{e}_3{}^{(z)}\vec{c})=\frac{\partial}{\partial x}{}^{(x)}\vec{c}+\frac{\partial}{\partial y}{}^{(y)}\vec{c}+\frac{\partial}{\partial z}{}^{(z)}\vec{c}$$

$$=(\frac{\partial c_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial c_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial c_{zx}}{\partial z})\vec{e}_1+(\frac{\partial c_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial c_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial c_{zy}}{\partial z})\vec{e}_2$$

$$+(\frac{\partial c_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial c_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial c_{zz}}{\partial z})\vec{e}_3 \qquad (1-20)$$

对于正交曲线坐标系 u_1,u_2,u_3，有

$$\nabla\cdot\vec{\vec{C}}=\frac{1}{h_1h_2h_3}[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3\vec{e}_1\cdot\vec{\vec{C}})+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1\vec{e}_2\cdot\vec{\vec{C}})+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2\vec{e}_3\cdot\vec{\vec{C}})] \qquad (1-21)$$

式中 $h_i=[(\frac{\partial x}{\partial u_i})^2+(\frac{\partial y}{\partial u_i})^2+(\frac{\partial z}{\partial u_i})^2]^{1/2}$ $\qquad (1-22)$

是正交曲线坐标系 u_1,u_2,u_3 的度规系数。

(d) 并矢与 ∇ 算子的叉积

在直角坐标系中

$$\nabla\times\vec{\vec{C}}=\nabla\times[\vec{c}^{(x)}\vec{e}_1+\vec{c}^{(y)}\vec{e}_2+\vec{c}^{(z)}\vec{e}_3]$$

$$=(\nabla\times\vec{c}^{(x)})\vec{e}_1+(\nabla\times\vec{c}^{(y)})\vec{e}_2+(\nabla\times\vec{c}^{(z)})\vec{e}_3 \qquad (1-23)$$

对于正交曲线坐标系 u_1,u_2,u_3

$$\nabla\times\vec{\vec{C}}=\vec{e}_1\frac{1}{h_2h_3}[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3{}^{(z)}\vec{c})-\frac{\partial}{\partial u_3}(h_2{}^{(y)}\vec{c})]$$

$$+\vec{e}_2\frac{1}{h_3h_1}[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1{}^{(x)}\vec{c})-\frac{\partial}{\partial u_1}(h_3{}^{(z)}\vec{c})]$$

$$+\vec{e}_3\frac{1}{h_1h_2}[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2{}^{(y)}\vec{c}-\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1{}^{(x)}\vec{c})] \qquad (1-24)$$

3. 用并矢表示各向异性媒质中的电磁参量和本构关系

如果令

$$\vec{\vec{\chi}}=\chi_{11}\vec{e}_1\vec{e}_1+\chi_{21}\vec{e}_2\vec{e}_1+\chi_{31}\vec{e}_3\vec{e}_1+\chi_{12}\vec{e}_1\vec{e}_2$$

$$+\chi_{22}\vec{e}_2\vec{e}_2+\chi_{32}\vec{e}_3\vec{e}_2+\chi_{13}\vec{e}_1\vec{e}_3$$

$$+\chi_{23}\vec{e}_2\vec{e}_3+\chi_{33}\vec{e}_3\vec{e}_3 \qquad (1-25)$$

$$\vec{\vec{\varepsilon}}=\varepsilon_{11}\vec{e}_1\vec{e}_1+\varepsilon_{21}\vec{e}_2\vec{e}_1+\varepsilon_{31}\vec{e}_3\vec{e}_1+\varepsilon_{12}\vec{e}_1\vec{e}_2$$

$$+\varepsilon_{22}\vec{e}_2\vec{e}_2+\varepsilon_{32}\vec{e}_3\vec{e}_2+\varepsilon_{13}\vec{e}_1\vec{e}_3$$

$$+\varepsilon_{23}\vec{e}_2\vec{e}_3+\varepsilon_{33}\vec{e}_3\vec{e}_3 \qquad (1-26)$$

则前述的各向异性媒质中本构关系可以写作

$$\vec{D} = \vec{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{E} = \varepsilon_0(\vec{\vec{I}} + \vec{\vec{\chi}}) \cdot \vec{E} \tag{1-27}$$

类似有

$$\vec{B} = \vec{\vec{\mu}} \cdot \vec{H} \tag{1-28}$$

$$\vec{J} = \vec{\vec{\gamma}} \cdot \vec{E} \tag{1-29}$$

实际情况中各向异性往往可以作一些简化，例如常遇到的层状媒质可认为在互相垂直的两个方向（沿层面和垂直层面）有不同的等效介电常数（或电导率等），用直角坐标系时可写作

$$\vec{\vec{\varepsilon}} = \varepsilon_h \vec{e}_1 \vec{e}_1 + \varepsilon_h \vec{e}_2 \vec{e}_2 + \varepsilon_v \vec{e}_3 \vec{e}_3 \tag{1-30}$$

如用矩阵表示，则为

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_h & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_h & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_v \end{bmatrix} \tag{1-31}$$

两种表示方法是等效的。

三、频率对电磁参数的影响

物质的极化和磁化过程是物质内部的粒子在电场、磁场的作用下经过变形或转向（实际上两种作用往往同时存在）等变化而达到新的平衡的过程，这种过程要经历一定时间，通常称为驰豫（或松弛）时间。当电磁场为交变场时，这种弛豫过程导致极化或磁化相对于外场变化的“惯性”，因而极化或磁化过程及极化、磁化程度与外场的频率有关，这当然影响物质在电磁场中的性质和场在媒质中的传播，因此简要介绍物质电磁性质与频率的关系。

已知极化（磁化过程也类似，宏观的处理方法相同，故不另述）有感应极化和取向极化两种基本作用，极化强度 $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$。感应极化的松弛时间很短，在常用频率范围内可以看作与外场同步变化：

$$\vec{P}_1 = \varepsilon_0 \chi_1 \vec{E} \tag{1-32}$$

取向极化由于粒子间的相互作用等原因，松弛时间远较感应极化为长，因此有滞后效应，即 $\vec{P}_2$ 与外场有一定相位差。当外场为时谐场时，取向极化强度可写作 $P_2(t) = \vec{P}_2^0 e^{-i\omega t}$，相位差包含在 $\vec{P}_2^0$ 中。关于取向过程的机制的一种简单而合理的模型是：$\vec{P}_2(t)$ 的增长速度与 $[\varepsilon_0\chi_2\vec{E} - \vec{P}_2(t)]$ 成正比，其中 χ_2 是与取向过程有关的极化率，$\varepsilon_0\chi_2$ 是无滞后效应时的极化强度，即

$$\frac{d\vec{P}_2(t)}{dt} = \frac{1}{\tau}(\varepsilon_0\chi_2\vec{E} - \vec{P}_2) = -i\omega\vec{P}_2$$

故有

$$\vec{P}_2 = \frac{\varepsilon_0\chi_2}{1 - i\omega\tau}\vec{E} = \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2}(\varepsilon_0\chi_2 + i\omega\tau\varepsilon_0\chi_2)\vec{E} \tag{1-33}$$

总介电常数

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= \varepsilon_0\left(1 + \chi_1 + \frac{\chi_2}{1 + \omega^2\tau^2} + i\,\frac{\chi_2\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}\right) \\ &= \varepsilon' + i\,\frac{\sigma_e}{\omega} = \varepsilon' + i\varepsilon'' \end{aligned} \tag{1-34}$$

$$\varepsilon' = \varepsilon_0\left(1 + \chi_1 + \frac{\chi_2}{1 + \omega^2\tau^2}\right) \tag{1-35a}$$

$$\sigma_e = \omega\varepsilon' = \frac{\varepsilon_0\chi_2\omega^2\tau}{1+\omega^2\tau^2} \tag{1-35b}$$

σ_e 为有效电导率。上列诸式中的常数 τ 具有时间的量纲，$\tau = \dfrac{(\varepsilon_0\chi_2\vec{E} - \vec{P}_2)}{\dfrac{d\vec{P}_2}{dt}}$ 可以看作平均松驰时间。

$\omega \to 0$ 时，　　$\varepsilon' = \varepsilon_0(1 + x_1 + x_2) = \varepsilon^0$

$\omega \to \infty$ 时，　　$\varepsilon' = \varepsilon_0(1 + x_1) = \varepsilon^\infty$

介电常数也可写为

$$\varepsilon' = \varepsilon^\infty + \frac{\varepsilon^0 - \varepsilon^\infty}{1+\omega^2\tau^2} \tag{1-35c}$$

$$\sigma_e = \frac{(\varepsilon^0 - \varepsilon^\infty)\omega^2\tau}{1+\omega^2\tau^2} \tag{1-35d}$$

由于 ε 与频率有关，ε 会在不同的频段具有不同数值。但在物探工作常用的频率范围内，多数岩石的参数变化不大，远小于含水量、孔隙度等因素的影响，一般可以不考虑。较详细的讨论参看文献［2］。

§1.3　边界条件

边界条件对于求得微分方程的定解是不可少的。它实际是把电磁场方程用于不同媒质分界面的结果，因为在本科课程中已有详细叙述，这里只列出结果，详细说明可参看文献［1］的§1.13。

电磁场方程　　　　相应的边界条件

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t} \end{cases} \tag{1-36}$$

$$\begin{aligned} &\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s \\ &\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ &\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ &\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \\ &\vec{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \end{aligned} \tag{1-37}$$

式中 $\vec{J}_s$ 为面（传导）电流密度，ρ_s 为自由电荷面密度，$\vec{n}$ 为由媒质 1 指向媒质 2 的单位法向矢量。对无限空间问题，当场源只分布在有限空间时，应有 $r \to \infty$ 时场函数趋于零的性质。

对于幅射或散射等波场问题，还要考虑无穷远处的“幅射条件”，由于它涉及亥姆霍兹方程的解等问题，这里只叙述条件，以后再作进一步说明。

幅射条件：如果场源分布在有限区域内，ψ 在一闭曲面 S 外满足方程

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = -g \tag{1-38}$$

则 ψ 在下列条件下有唯一确定的解：

(1) ψ 在 S 上满足齐次边界条件　$\alpha\psi + \beta\dfrac{\partial\psi}{\partial n} = 0$，其中 n 为 S 的法线方向，α、β 为常数；