高等学校试用教材

高等代数

张禾瑞 郝钢新 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

高等代数

(第二版)

张禾瑞　郝鈵新　编

人民教育出版社

高等学校试用教材

高 等 代 数

张禾瑞　郝鈵新编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

开本 850×1168 1/32　印张 11.25　字数 256,000

1956 年第一版

1979 年 2 月上册第二版　1979 年 6 月下册第二版

1980 年 5 月合订本第一版　1980 年 5 月合订本第一次印刷

印数 00,001—44,500

书号 13012·462　定价 1.00 元

第二版说明

本书第一版是根据中华人民共和国教育部1954年颁布的师范学院数学系高等代数教学大纲编写的，内容主要是多项式和方程，对于线性代数涉及较少．由于线性代数是数学工作者不可缺少的基础知识，因此在第二版中加强了线性代数部分．

第一版中有些章节，如根的存在定理，三次及四次方程，尺规作图问题等，从基础知识或基本训练的角度来看，显得不太必要；其它一些章节，如代数基本定理的证明，群、环、域的介绍，多元多项式，实根的近似计算等，可以在复变函数，近世代数和计算方法里更好地讲述．为了篇幅不致过大，第二版删去了这些内容．

关于一元多项式，行列式，线性方程组，二次型的一些章节，我们全部或部分地改写过，以便初学者更易于接受．

在编写过程中，我们的许多同事提出了不少宝贵的意见，谨向他们表示感谢．

希望读者多加指正．

作　者

1979年2月

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章 基本概念

作为大学数学基础课程的代数，是中学代数的继续和提高.

在学习这门课程时将会发现，它与中学代数有很大的不同.这种不同不仅表现在内容的深度上，更重要的是表现在观点和方法上.

在这个课程里将体现由具体事物抽象出一般概念，再从一般概念回到具体事物去的这种辩证观点和严格的逻辑推理方法. 这一点在学习过程中将逐渐体会.

作为开始，我们先介绍一些最基本的概念和方法. 这些概念和方法对于今后的学习是必要的.

1.1 集合

我们先从一个最简单的概念开始.

在日常生活中，常常谈论一组事物. 例如，一班同学，一队解放军，一组自然数，一筐苹果，等等.这里，“一班”，“一队”，“一组”，“一筐”等都表示一定事物的集体. 我们称它们为*集合*或*集*. 组成集合的东西叫做这个集合的*元素*.

我们常用大写拉丁字母 $A, B, C, \cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a, b, c, \cdots$ 表示元素.

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a *属于* A，记作 $a\in A$；或者说 A 包含 a，记作 $A\ni a$.

如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a *不属于* A，记作 $a\notin A$；或者说 A 不包含 a，记作 $A\not\ni a$.

例如，设 A 是一切偶数所成的集合. 那么 $4\in A$，而 $3\notin A$.

一个集合可能只含有有限多个元素. 这样的集合叫做*有限集*

合．例如，前十个自然数的集合；一个学校里全体学生的集合；一本书里所有汉字的集合等等都是有限集合．如果一个集合是由无限多个元素组成的，就叫做无限集合．例如，全体自然数的集合；全体实数的集合；小于1的全体正有理数的集合等等都是无限集合．

我们把一个含有 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的有限集合记作 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$．

例如，前五个自然数的集合就记作 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$．

一个集合当然可以只含有一个元素．例如，一切偶素数的集合就只含有一个元素2．只含有一个元素 a 的集合，用上面的记法，就记作 $\{a\}$．

设 A, B 是两个集合．如果 A 的每一元素都是 B 的元素，那么就说 A 是 B 的子集，记作 $A \subseteq B$（读作 A 属于 B），或记作 $B \supseteq A$（读作 B 包含 A）．根据这个定义，A 是 B 的子集必要且只要对于每一元素 x，如果 $x \in A$，就有 $x \in B$．

例如，一切整数的集合是一切有理数的集合的子集，而后者又是一切实数集合的子集．

我们现在引入几个记号．

用 $(\cdots) \Longrightarrow (\cdots)$ 表示"如果 $(\cdots)$，则 $(\cdots)$"．例如，"如果 $x \in A$，则 $x \in B$"就记作 $x \in A \Longrightarrow x \in B$．

用符号 $(\cdots) \Longleftrightarrow (\cdots)$ 表示"$(\cdots)$ 必要且只要 $(\cdots)$"．

因此，"A 是 B 的子集"就可以表示为

$$(A \subseteq B) \Longleftrightarrow (\text{对一切 } x:\ x \in A \Longrightarrow x \in B).$$

如果 A 不是 B 的子集，就记作 $A \nsubseteq B$ 或 $B \nsupseteq A$．因此，A 不是 B 的子集必要且只要 A 中至少有一个元素不属于 B．即

$$(A \nsubseteq B) \Longleftrightarrow (\text{存在一个元素 } x, x \in A \text{ 但 } x \notin B).$$

例如，一切可以被3整除的整数所成的集，不是一切偶数所成

的集的子集，因为3属于前者但不属于后者．集合$\{1, 2, 3\}$不是$\{2, 3, 4, 5\}$的子集．

根据定义，一个集合A总是它自己的子集．即

$$A\subseteq A.$$

如果集合A与B是由完全相同的元素组成的，就说A与B相等，记作$A=B$．我们有

$$(A=B)\Longleftrightarrow(\text{对一切 } x:\ x\in A\Longleftrightarrow x\in B).$$

例如，设$A=\{1,2\}$，B是二次方程$x^2-3x+2=0$的根的集合，则$A=B$．

下列事实是明显的：

$$(A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq C)\Longrightarrow(A\subseteq C).$$

$$(A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq A)\Longleftrightarrow(A=B).$$

现在设A，B是两个集合．由A的一切元素和B的一切元素所成的集合叫做A与B的并，记作$A\cup B$．

例如，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4\}.$$

又例如，A是一切有理数的集合，B是一切无理数的集合，则$A\cup B$是一切实数的集合．显然$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$．

根据定义，我们有

$$(x\in A\cup B)\Longleftrightarrow(x\in A \text{ 或 } x\in B).$$

$$(x\notin A\cup B)\Longleftrightarrow(x\notin A \text{ 且 } x\notin B).$$

由集合A与B的公共元素所组成的集合叫做A与B的交，记作$A\cap B$．显然，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$．

例如$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则

$$A\cap B=\{2,3,4\}.$$

我们有

$$(x\in A\cap B)\Longleftrightarrow(x\in A \text{ 且 } x\in B).$$

$$(x \notin A \cap B) \Longleftrightarrow (x \notin A \text{ 或 } x \notin B).$$

A与B的并和交可以由下面的图来示意，图 1.1 的阴影部分表示 $A \cup B$,图 1.2 的阴影部分表示 $A \cap B$.

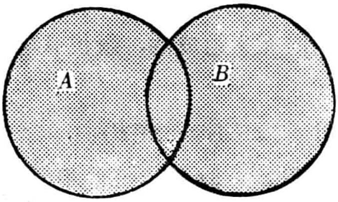

图 1.1

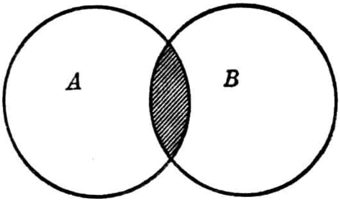

图 1.2

两个集合A与B自然不一定有公共元素. 为了说话方便，这时就说它们的交是空集. 不含任何元素的集合叫做空集.

例如,设A是一切有理数的集合,B是一切无理数的集合. 那么$A \cap B$是空集. 又如，方程 $x^2+1=0$ 的实根的集合是一个空集.

我们用符号$\varnothing$表示空集,并且约定空集是任意集合的子集.

例 1 我们证明

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

设 $x \in A \cap (B \cup C)$. 那么 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$，于是 $x \in A$ 且 x 至少属于B与C中之一. 若 $x \in B$,那么因为 $x \in A$，所以 $x \in A \cap B$;同样若 $x \in C$,则 $x \in A \cap C$. 不论哪一种情形都有$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. 所以

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

反之,若 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，那么 $x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$. 但 $B \subseteq B \cup C, C \subseteq B \cup C$,所以不论哪一种情形都有$x \in A \cap (B \cup C)$,所以

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C).$$

这就证明了上述等式.

我们引入几种常用的记号:

$\boldsymbol{Z}$: 表示一切整数的集合.

$\boldsymbol{Q}$: 表示一切有理数的集合.

$\boldsymbol{R}$: 表示一切实数的集合.

例 2 令 A 是一切满足条件 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 的实数 x 所成的集合. 我们引入以下的记法:

$$A=\{x\in\boldsymbol{R}\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}.$$

类似地,

$$B=\{x\in\boldsymbol{R}\mid x>0\}$$

就是一切正实数所成的集合.

$$C=\{x\in\boldsymbol{R}\mid -1<x<2\}.$$

就是一切大于-1且小于2的实数所成的集合. 那么

$$B\cup C=\{x\in\boldsymbol{R}\mid x>-1\}.$$

$$B\cap C=\{x\in\boldsymbol{R}\mid 0<x<2\}.$$

$$A\cap(B\cup C)=\{x\in\boldsymbol{R}\mid -1<x\leqslant 1\}.$$

$$A\cup(B\cap C)=\{x\in\boldsymbol{R}\mid -1\leqslant x<2\}.$$

习　题

1. 设 A 是一切整数的集合, B 是一切不等于零的有理数的集合. A 是不是 B 的子集?

2. 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{5, 6, 7, 8, 9\}$. 求 $A\cup B$ 和 $A\cap B$.

3. 设 a 是集合 A 的一个元素. $\{a\}$表示什么? 写法 $\{a\}\in A$ 对不对?

4. 写出含有四个元素的集合的一切子集.

5. 证明下列等式:

(i) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

(ii) $A\cap(A\cup B)=A$.

(iii) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

6. 设 A 是含有 n 个元素的集合. A 中含有 k 个元素的子集共有多少个?

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

1.2 映射

一个班里共有 15 名男同学. 我们用 1, 2, …, 15 来表示这 15 名同学. 入学时分配宿舍, 共有 10 个房间可供分配. 号码从 301 到 310. 分配方案如下: 1,2,3,4 住 301;5, 6, 7, 8 住 302;9,10, 11,12 住 305;13,14,15 住 306. 这样,对于每一个同学,就有一个确定的房间与他对应. 令 A 表示这 15 名男同学的集合,令 B 表示供分配的十个房间的集合. 那么上面这种方案就给出一个确定的法则,通过这个法则, 对于 A 中每一个元素, 有 B 中一个唯一确定的元素与它对应.

再看一个例子. 正方形的边长 x 与面积 y 的关系可以表示为 $y=x^2$. 对于 x 的每一个值(正实数),通过这个关系, 就有唯一确定的正实数 $y(=x^2)$ 与它对应. 如果令 A,B 都表示正实数的集合, 那么正方形的边长与面积的关系就给出了一个法则, 通过这个法则, 对于 A 中每一个数 x, 有 B 中一个唯一确定的数 y 与它对应.

上面这两个例子虽然就其内容来说似乎毫不相干, 然而它们有一个共同之点,就是在两个集合的元素间建立了一种对应关系. 在日常生活和科学技术领域里, 这一类的例子到处可见. 撇开那些具体的东西,只着眼于元素之间的对应关系,就形成了数学上一个非常有用的概念——映射.

定义1 设 A, B 是两个集合. 如果通过一个确定的法则, 对于 A 中每一个元素 x, 有集合 B 中一个唯一确定的元素 y 与它对应,那么就称这个法则是 A 到 B 的一个映射.

我们常用字母 f, g, …表示映射. 如果 f 是 A 到 B 的一个映射,那么就写作

$$f:\ A\to B.$$

如果 A 中的元素 x 通过映射 f 有 B 的元素 y 与它对应,就写作

$$f: x \longmapsto y.$$

这时 y 叫做元素 x 在 f 之下的象，记作 $f(x)$.

如果对于每一 $x \in A$, $f(x)$都已给出，那么映射 f 就完全给出了.

例 1 令 $\mathbf{Z}$ 是一切整数的集. 对于每一整数 n，令 $f(n)=2n$ 与它对应. 那么 f 是 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的一个映射.

例 2 令 $\mathbf{R}$ 是一切实数的集合，B 是一切非负实数的集合. 对于每一 $x \in \mathbf{R}$，令 $f(x)=x^2$ 与它对应；f: $x \longmapsto x^2$，那么 f 是 $\mathbf{R}$ 到 B 的一个映射.

例 3 设 $A=B=\{1,2,3,4\}$.

$$f: 1 \longmapsto 2, 2 \longmapsto 3, 3 \longmapsto 4, 4 \longmapsto 1.$$

这是 A 到 B 的一个映射.

例 4 设 A 是一切非负实数的集合，B 是一切实数的集合. 对于每一 $x \in A$，令 $f(x)=\pm\sqrt{x}$ 与它对应. f 不是 A 到 B 的映射，因为当 $x>0$ 时，$f(x)$不能由 x 唯一确定.

例 5 令 $A=B$ 等于一切自然数的集合.

$$f: n \longmapsto n-1$$

不是 A 到 B 的映射，因为 $f(1)=1-1=0 \notin B$.

例 6 设 A 是任意一个集合. 对于每一 $x \in A$，令 $f(x)=x$ 与它对应：

$$f: x \longmapsto x.$$

这自然是 A 到 A 的一个映射. 这个映射称为集合 A 的恒等映射.

从上面所举的这些例子看出，关于 A 到 B 的映射应该注意以下几点：

1° A 与 B 可以是相同的集合，也可以是不相同的集合.

2° 对于 A 的每一个元素 x，需要有 B 中一个唯一确定的元素与它对应.

3°一般说来，B的元素不一定都是A中元素的象(参看例 1).

4° A中不相同的元素的象可能相同(参看例 2).

设f: $A\to B$, g: $A\to B$ 都是A到B的映射.如果对于每一$x\in A$，都有 $f(x)=g(x)$，那么就说映射f与g是相等的，记作$f=g$.

例7 令

$$f:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\longmapsto|x|,$$
$$g:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\longmapsto+\sqrt{x^2}.$$

那么$f=g$.

映射这个概念对我们说来并不陌生，它就是我们所熟悉的函数概念的推广，因此也常常把A到B的映射叫做定义在A上，取值在B内的函数.

设f: $A\to B$ 是一个映射. 对于$x\in A$，x的象$f(x)\in B$. 一切这样的象作成B的一个子集，用$f(A)$表示:

$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\},$$

叫做A在f之下的象，或者叫做映射f的象.

例如，在上面的例 1 里，$f(\mathbf{Z})$就是一切偶数的集合，在例 2 和例 3 里，$f(A)=B$.

映射f的象 $f(A)$ 可能是B的一个真子集 (即 $f(A)\subseteq B$ 但 $f(A)\neq B$)，也可能等于B. 对于后一情形，给予以下的

定义 2 设f是A到B的一个映射. 如果$f(A)=B$，那么就称f是A到B上的一个映射，这时也称f是一个满映射 (简称满射).

例 2，例 3 和例 6 都是满射，但例 1 不是满射.

根据这个定义，f: $A\to B$ 是满射必要且只要对于B中每一元素y，都有A中元素x使得$f(x)=y$.

关于映射，只要求对于A中每一个元素x，有B中一个唯一确定的元素y与它对应，但是A中不同的元素可以有相同的象. 例

如，在例 2 里，对于绝对值相同的两个非零实数 x 和 $-x$，它们的象都是 x^2. 然而有的映射具有这样的性质：A 中任意两个不同元素的象也不相同. 例 1，例 3 和例 6 中的映射都具有这一性质. 对于这样的映射，我们也给它起一个名字：

定义 3 设 $f: A \to B$ 是一个映射. 如果对于 A 中任意两个元素 x_1 和 x_2，只要 $x_1 \neq x_2$，就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，那么就称 f 是 A 到 B 的一个单映射，简称单射.

上面的例 1，例 3 和例 6 都是单射.

设 $f: A \to B$ 是 A 到 B 的一个映射，而 $g: B \to C$ 是 B 到 C 的一个映射. 那么对于每一 $x \in A$，$f(x) \in B$，因而 $g(f(x))$ 是 C 中的一个元素. 因此，对于每一 $x \in A$，就有 C 中唯一确定的元素 $g(f(x))$ 与它对应，这样就得到 A 到 C 的一个映射，这个映射是由映射 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$ 所决定的，称为 f 与 g 的合成. 记作 $g \circ f$. 于是我们有

$$g \circ f: A \to C; \; g \circ f(x) = g(f(x)), \text{对一切 } x \in A.$$

f 与 g 的合成可以由下面的图来示意：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

例 8 设

$$f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}; \; x \longmapsto x^2.$$

$$g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}; \; x \longmapsto \sin x.$$

那么

$$g \circ f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}; \; x \longmapsto \sin x^2.$$

例 9 设 $A = \{1, 2, 3\}$.

$$f: A \to A; \; 1 \longmapsto 2, \; 2 \longmapsto 3, \; 3 \longmapsto 1.$$

$$g: A \to A; \; 1 \longmapsto 3, \; 2 \longmapsto 1, \; 3 \longmapsto 2.$$

则 $$g\circ f:\ A\to A;1\longmapsto 1,2\longmapsto 2,3\longmapsto 3.$$

映射的合成也不是什么新的概念，它不过是复合函数概念的推广而已.

设给定映射

$$f:\ A\to B,\quad g:\ B\to C,\quad h:\ C\to D.$$

那么合成映射 $h\circ(g\circ f)$ 和 $(h\circ g)\circ f$ 都是 A 到 D 的映射. 我们有

(1) $$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f.$$

事实上，令 $u=g\circ f$, $v=h\circ g$. 那么对于任意 $x\in A$,

$$h\circ u(x)=h(u(x))=h(g(f(x)));$$

$$v\circ f(x)=v(f(x))=h(g(f(x))).$$

所以 $h\circ u=v\circ f$. 等式(1)成立.

如果 f: $A\to B$ 是一个满单射，即 f 满足下列两个条件:

(i) $f(A)=B$;

(ii) $f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2$, 对一切 $x_1, x_2\in A$;

那么就称 f 是 A 到 B 上的一个 1—1 映射.

例 3 的映射是一个 1—1 映射，任意集合 A 的恒等映射(例 6)显然是 A 到 A 上的 1—1 映射. 我们把集合 A 的恒等映射记作 j_A.

设 f 是 A 到 B 一个映射. 显然有

(2) $$f\circ j_A=f,\quad j_B\circ f=f.$$

定理 1.2.1 令 f: $A\to B$ 是集合 A 到 B 的一个映射. 那么下列两个条件是等价的:

(i) f 是 A 到 B 上的 1—1 映射;

(ii) 存在 B 到 A 的一个映射 g, 使得

$$g\circ f=j_A,\quad f\circ g=j_B.$$

再者，当条件(ii)成立时，映射 g 是由 f 唯一确定的.

证 如果(i)成立. 因为 f 是满射，所以对于 B 中每一元素 y, 有 $x\in A$ 使得

$$f(x)=y.$$

又因为 f 是单射，所以这个 x 是由 y 唯一确定的．我们规定

$$g:\ y\longmapsto x,\text{如果 } f(x)=y.$$

那么 g 是 B 到 A 的一个映射．

设 $x\in A$，而 $f(x)=y$．我们有

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g(y)=x.$$

所以 $g\circ f=j_A$．设 $y\in B$，而 $f(x)=y$．那么 $g(y)=x$．于是

$$f\circ g(y)=f(g(y))=f(x)=y.$$

所以 $f\circ g=j_B$．这就证明了(ii)成立．

反过来，设(ii)成立．我们先证明 f 是满射．设 $y\in B$．令 $g(y)=x\in A$．由于 $f\circ g=j_B$，所以

$$f(x)=f(g(y))=j_B(y)=y.$$

即 f 是满射．再证 f 是单射．设 $x_1,x_2\in A$ 而

$$f(x_1)=f(x_2).$$

由于 $g\circ f=j_A$，所以

$$x_1=j_A(x_1)=g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2)=j_A(x_2)=x_2.$$

这就证明了 f 是单射．因此，f 是 A 到 B 上的 1—1 映射．

最后，设(ii)成立．令 $g:\ B\to A$ 和 $h:\ B\to A$ 都具有性质：

$$g\circ f=h\circ f=j_A,\quad f\circ g=f\circ h=j_B.$$

那么由(1)和(2)，我们有

$$\begin{aligned}g&=g\circ j_B=g\circ(f\circ h)=(g\circ f)\circ h\\&=j_A\circ h=h.\end{aligned}$$

所以 g 是由 f 唯一确定的．定理被证明．□

设 f 是 A 到 B 的一个映射．我们把满足定理 1.2.1 条件(ii)的映射 $g:\ B\to A$ 叫做 f 的逆映射．由定理 1.2.1，一个映射不一定有逆映射．然而如果映射 $f:\ A\to B$ 有逆映射的话，逆映射是由 f 唯一确定的．以后把 f 的逆映射记作 f^{-1}．我们有

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com