高等数学思想方法选讲

◆ 苏化明　潘　杰　唐　烁

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等数学思想方法选讲

Gaodeng Shuxue Sixiang Fangfa Xuanjiang

苏化明　潘　杰　唐　烁

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书介绍的数学思想方法主要有：函数思想，方程思想，分类思想，反证法，数形结合思想，构造方法，微元法，对称性原则，转化原则与RMI原则，算两次原理，归纳与递推，类比思维，发散思维，逆向思维，高等数学问题的推广. 在高等数学课程教学中，这些数学思想方法对于数学知识的获取、创新能力的培养、整体素质的提高都有积极作用.

本书可作为讲授高等数学和数学分析课程教师的参考书，书中部分内容也可在数学思想方法课程中讲授，还可供参加大学生数学竞赛和研究生入学考试的学生参考.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学思想方法选讲 / 苏化明，潘杰，唐烁编.
-- 北京：高等教育出版社，2013.7
ISBN 978-7-04-037528-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①苏… ②潘… ③唐… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 118812 号

策划编辑	兰莹莹	责任编辑	兰莹莹	特约编辑	黎淑兰	封面设计	李树龙
版式设计	王 莹	插图绘制	尹 莉	责任校对	王 雨	责任印制	张泽业

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	潮河印业有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	21.75	版　　次	2013 年 7 月第 1 版
字　　数	400 千字	印　　次	2013 年 7 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	34.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　37528-00

前言

数学思想一般指现实世界的空间形式和数量关系反映到人的意识中，经过思维活动而产生的结果．它是对数学事实和数学理论（概念、定理、公式、法则等）的本质认识，也是对数学规律的理性认识，是从某些具体的数学内容和数学的认识过程中提炼出的数学观点，是建立数学和用数学解决问题的指导思想．数学方法一般指用来解决数学问题的步骤、程序和方式，是实施有关数学思想的技术手段．数学思想和数学方法二者的关系密不可分．数学思想是数学方法的理论基础，数学思想是通过某种数学方法来体现的．而任何一种数学方法都反映了一定的数学思想，数学方法是数学思想的具体化形式．因而数学思想和数学方法本质上是统一的．

由于数学思想方法是数学的精髓和灵魂，是数学知识转化为能力的桥梁，因而数学教学中应该加强数学思想方法的传授．也就是说，数学教学不仅要让学生掌握必要的数学概念、方法和结论，更重要的是要让学生领会并掌握数学的精神实质和思想方法，使数学成为他们手中得心应手的武器，受益终生．著名数学家李大潜院士曾说过："如果将数学教学仅仅看成是知识的传授(特别是那种照本宣科式的传授)，那么即使包罗了再多的定理和公式，可能仍免不了沦为一堆僵化的教条，难以发挥作用；而掌握了数学的思想方法和精神实质，就可以由不多的几个公式演绎出千变万化的生动结论，显示出无穷无尽的威力．"

高等数学课程中蕴含很多数学思想方法，通过这些思想方法的传授，可以激发学生的创新意识和创新精神，从而培养学生的创新能力，达到提高学生素质的目的．例如，通过类比思想的传授，可以引导学生猜想、预见，提出新问题，做出新发现；通过归纳思想的传授，可以引导学生不断总结，找出事物的规律，并利用规律解决问题；通过变换思想的传授，可以引导学生灵活多变地处理问题，使问题化繁为简、化难为易；通过发散思维的传授，可以引导学生围绕某一问题，从不同角度去思考探索，通过对问题的深入研究，得出新方法、新结果；通过一般化思想的传授，可以引导学生开阔视野，寻求或揭示更普遍、更深刻的事实或规律．我们编写这本《高等数学思想方法选讲》的目的就是对高等数学中的常见数学思想方法提供一些素材，供教授高等数学课程的同行在教学中作为参考，希望高等数学课程能成为传授数学思想方法的载体，希望数学思想方法的传授能贯穿于高等数学教学的始终．

高等数学中的数学思想方法有很多，本书仅介绍其中的函数思想，方程思想，分类思想，反证法，数形结合思想，构造方法，微元法，对称性原则，转化原则与RMI原则，算两次原理，归纳与递推，类比思维，发散思维，逆向思维，高等数学问题的推广．这只是高等数学中数学思想方法的一部分内容，因而称之为“选讲”．

本书每讲都选用了较多的例题和习题，内容相对丰富．书中问题绝大部分为历年研究生入学考试题或高等数学竞赛题，其中每个问题的求解都体现了一定的数学思想方法．书中的考研试题或竞赛题的来源均在题后标出．为了尊重历史，仍沿用该试题使用时有关学校当年的名称．例如，若试题为北京航空学院1981年的考研试题，则该题后面用“北京航空学院，1981”标出，而该学校后来的名称为北京航空航天大学．

本书共十五讲，其中第五讲、第八讲由潘杰编写，第二讲、第十一讲由唐烁编写，其余由苏化明编写．全书由苏化明统稿、定稿．

本书可作为讲授高等数学和数学分析课程教师的参考书，书中部分内容也可在数学思想方法课程中讲授，本书还可供有志参加大学生数学竞赛和研究生入学考试的学生参考．

本书在编写过程中参考了国内外众多书籍，而书后仅列出了部分参考书目，作者向所有这些书的编著者表示敬意和感谢．

本书的编写得到了合肥工业大学数学学院及高等教育出版社数学分社的支持和帮助，衷心感谢这两个单位的领导及相关工作人员．

作者衷心感谢本书的审稿人，他对本书提出了宝贵的意见和建议，因而本书得到了改进和完善．

作者衷心感谢兰莹莹女士为编辑本书所付出的辛勤劳动，她一丝不苟的工作态度使得本书避免了不少差错．

受水平及条件所限，本书肯定有不足甚至谬误之处，恳请同行及广大读者提出宝贵意见，以便作出修订．

编　者

2012年12月

目　　录

第一讲 函数思想

现实世界中的万事万物都在一定的空间中运动变化，而事物的运动变化是在相互联系、彼此制约的关系中进行的．事物在运动变化过程中存在着一定的数量关系，而函数正是反映世间诸变量相互联系变化的一种数学概念，它从量的方面刻画了变量与变量之间的对应关系．函数思想方法是用运动、变化、联系、对应的观点，分析和研究事物间的数量关系，通过函数的形式，把这种数量关系表示出来并加以研究，从量的关系去探求事物运动变化的规律，以达到解决问题进而改造客观世界的目的．利用函数思想解题就是将要解决的问题转化为函数问题，利用函数的已知相关结论使问题得以解决．

由于函数思想贯穿于微积分的所有内容，所以我们不可能面面俱到地去论述函数思想方法的各种应用．除了本讲之外，读者可以发现，本书还有很多内容是与函数思想紧密相关的．

一、方程、不等式与函数

$y=f(x)$ 是一元函数，x 可以在整个数轴或数轴的一部分上取值，而 y 是由 x 通过 f 所确定的唯一值．

$f(x)=0$ 是方程，使其成立的 x 只是某些特定的值；$f(x)>0$ 是不等式，使其成立的 x 可能是整个数轴上的点或其一部分．

方程、不等式和函数相比，前者静，后者动；前者为特殊，后者为一般．方程与不等式的解可视为对应函数处在某种特定状态自变量的值，解的个数、大小、范围都与函数性态有密切关系．因而研究方程、不等式时，可将它们转化为研究函数问题，变静为动，变特殊为一般，利用函数相关性质求解方程与不等式问题．

例 1 就 k 的不同取值情况，确定方程 $x-\dfrac{\pi}{2}\sin x=k$ 在开区间 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内根的个数，并证明你的结论．（全国，1997）

分析 方程根的个数的判定可通过对辅助函数的单调性、极值等作出讨论并进行求解．

解 设 $f(x)=x-\dfrac{\pi}{2}\sin x$，则 $f(x)$ 在 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，且 $f'(x)=1-\dfrac{\pi}{2}\cos x$．

令 $f'(x)=0$，解得 $x_0=\arccos\dfrac{2}{\pi}$，$x_0$ 为 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的唯一驻点. 由于当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，所以 x_0 是 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的唯一最小值点，最小值

$$y_0=f(x_0)=x_0-\frac{\pi}{2}\sin x_0.$$

又因为 $f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，故在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内 $f(x)$ 的取值范围为 $[y_0,0)$.

综上所述，当 $k<y_0$ 或 $k\geqslant 0$ 时，原方程在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内没有根；当 $k=y_0$ 时，原方程在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一根 x_0；当 $y_0<k<0$ 时，原方程在 $(0,x_0)$ 和 $\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内各恰有一根，即原方程在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内恰有两个不同的根.

例 2 函数 $f(x)=2^x-1-x^2$ 在实数轴上有多少个零点.（第三十四届美国大学生数学竞赛题,1973）

解 令 $f(x)=2^x-x^2-1$，显然 $f(0)=f(1)=0$.

又 $f(2)=-1<0$，$f(5)=6>0$，且 $f(x)$ 连续，由连续函数的零点定理知 $f(x)$ 在 $(2,5)$ 内至少存在一个零点，从而 $f(x)$ 至少有三个零点.

若 $f(x)$ 有四个或四个以上的零点，则由 Rolle 定理知 $f'''(x)=2^x(\ln 2)^3$ 至少有一个零点，但这是不可能的，故 $f(x)$ 至多有三个零点.

综上可知，$f(x)$ 有且仅有三个零点.

例 3 对 k 的不同情况，讨论方程 $x^3-3kx^2+1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内的根的个数.（浙江省高等数学竞赛题,2004;天津市大学生数学竞赛题,2010）

解 设 $f(x)=x^3-3kx^2+1$，则 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的连续函数且 $f(0)=1$. 易知

$$f'(x)=3x(x-2k).$$

(i) 当 $k\leqslant 0$ 时，由于 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调递增，从而方程 $x^3-3kx^2+1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内无实根.

(ii) 当 $k>0$ 时，若 $0<x<2k$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；若 $x>2k$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，因此 $x=2k$ 为 $f(x)$ 的极小值点，也是 $(0,+\infty)$ 内的最小值点. 此时 $f(2k)=1-4k^3$.

于是有：当 $1-4k^3>0$，即 $0<k<\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ 时，原方程在 $(0,+\infty)$ 内无实根；

当$1-4k^3=0$，即$k=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$时，原方程在$(0,+\infty)$内有一个根；当$1-4k^3<0$，即$k>\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$时，原方程在$(0,+\infty)$内有两个根.

综上可知，当$k<\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$时，原方程在$(0,+\infty)$内没有根；当$k=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$时，原方程在$(0,+\infty)$内有一个根；当$k>\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$时，原方程在$(0,+\infty)$内有两个根.

注　原方程等价于$x+\frac{1}{x^2}=3k$，研究曲线$y=x+\frac{1}{x^2}$与直线$y=3k$交点的个数即得原问题的解.

例 4　证明方程$ae^x=1+x+\frac{x^2}{2}$(a是一个正常数)恰有一个实根.（美国伯克利数学问题）

证　首先证明辅助命题：若$f(x)$是可微函数且对任意实数x有$f'(x)>f(x)$，则当$f(x_0)=0$时，对所有的$x>x_0$，成立$f(x)>0$.

令$\varphi(x)=e^{-x}f(x)$，则$\varphi(x_0)=0$. 由于$\varphi'(x)=e^{-x}(f'(x)-f(x))>0$，所以$\varphi(x)$单调递增，故当$x>x_0$时，$\varphi(x)>\varphi(x_0)=0$，从而$f(x)>0$.

当$a=1$时，由于e^x展开到任意阶的 Taylor 展式的余项在$x\neq0$时都不为零，所以此时方程仅有实根$x=0$. 反之，若$x=0$是原方程的根，则$a=1$. 以下设$a>0$且$a\neq1$，此时$x\neq0$.

令$F(x)=ae^x-1-x-\frac{x^2}{2}$，则$F(x)$为可微函数. 由于

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty,$$

所以$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内至少有一个零点. 设$F(x)$的最小零点为x_0，由于$F(x_0)=0$及

$$F'(x)=ae^x-1-x>ae^x-1-x-\frac{x^2}{2}=F(x),$$

故由辅助命题知，当$x>x_0$时，$F(x)>0$，因此$F(x)$仅有一个零点x_0，即方程$ax^2=1+x+\frac{x}{2}$仅有一个实根.

例 5　设$P(x)$为n次多项式且$P(a)\geqslant0$，$P'(a)\geqslant0$，…，$P^{(n-1)}(a)\geqslant0$，$P^{(n)}(a)>0$，证明方程$P(x)=0$的实根不会大于a.（苏联大学生数学竞赛题，1975）

证　当$m>n$时，$P^{(m)}(x)=0$，所以由 Taylor 公式有

$$P(x)=P(a)+P'(a)(x-a)+\cdots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

利用题设条件，当 $x>a$ 时，$P(x)>0$，从而 $P(x)=0$ 没有大于 a 的实根.

例 6 设 $f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}$，证明方程 $f(x)=0$ 当 n 为奇数时恰有一实根，当 n 为偶数时无实根.（天津大学,1979;中国科学院计算中心,1980;复旦大学,1981;昆明工学院,1981）

证 (i) n 为奇数时，

$$f'(x)=-1+x-x^2+\cdots+x^{n-2}-x^{n-1},$$

$$f'(-1)=-n<0;$$

当 $x\neq-1$ 时，

$$f'(x)=-\frac{1+x^n}{1+x}<0,$$

所以 $f(x)$ 严格单调递减. 又 $f(0)=1>0$，$n=1$ 时 $f(2)=-1<0$，而 $n\geqslant3$ 时，

$$f(2)=1-2+\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{n-1}-\frac{2^n}{n}<0,$$

所以方程 $f(x)=0$ 当 n 为奇数时有且仅有一个实根.

(ii) n 为偶数时，

$$f'(x)=-1+x-x^2+\cdots-x^{n-2}+x^{n-1},$$

$$f'(-1)=-n<0;$$

当 $x\neq-1$ 时，

$$f'(x)=\frac{x^n-1}{x+1},$$

当 $x<-1$ 时 $f'(x)<0$，当 $x>1$ 时 $f'(x)>0$，而 $f'(1)=0$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取最小值. $n=2$ 时，$f(1)>0$，$n\geqslant4$ 时，

$$f(1)=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}>0,$$

即 $f(x)$ 的最小值大于零，因此方程 $f(x)=0$ 当 n 为偶数时无实根.

例 7 设 $f_n(x)=\sin x+\sin^2x+\cdots+\sin^nx$. 试证：

(i) 对任意自然数 n，方程 $f_n(x)=1$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 内有且仅有一个根；

(ii) $\forall n$，设 $x_n\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 是 $f_n(x)=1$ 的根，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{6}$.

（北京师范大学,1999）

分析 利用闭区间上连续函数的介值定理可判断 $f_n(x)=1$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 内有根. 根的唯一性可利用函数的单调性证明. 再利用单调有界数列必有极限求

出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证 (i) 令

$$F_n(x)=f_n(x)-1=\sin x+\sin^2 x+\cdots+\sin^n x-1,$$

其中 $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

因为 $F_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=n-1\geqslant 0$，当 $x\neq\dfrac{\pi}{2}$时，

$$F_n(x)=\frac{\sin x(1-\sin^n x)}{1-\sin x}-1<\frac{\sin x}{1-\sin x}-1,$$

$$F_n\left(\frac{\pi}{6}\right)<\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-1=0,$$

所以 $F_n(x)=0$ 即 $f_n(x)=1$ 在$\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$内至少有一个实根.

又当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$时，

$$F_n'(x)=\cos x+2\sin x\cos x+\cdots+n\sin^{n-1}x\cos x>0,$$

从而 $F_n(x)$单调递增，故 $F_n(x)=0$ 即 $f_n(x)=1$ 在$\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$内有且仅有一个实根.

(ii) 设 x_1 是方程$f_1(x)=1$ 的根，则 $x_1=\dfrac{\pi}{2}$. 设 x_2 是 $\sin x+\sin^2 x=1$ 的根，则$x_2\in\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. 一般地，若 x_n 是方程 $f_n(x)=1$的根，即 $F_n(x_n)=0$ $(n=1,2,\cdots)$，由于

$$\begin{aligned}F_n(x_{n-1})&=\sin^n(x_{n-1})+\sin^{n-1}(x_{n-1})+\cdots+\sin(x_{n-1})-1\\&=\sin^n(x_{n-1})+F_{n-1}(x_{n-1})=\sin^n(x_{n-1})>0=F_n(x_n),\end{aligned}$$

又 $F_n(x)$单调递增，所以$\dfrac{\pi}{6}<x_n<x_{n-1}<\dfrac{\pi}{2}$ $(n=3,4,\cdots)$，从而数列$\{x_n\}$单调递减且有下界，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l$，则由于

$$1=\sin x_n+\sin^2 x_n+\cdots+\sin^n x_n=\frac{\sin x_n(1-\sin^n x_n)}{1-\sin x_n},$$

两边取极限并注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n x_n=0$，所以

$$1=\frac{\sin l}{1-\sin l},$$

解得 $\sin l=\frac{1}{2}$. 再由 $x_n\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right)$ $(n\geqslant 2)$，因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=l=\frac{\pi}{6}.$$

例 8　设常数 $a>1$，$b>0$. 为使方程 $\log_a x=x^b$ 存在实根，求 a，b 应满足的条件.（第十五届北京市大学生数学竞赛题,2004）

解　将方程变形为 $\frac{\ln x}{x^b}=\ln a$. 设 $f(x)=\frac{\ln x}{x^b}$，由于

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0,\qquad f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}^b}>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有最大值.

$f'(x)=\frac{1-b\ln x}{x^{b+1}}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\mathrm{e}^{\frac{1}{b}}$ 是唯一驻点. 当 $0<x<\mathrm{e}^{\frac{1}{b}}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\mathrm{e}^{\frac{1}{b}}$ 时，$f'(x)<0$，所以最大值 $f(\mathrm{e}^{\frac{1}{b}})=\frac{1}{b\mathrm{e}}$，$f(x)$ 的值域为 $\left(-\infty,\ \frac{1}{b\mathrm{e}}\right]$.

又 $a>1$，所以 $1<a\leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{b\mathrm{e}}}$ 为所求条件.

例 9　设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有二阶连续导数，且 $f(a)>0$，$f'(a)<0$，当 $x>a$ 时 $f''(x)<0$. 证明：在 $[a,+\infty)$ 内，方程 $f(x)=0$ 有且只有一个实根.（浙江大学,2003;第十九届北京市大学生数学竞赛题,2008）

分析　由于 $f(a)>0$，故由连续函数的介值定理知，还需证明存在 x_1，使 $f(x_1)<0$，从而 $f(x)=0$ 至少有一个实根. 再由单调性证明根的唯一性.

证　由 Taylor 公式可知

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2,$$

其中 ξ 介于 a 与 x 之间.

由于 $f''(\xi)<0$，所以当 $x>a$ 时，

$$f(x)<f(a)+f'(a)(x-a).$$

又 $f'(a)<0$，所以当 x 充分大时，$f(x)<0$，故可取 $x_1>a$，使 $f(x_1)<0$.

又已知 $f(a)>0$，由连续函数的介值定理知存在 $x_0\in(a,x_1)$，使 $f(x_0)=0$.

因为 $x>a$ 时，$f''(x)<0$，所以 $f'(x)$ 单调递减. 又 $f'(a)<0$，所以当 $x>a$ 时，$f'(x)<f'(a)<0$，从而 $f(x)$ 单调递减，因此 $f(x)=0$ 在 $[a,+\infty)$ 内有且只有一个实根.

例 10　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且大于 0，令

$$F(x)=\int_{x/2}^{1}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{x/2}\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,$$

试证方程 $F(x)=0$ 在 $(0,2)$ 内有且只有一个根.（南京师范大学,2006）

证　由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且大于 0，又

$$F'(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{f\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{f\left(\frac{x}{2}\right)}\right]\leqslant -1<0,$$

所以 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上严格单调递减. 又因为

$$F(0)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t>0,\qquad F(2)=-\int_0^1\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0,$$

所以方程 $F(x)=0$ 在 $(0,2)$ 内有且只有一个根.

例 11　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点，且 $|f'(x)|\leqslant M$，求证：$|f(a)|+|f(b)|\leqslant M(b-a)$.（南京大学大学数学竞赛题,1993）

分析　证明不等式的常用方法之一是利用微分中值定理.

证　设 $f(c)=0$，$c\in(a,b)$，在区间 $[a,c]$ 上应用 Lagrange 中值定理，必存在 $\xi\in(a,c)$，使得

$$f(c)-f(a)=f'(\xi)(c-a),$$

于是

$$|f(a)|=|f'(\xi)|(c-a)\leqslant M(c-a).$$

在区间 $[c,b]$ 上应用 Lagrange 中值定理，同理可得

$$|f(b)|\leqslant M(b-c).$$

将此两个不等式相加，即得所证不等式.

例 12　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有一阶连续导数且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 证明：对于每个 $\alpha\in(0,1)$，有

$$\left|\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{8}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|.$$

（第六十八届美国大学生数学竞赛题,2007）

证　记 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$，由微分中值定理，$\forall\, t\in[0,1]$，

$$f(t)-f(\alpha t)=f'(\xi)(1-\alpha)t,$$

其中 $\alpha t<\xi<t$，于是

$$|f(\alpha t)-f(t)|\leqslant M(1-\alpha)t,$$

上式两边对 t 从 0 到 1 积分，得

$$\frac{1}{2}(1-\alpha)M\geqslant\int_0^1|f(\alpha t)-f(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\geqslant \left| \int_0^1 f(\alpha t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right|$$

$$= \left| \int_0^1 f(\alpha t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \right|,$$

所以

$$\left| \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)M.$$

又 $\alpha(1-\alpha) \leqslant \frac{1}{4}$，因此

$$\left| \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{1}{8} \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f'(x)|.$$

例 13 设 $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$，证明不等式

$$2\sin x + \tan x \geqslant 3x.$$

(复旦大学,1998)

分析 构造辅助函数并利用函数的单调性是用来证明不等式的常用方法之一.

证 令

$$f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x \quad \left(0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right),$$

则 $f(0)=0$，且

$$f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3,$$

由算术—几何平均不等式知

$$2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} = \cos x + \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} \geqslant 3,$$

故当 $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x) \geqslant 0$（等号仅当 $x=0$ 时成立），从而 $f(x)$ 单调递增，于是 $f(x) \geqslant f(0) = 0$，即当 $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ 时，$2\sin x + \tan x \geqslant 3x$ 成立.

例 14 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是导数连续的有界函数，$|f(x) - f'(x)| \leqslant 1$，求证：$|f(x)| \leqslant 1$，$x \in (-\infty, +\infty)$.（第八届江苏省高等数学竞赛题,2006）

证法 1 令 $F(x) = \mathrm{e}^{-x}[f(x)+1]$，由题意 $-1 \leqslant f'(x) - f(x) \leqslant 1$，所以

$$F'(x) = \mathrm{e}^{-x}[f'(x) - f(x) - 1] \leqslant 0,$$

因而 $F(x)$ 单调递减，故

$$F(x) \geqslant \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)+1}{\mathrm{e}^x} = 0,$$

而 $e^{-x}>0$，所以 $f(x)+1\geqslant 0$，即 $f(x)\geqslant -1$.

令 $G(x)=e^{-x}[f(x)-1]$，由题意 $-1\leqslant f'(x)-f(x)\leqslant 1$，所以

$$G'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)+1]\geqslant 0,$$

因而 $G(x)$ 单调递增，故

$$G(x)\leqslant \lim_{x\to+\infty}G(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-1}{e^{x}}=0.$$

而 $e^{-x}>0$，所以 $f(x)-1\leqslant 0$，即 $f(x)\leqslant 1$.

综上，$|f(x)|\leqslant 1$.

证法 2 $\forall x\in\mathbb{R}$，有

$$[e^{-x}f(x)]'=e^{-x}[f'(x)-f(x)].$$

上式两边对 x 从 x 到 $+\infty$ 积分，得

$$[e^{-x}f(x)]_{x}^{+\infty}=\int_{x}^{+\infty}e^{-x}[f'(x)-f(x)]dx,$$

由此知

$$e^{-x}|f(x)|\leqslant\int_{x}^{+\infty}e^{-x}|f'(x)-f(x)|dx$$

$$\leqslant\int_{x}^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-x},$$

从而 $|f(x)|\leqslant 1$.

例 15 设 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$，证明：

$$\frac{1}{\sin^{2}x}\leqslant\frac{1}{x^{2}}+1-\frac{4}{\pi^{2}}.$$

（苏联大学生数学竞赛题，1975；暨南大学，2010）

证 令 $f(x)=\frac{1}{\sin^{2}x}-\frac{1}{x^{2}}$，则 $f'(x)=\frac{2}{x^{3}}-\frac{2\cos x}{\sin^{3}x}$. 于是当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，$f'(x)>0$ 等价于

$$\frac{1}{x^{3}}>\frac{\cos x}{\sin^{3}x}\quad 或\quad \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}-x>0.$$

令 $g(x)=\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}-x$，则

$$g'(x)=\cos^{\frac{2}{3}}x+\frac{1}{3}\sin^{2}x\cos^{-\frac{4}{3}}x-1,$$

$$g''(x)=\frac{4}{9}\sin^{3}x\cos^{-\frac{7}{3}}x>0\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right),$$

由此知 $g'(x)$ 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时单调递增，故 $g'(x)>g'(0)=0$，从而知 $g(x)$ 当

$0<x<\frac{\pi}{2}$ 时单调递增，故 $g(x)>g(0)=0$，于是当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时 $f'(x)>0$ 成立，从而$f(x)$当$0<x<\frac{\pi}{2}$时单调递增，因此$f(x)\leqslant \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)$，即

$$\frac{1}{\sin^2 x}\leqslant\frac{1}{x^2}+1-\frac{4}{\pi^2}.$$

例 16 设整数 $n>1$，证明：

$$\frac{1}{2ne}<\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{ne}. \tag{1}$$

（第六十三届美国大学生数学竞赛题,2002;第十七届北京市大学生数学竞赛题,2006）

分析 某些关于数列的不等式可通过转化为函数不等式来证明. 借助于函数的最大(小)值也是证明不等式的常用方法.

证 下面证明更为一般的结论：

设整数 $n>1$，t 为实数且 $0<t\leqslant 2$，则有

$$\frac{t^2}{2n}e^{-t}<e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n<\frac{t^2}{n}e^{-t}. \tag{2}$$

不等式

$$e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n<\frac{t^2}{n}e^{-t} \tag{3}$$

等价于

$$\frac{t^2}{n}+e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n>1. \tag{4}$$

令 $f(t)=\frac{t^2}{n}+e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n(0\leqslant t\leqslant n)$，则

$$f'(t)=\frac{t}{n}\left[2-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\right],$$

解$f'(t)=0$ 可求得函数$f(t)$在$(0,n)$内的驻点为 t_0，由此知 $e^{t_0}\left(1-\frac{t_0}{n}\right)^{n-1}=2$，于是

$$\begin{aligned}f(t_0)&=\frac{t_0^2}{n}+2\left(1-\frac{t_0}{n}\right)=\frac{1}{n}[(t_0-1)^2+2n-1]\\&\geqslant 2-\frac{1}{n}>1.\end{aligned}$$

又$f(0)=1$，$f(n)=n$，故连续函数$f(t)$在$[0,n]$上的最小值为 1，所以当 $0<t\leqslant 2$ 时，不等式(4)成立，因而不等式(3)成立.

不等式

$$e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}>\frac{t^{2}}{2n}e^{-t} \tag{5}$$

等价于 $e^{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}<1-\frac{t^{2}}{2n}$，或

$$\ln\left(1-\frac{t^{2}}{2n}\right)-t-n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)>0. \tag{6}$$

令 $g(t)=\ln\left(1-\frac{t^{2}}{2n}\right)-t-n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\ (0<t<2)$，则

$$g'(t)=-\frac{2t}{2n-t^{2}}-1+\frac{n}{n-t}=\frac{t^{2}(2-t)}{(2n-t^{2})(n-t)}.$$

由于 $n\geqslant 2$，所以当 $0<t<2$ 时，$g'(t)>0$，从而 $g(t)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，又 $g(0)=0$，所以 $g(t)>g(0)=0$，于是当 $0<t<2$ 时，不等式(6)成立.

又数列 $\left\{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-1}\right\}$ 单调递增收敛于 e^{-2}，故 $\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-1}<e^{-2}$，从而当 $t=2$ 时不等式(5)也成立. 因此当 $0<t\leqslant 2$ 时不等式(5)成立.

由不等式(3)，(5)知不等式(2)成立. 特别在不等式(2)中取 $t=1$ 即得不等式(1).

例 17 设 $0<x<1$，试证：

$$\frac{2}{e}<x^{x/(1-x)}+x^{1/(1-x)}<1.$$

(广西大学,1987)

证 令

$$f(x)=x^{x/(1-x)}+x^{1/(1-x)}=(1+x)x^{x/(1-x)},$$

则

$$\ln f(x)=\ln(1+x)+\frac{x\ln x}{1-x},$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{(1-x)^{2}}\left[\ln x+\frac{2(1-x)}{1+x}\right]. \tag{7}$$

再令 $g(x)=\ln x+\frac{2(1-x)}{1+x}$，则当 $0<x<1$ 时，

$$g'(x)=\frac{(1-x)^{2}}{x(1+x)^{2}}>0,$$

故 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，从而 $g(x)<g(1)=0$. 由 $f(x)>0\ (0<x<1)$ 及(7)知 $f'(x)<0$，所以当 $0<x<1$ 时 $f(x)$ 单调递减，因此

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)<f(x)<\lim_{x\to 0^{+}}f(x).$$

而