函　数

主编：杨大淳

北京广播学院出版社

函　　数

主　编：杨大淳

副主编：袁智国、杜其湘

编　者：耿俊杰、李文英

杨家林、周秀敏

石景林

北京广播学院出版社

1989年2月

函　　数

杨大淳、袁智国、杜其湘
北京广播学院出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京广播学院印刷厂印刷
ISBN 7-81004-112-6-/02
787×1092毫米1/32　7印张 157千字
1989年2月第1版1939年2月第1次印刷
印数4000册　　定价2.50元

前　　言

数学是中学阶段重要的基础学科，在科学技术日益更新，教学改革不断发展的新时期，数学教学起着特殊的作用。它是基础的基础，是培养学生思维能力创造能力的有效课程。

教师如何教好这门课，学生如何学好这门课，是师生共同关心的问题。我们几位教师根据自己多年的实践体会，参照了中学数学教学中的可取的经验，以教学大纲为指针，与教材内容相适应，编写了这套丛书。近年来，数学练习题，可谓多矣，各种测试题也是名目繁多，不可胜数。但教改的宗旨是减轻负担，提高质量。教学不能以多取胜，练习切忌陈陈相因，繁琐重复的练习，使人不得要领，岂能提高学习效益？学生的学习如能拨云见日，以少胜多，在山重水复之中，寻求到柳暗花明的新境界，这就必然要找到一条可行之路。这条路，应当是既符合教材知识的逻辑联系，又掌握学生思维发展的客观规律，使学生由浅入深由近知远，逐步悟见其知，学生在掌握规律，运用规律的同时，还可不断提出创造性的见解，以新颖，科学，简洁的思考和解题发展兴趣，提高能力。

自学是中学生学习的重要手段，是为今后获取知识必备的能力，这套丛书，在培养学生自学能力，开启他们的数学灵感，做出一些尝试，同时也有利于学生在学习中建立自己的知识系统和结构。对于在校学生或知识青年的自学，对于青年教师的教学，应有一定的参考价值。

为编写这套丛书，我们特邀中学数学界有影响的老教师杨大淳先生为主编，对于初中数学教材中的难点、重点，内在联系，以及精选的习题，点拨的要点，作了多方面讨究，但我们限于教学水平，理论修养，实践经验之不足，疏漏之处在所难免，敬希同仁不吝指正。

参加编写的有袁智国，杜其湘，李文英，耿俊杰，杨家林，周秀敏，石景林。

编　者

目　录

第一章 指 数

内容提要

指数及其运算是代数的指数基本内容之一.

本章里，指数由正整数指数扩充到有理数指数. 因此，简化了根式的运算. 对于数也给出了科学的记法. 为今后指数函数，对数函数等有关内容的学习打下基础.

§1.1 正整数指数幂

一、正整数指数幂

我们学习过正整数指数的幂，如 x^3，a^4 等一般地，表示为 a^m其中 m 是正整数. 它的意义是：表示 m 个 a 相乘.

即：$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m\text{个}}$ m 称为指数，a 称为底数. a^m 称为a的m次幂.

当然，幂是指 D 的 m 次方的结果。如 2^3 不能叫幂，而只是说：2 的三次方. 但 $2^3=8$ 这个结果 8 叫 2 的三次方幂. 由于 a^m 本身也表示结果，所以 a^m 也叫 a 的 m 次幂.

二、正整数指数幂的性质

正整数思成幂有如下的性质：

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($m>n$, $a\neq 0$)

3. $(a^m)^n = a^{mn}$

4. $(ab)^n = a^n b^n$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ ($b\neq 0$)

上述性质可以根据正整数指数幂的定义来证明、性质3，性质 4 证明如下：

例：求证 $(a^m)^n = a^{mn}$.

证明：$\because$ $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n\text{ 个}}$

$$= \underbrace{\underbrace{(a\cdot a\cdots a)}_{m\text{ 个}}\underbrace{(a\cdot a\cdots a)}_{m\text{ 个}}\cdots\underbrace{(a\cdot a\cdots a)}_{m\text{ 个}}}_{n\text{ 个组}}$$

a 在每组中有 m 个. 共有 n 组所以 a 一共有 $m\times n$ 个. 故

$$(a^m)^n = \underbrace{a\cdot a\cdots a}_{m\times n\text{ 个}} = a^{mn}.$$

例：求证 $(ab)^n = a^n b^n$.

证明：$\because$ $(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n\text{ 个组}}$

$$= \underbrace{(a\cdot a\cdots a)}_{n\text{ 个 }a}\underbrace{(b\cdot b\cdots b)}_{n\text{ 个 }b}$$

$\because$ $(an)^n = a^n \cdot b^n$

正整数指数幂的性质是运算的根据.

[例题 1] 计算

(1) $\frac{2}{3}m^2 \cdot n \cdot b(-0.5 \cdot m^2 \cdot n^2 \cdot b)$

(2) $ab(-2a)-(-4a)\frac{1}{2}ab+10a^2\left(-\frac{3}{5}b\right)$

$+(-3.5a^2b^4)\frac{1}{1.75b^3}$

［解］ (1) $\frac{2}{3}m^2 \cdot n \cdot b(-0.5m^2n^2b)$

$$=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}m^{2+2}\cdot n^{1+2}\cdot b^{1+1}$$

$$=-\frac{1}{3}m^4n^3b^2$$

(2) $ab(-2a)-(-4a)\frac{1}{2}ab+10a^2\left(-\frac{3}{5}b\right)$

$$+\left(-3.5a^2b^4\right)\cdot\frac{1}{1.75b^3}$$

$$=-2a^2b+2a^2b-6a^2b-\frac{7}{2}a^2\cdot b^4\frac{4}{7b^3}$$

$$=-6a^2b-2a^2b$$

$$=-8a^2b$$

［例题 2］ 计算

(1) $(x^m-y^n)^2$

(2) $a^{n+1}\cdot b^{n+2}\cdot a^{n+1}\cdot b^{n+1}$

(3) $(a^{n+1}\cdot b^n)^m(a+b)\div[(ab)^n]^m$.

［解］ (1) $(x^m-y^n)^2$

$$=(x^m)^2-2x^m\cdot y^n+(y^n)^2$$

$$= x^{2m} - 2x^{m}y^{n} + y^{2n}$$

(2) $a^{n+1} \cdot b^{n+2} \cdot a^{n+1} \cdot b^{n+1}$

$$= a^{n+1+n+1} \cdot b^{n+2+n+1}$$

$$= a^{2n+2} \cdot b^{2n+3}$$

(3) $(a^{n+1} \cdot b^{n})^{m}(a+b) \div [(ab)^{n}]^{m}$

$$= \frac{a^{m(n+1)}b^{mn}(a+b)}{a^{mn} \cdot b^{mn}}$$

$$= a^{m}(a+b)$$

$$= a^{m+1} + a^{m}b$$

练　习 1.1

1．计算

(1) $(3xy)^{3} \cdot \left(\frac{1}{3}x\right)^{2} \cdot (2y)^{2}$

(2) $(-8x^{3}yz) \cdot \left(-1\frac{1}{4}xyz^{2}\right)$

(3) $\left(-\frac{2}{3}x^{2}yz^{3}\right)\left(\frac{1}{9}xy^{2}\right) \div \left(\frac{1}{3}xyz\right)^{3}$

2．计算

(1) $[-3ab(a+b) - 2b(a^{2} - ab)] \div \left[-5a\left(ab + \frac{3}{5}b^{2}\right)\right]$

(2) $(2a - b^{2})^{2}$

(3) $\left(\frac{1}{2}a - b\right)\left(\frac{1}{4}a^{2} + \frac{1}{2}ab + b^{2}\right)$

(4) $\left[\left(a + \frac{1}{2}b\right)^{2} + \left(a - \frac{1}{2}b\right)^{2}\right]\left(2a^{2} - \frac{1}{2}b^{2}\right)$

3. 计算

(1) $(x^{m+1}y^{n+1})^2(x^m\cdot y^2)\div(x^{3m+1}y^{2n})$

(2) $(a^3bc)^m(ab^2c)^n\div(a^{3m+n}b^{2n+1}c^{m+n})$

§1.2 零指数和负整数指数

一、零指数

先看两例如：$5^2\div5^2=1$.

$$a^3\div a^3=1. \quad (a\neq0)$$

如果按照正整数指数幂运算性质：$a^m\div a^n=a^{m-n}$ 来计算，就将出现如下的形式：

$$5^2\div5^2=5^{2-2}=5^0.$$

$$a^3\div a^3=a^{3-3}=a^0 \quad (a\neq0).$$

这时出现了零指数．当然，性质中是要求 $m>n$ 的．出现零指数的情况是由于 $m=n$ 的原因．

为了保证，在被除式的指数与除式指数相等时．运算性质也能适用．又根据客观存在的实际(如上两例)我们规定：

$$a^0=1 \quad (a\neq0).$$

这是说，在底数不是零的时候，底数的零次方幂是 1．

注意，这是一个规定．事实上我们知道 a^3 的意义是 3 个 a 相乘．但 a^0 不能理解成是"零个 a 相乘"！所以 a^0 是什么意义就必需要有新的规定．这就是在 $a\neq0$ 时 $a^0=1$．这是和正整数指数幂的意义不相同的．如此一来，运算性质 2，在指数 $m=n$ 时就可适用了．

应当注意、零的零次幂没有意义．事实上零指数的出现是表示了同底幂相除．做为除数是不能为零的．

二、负整数指数

由于规定了零指数意义，那么对于指数运算性质 2 而言，条件可以是 $m \geq n$ 了。但在 $m<n$ 时性质仍不能适用，如 $5^3 \div 5^5 = \frac{1}{5^2}$。而不能写成 $5^3 \div 5^5 = 5^{3-5} = 5^{-2}$ 的形式。因为 5^{-2} 不能理解为“-2个 5 相乘”。为了能使运算性质2对于 $m<n$ 时也适用特此规定负整数指数的意义是：

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \qquad (a = 0)$$

这是说，任何不等于零的实数的 $-m$（m 为正整数）次幂等于这个数的m次幂的倒数。如：$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$，$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$ 等。

有了这个规定，那么对于运算性质 2：$a^m \div a^n = a^{m-n}$ 来说，就不再要求条件$m>n$了。如此$5^3 \div 5^5 = 5^{-2} = \frac{1}{5^2}$就是合理的。

零的负指数是无意义的。

［**例题** 1］ 计算

（1）$(-\sqrt{5})^2 - (-1)^0$

（2）$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^0$

（3）$\left(\frac{8}{15}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^{-3}$

（4）$\left[\frac{5}{8} - \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}\right]^{-1}$

［**解**］：（1）$(-\sqrt{5})^2 - (-1)^0 = 5 - 1 = 4$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(-\frac{1}{2}\right)^0$

$=\frac{1}{4}+1+1=\frac{9}{4}$

(3) $\left(\frac{8}{15}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{15}{16}\right)^{-3}$

$=\frac{1}{\left(\frac{8}{15}\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{15}{16}\right)^3}=\frac{15^2}{8^2}\cdot\frac{16^3}{15^3}$

$=15^{-1}\cdot 2^3\cdot 8$

$=\frac{64}{15}$

(4) $\left[\frac{5}{8}-\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}\right]^{-1}$

$=\left[\frac{5}{8}-\frac{5}{4}\right]^{-1}$

$=\left(-\frac{5}{8}\right)^{-1}$

$=-\frac{8}{5}$

［例题 2］ 计算

(1) $\left(\frac{3a^3x^{-2}}{b^2y^{-1}}\right)^{-2}$

(2) $\frac{(2a^{-3}b^{-2})(-3a^{-1}b)}{4a^{-4}b^{-3}}$

(3) $(x^2-y^{-2})\div(x-y^{-1})$

(4) $\frac{a^2+a^{-2}-2}{a^2-a^{-2}}$

[解]：(1) $\left(\dfrac{3a^3x^{-2}}{b^2y^{-1}}\right)^{-2}$

$$= (3a^3x^{-2}\cdot b^{-2}y)^{-2}$$

$$= 3^{-2}\cdot a^{-6}x^4\cdot b^4\cdot y^{-2}$$

$$= \frac{x^4b^4}{9a^6y^2}$$

(2) $\dfrac{(2a^{-3}b^{-2})(-3a^{-1}b)}{4a^{-4}\cdot b^{-3}}$

$$= \frac{-6a^{-4}\cdot b^{-1}}{-4a^{-4}\cdot b^{-3}}$$

$$= -\frac{3}{2}b^2$$

(3) $(x^2-y^{-2})\div(x-y^{-1})$

$$= \frac{x^2-y^{-2}}{x-y^{-1}}$$

$$= \frac{(x-y^{-1})(x+y^{-1})}{x-y^{-1}}$$

$$= x+y^{-1} = x+\frac{1}{y}$$

(4) $\dfrac{a^2+a^{-2}-2}{a^2-a^{-2}}$

$$= \frac{(a-a^{-1})^2}{(a-a^{-1})(a+a^{-1})}$$

$$= \frac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}}$$

$$= \frac{a-\dfrac{1}{a}}{a+\dfrac{1}{a}}$$

$$= \frac{a^2-1}{a^2+1}$$

[注意]

1．计算中，可以先按负指数的意义，变为正指数去做．如例题1中的第3。4题．当然也可以按照运算性质去做．如 $\left(\frac{8}{15}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{15}{18}\right)^{-3}=\frac{8^{-2}}{15^{-2}}\cdot\frac{15^{-3}}{16^{-3}}=\frac{15^2\cdot16^3}{8^2\cdot15^3}=\frac{64}{15}$ 在这里，分母中带有负指数的因式移至分子时指数改为正；分子中带有负指数的因式移至分母时指数改为正．例题2的第(1)题正是这样做的．

2．在例题2中要注意因式分解，乘方公式的应用．

练　习 1.2

1．填空．

(1) 若 $(x^3-1)^0=1$．则 x____．

(2) 当 x____时．$\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^0=1$．

(3) 当 $(\sqrt{2x+3})^0=1$ 时．则 x____．

(4) $(-0.00001)^0=$____．$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^0=$____．

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^0=$____．

2．计算

(1) $(-8\times16^{-2})^{-2}-(-2^2)^2$．

(2) $\left\{1+\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{-2}\right\}^{-2}$．

(3) $(a+a^{-1})^2$．

(4) $\dfrac{(2a^2x^3)^{-2}}{6(a^{-1}\cdot x^2)^{-3}}$.

3. 计算

(1) $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2\cdot(x^2-y^2)^{-3}\cdot\left(\dfrac{3}{x-y}\right)^{-2}$

(2) $(a^{-1}-b^{-1})(a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2})$

(3) $(x+x^{-1})(x^2+x^{-2}-1)$

(4) $\dfrac{x^{-1}-1}{x^{-1}+1}-\dfrac{x^{-1}+1}{x^{-1}-1}$

§1.3 科学记数法

利用10的整数次幂的形式来记数的方法叫科学记数法.如:

$210000000=2.1\times10^8$

$-0.0000000032=-3.2\times10^{-9}$

$21.34=2.134\times10^1$

$2.78=2.78\times10^0$

由上述各例可以看到、科学记数法是把一个绝对值不等于0的数,表示成 $\pm a\times10^n$ 的形式.其中 a 是大于或等于1而小于 10 的数,n 是整数.

那么,把一个数位较多的数,怎样用科学记数法来表示呢?下面分两种情况叙述.

一、绝对值大于1 的数

方法:把这个数写成具有一位整数的小数, 再乘以 10^n 其中 n 等于它的整数位数减 1.如:

$3820000=3.82\times10^6$ $\qquad(n=7-1=6)$