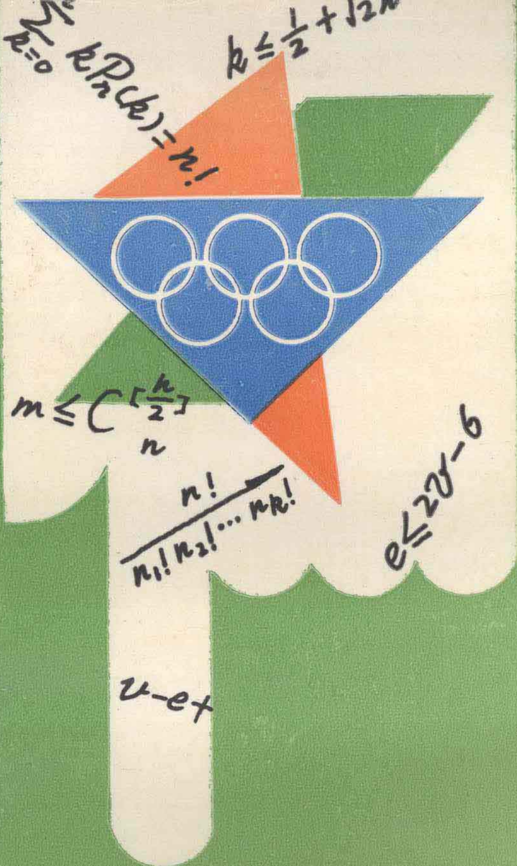


第二卷
下 册

刘诗雄
熊 斌
主 编

武汉大学
出版社

# 高中竞赛数学教程

# 高中竞赛数学教程

## 第　二　卷

（下　册）

主编　刘诗雄　熊　斌
编著　（以姓氏笔画为序）
冯志刚　刘诗雄
董方博　裴光亚
熊　斌

武汉大学出版社

# 高中竞赛数学教程

（第二卷）

（上、下册）

主编　刘诗雄　熊　斌

*

武汉大学出版社出版发行

（430072 武昌 珞珈山）

武汉华运印刷厂印刷

*

850×1168　1/32　（上册）8.25 印张　（上册）210 千字
（下册）9.875 印张　（下册）253 千字

1993 年 3 月第 1 版　1995 年 12 月第 2 次印刷

印数：6001—9000（套）

ISBN 7-307-01474-2/G·209

定价：16.30 元

# 目　　录

# 第十六章　立体几何

立体几何研究三维空间基本图形的基本性质. 因此，在处理立体几何问题时，要对研究对象产生正确的空间想像. 一般情况下，还要通过作图来反映几何构形的特点及其元素间的相互关系，利用图形对推理进行解释，帮助我们解决问题. 因此，作图是一项重要的基本功，尽管如此，它仍不过是一种辅助手段. 几何中主要的是逻辑论证，任何图形都不能代替逻辑证明，展现在图中的任何几何事实，必须严格地论证，而不是靠图形得到的. 另外，立体几何题目虽然以空间形式出现，但在解题时，往往涉及代数、三角等方面的知识和技巧. 这说明数学竞赛中的立体几何问题对逻辑推理能力、空间想像能力和运算能力都有较高的要求.

## A

## §16.1　空间中的“角”和“距离”

立体几何中许多问题都是求“角”和“距离”，或者已知条件中给出了“角”和“距离”等. 凡涉及到空间中的“角”或“距离”，都需要根据定义把它们找出来或者作出来，然后再进行推理和运算.

### 1. 空间中的“角”

空间中的角主要包括异面直线所成的角、直线与平面所成的角、二面角，它们的大小都是通过平面上的角来度量的，解题正是从作这个“平面上的角”入手.

解有关异面直线所成角的问题，往往将两异面直线所成角的

顶点选在其中一条直线上的某个特殊位置较为有利.

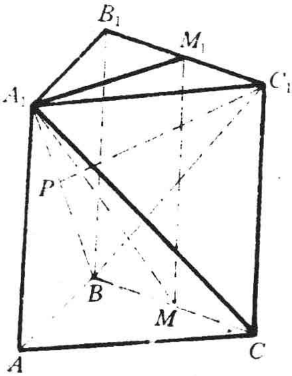

图 16.1-1

**例 1** 如图 16.1-1 所示,三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,全部 9 条棱长都等于 1,且

$$\angle A_1AB=\angle A_1AC=\angle BAC.$$

$P$ 为侧面 $A_1ABB_1$ 的对角线 $A_1B$ 上一点,$A_1P=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,连 $PC_1$. 求异面直线 $PC_1$ 与 $AC$ 所成角的度数.

**解** 由 $A_1C_1 /\!/ AC$,可知 $\angle A_1C_1P$ 即为异面直线 $AC$ 和 $PC_1$ 所成的角. 由 $AB=AC=BC$ 知,$\angle BAC=60°$,所以,

$$\angle A_1AB=\angle A_1AC=\angle BAC=60°.$$

这样,由 $A_1A=AB=AC$ 知,$\triangle A_1AB$ 与 $\triangle A_1AC$ 都是正三角形. 从而 $A_1B=A_1C=1$.

取 $BC$、$B_1C_1$ 的中点分别为 $M$、$M_1$,连 $A_1M$、$A_1M_1$、$M_1M$. 有 $B_1C_1\perp A_1M_1$、$BC\perp A_1M$,以及 $BC /\!/ B_1C_1$,从而 $B_1C_1\perp MM_1$,即 $\angle B_1C_1C=90°$. 又 $BB_1=B_1C_1=C_1C=BC=1$,故 $B_1BCC_1$ 是边长为 1 的正方形,因此,$BC_1=\sqrt{2}$.

在 $\triangle A_1BC_1$ 中,因 $A_1C_1{}^2+A_1B^2=2=BC_1{}^2$,有 $\angle BA_1C_1=90°$. 因此,在 $\mathrm{Rt}\triangle C_1A_1P$ 中,

$$\mathrm{tg}\angle A_1C_1P=\frac{A_1P}{A_1C_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以,$\angle A_1C_1P=30°$.

**例 2** 如图 16.1-2,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$E$ 是 $BC$ 的中点,$F$ 在 $AA_1$ 上,且 $A_1F:FA=1:2$. 求平面 $B_1EF$ 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的二面角.

**解法 1** 如图 16.1-2,设两平面 $B_1EF$ 与 $AA_1D_1D$ 的交线为 $GFH$,其中 $G$ 在 $AD$ 上,$H$ 在 $D_1A_1$ 的延长线上. 因平面 $AA_1D_1D$

$/\!/$ 平面 $BB_1C_1C$，所以 $FG /\!/ B_1E$. 又 $FA /\!/ B_1B$. 所以 $\angle AFG = \angle BB_1E$，因此

$$\mathrm{tg}\angle AFG = BE : BB_1 = \frac{1}{2}.$$

不妨设正方体的棱长为 6. 由 $A_1F : FA = 1 : 2$，可立得 $A_1F = 2$, $FA = 4$，从而

$$A_1H = A_1F \cdot \mathrm{tg}\angle HFA_1 = 1,$$

$$HB_1 = \sqrt{A_1H^2 + A_1B_1^{\ 2}} = \sqrt{37}.$$

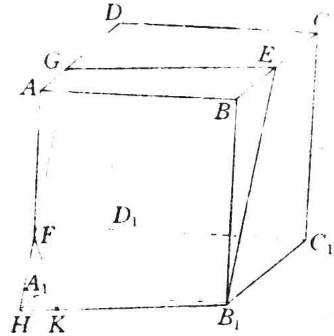



图 16.1-2

作 $A_1K \perp HB_1$（$K$ 为垂足），连接 $FK$，则 $FK \perp HB_1$，$\angle FKA_1$ 为所求二面角的平面角.

$$\because\ A_1K = \frac{A_1H \cdot A_1B_1}{HB_1} = \frac{6}{\sqrt{37}},$$

$$\therefore\ \mathrm{tg}\angle FKA_1 = \frac{A_1F}{A_1K} = \frac{\sqrt{37}}{3}.$$

从而 $\angle FKA_1 = \mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{37}}{3}$.

这种寻找二面角的平面角的方法是最基本的，但在平面角不很明显的情况下，添辅助线是困难的.

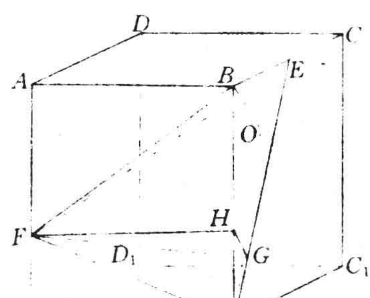



图 16.1-3

**解法 2** 如图 16.1-3，过 $B$ 作平面 $B_1EF$ 的垂线 $BO$，$O$ 为垂足. 因为两个平面所成二面角的平面角与两平面的垂线所成的角相等或互补，注意到 $BB_1$ 是平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的垂线，求平面 $B_1EF$ 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的二面角，只需求 $\angle B_1BO$ 即可. 而$\triangle B_1BO$ 是直

角三角形，若令正方体的棱长为 1，只需求出 $BO$ 的长.

利用四面体体积公式 $V_{B\text{-}B_1EF}=\frac{1}{3}S_{\triangle B_1EF}\cdot BO$ 和

$$V_{F\text{-}B_1EB}=\frac{1}{3}S_{\triangle B_1EB}\cdot A_1B_1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}\right)\times 1=\frac{1}{12}.$$

可得 $BO=\dfrac{1}{4S_{\triangle B_1EF}}$.

现在关键是求$\triangle B_1EF$ 的面积. 过 $F$ 作 $FG\perp B_1E$，交 $B_1E$ 于 $G$，即找出$\triangle FB_1E$ 的高 $FG$；再过 $F$ 作 $FH\parallel A_1B_1$，交 $B_1B$ 于 $H$. 连接 $HG$.

$$\left.\begin{array}{l}\because\ FH\perp \text{平面}\ BB_1C_1C,\\ B_1E\perp FG\end{array}\right\}\Rightarrow B_1E\perp HG,$$

$\therefore \triangle B_1GH$ 是直角三角形，利用$\triangle B_1GH\backsim\triangle B_1BE$，有 $\dfrac{HG}{BE}=\dfrac{HB_1}{B_1E}$. 而 $B_1E=\sqrt{BB_1{}^2+BE^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $HG=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}$. 因此

$$FG^2=FH^2+HG^2=\frac{46}{45},$$

$$S_{\triangle B_1EF}=\frac{1}{2}\cdot B_1E\cdot FG=\frac{\sqrt{46}}{12},$$

$$BO=\frac{12}{\sqrt{46}}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{\sqrt{46}}.$$

设$\angle B_1BO=\alpha$ ($\alpha\leqslant 90°$)，则 $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{37}}{3}$，$\alpha=\mathrm{arctg}\ \dfrac{\sqrt{37}}{3}$，即平面 $B_1EF$ 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的二面角为 $\mathrm{arctg}\ \dfrac{\sqrt{37}}{3}$.

**例 3** 如图 16.1-4，设平面 $AC$ 和 $BD$ 相交于 $BC$，它们所成的一个二面角为 45°，$P$ 为面 $AC$ 内的一点，$Q$ 为面 $BD$ 内的一点. 已知直线 $MQ$ 是直线 $PQ$ 在平面 $BD$ 内的射影，并且 $M$ 在 $BC$ 上. 又设 $PQ$ 与平面 $BD$ 所成的角为 $\beta$，$\angle CMQ=\theta$ ($0°<\theta<90°$)，线段 $PM$ 的长为 $a$，求线段 $PQ$ 的长.

**解** 如图 16.1-4，自点 $P$ 作平面 $BD$ 的垂线，垂足为 $R$. 由于

直线 $MQ$ 是直线 $PQ$ 在平面 $BD$ 内的射影，所以 $R$ 在 $MQ$ 上. 过 $R$ 作 $BC$ 的垂线，设垂足为 $N$，则 $PN \perp BC$. 因此 $\angle PNR$ 是所给二面角的平面角，$\angle PNR = 45°$.

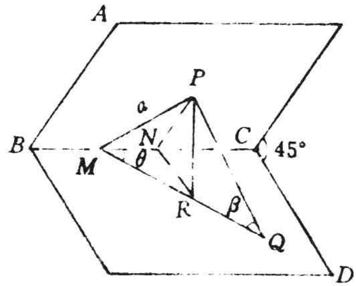


图 16.1-4

由于直线 $MQ$ 是直线 $PQ$ 在平面 $BD$ 内的射影，所以

$$\angle PQR = \beta.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle PNR$ 中，$NR = PR \cdot \mathrm{ctg}45° = PR$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle MNR$ 中，$MR = NR \dfrac{1}{\sin\theta} = PR \dfrac{1}{\sin\theta}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PMR$ 中，

$$a^2 = PR^2 + MR^2 = PR^2 + \frac{PR^2}{\sin^2\theta} = PR^2\left(1 + \frac{1}{\sin^2\theta}\right).$$

而已知 $0° < \theta < 90°$，所以 $PR = \dfrac{a\sin\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PRQ$ 中，$PQ = PR \dfrac{1}{\sin\beta} = \dfrac{a\sin\theta}{\sin\beta \cdot \sqrt{1+\sin^2\theta}}$.

故线段 $PQ$ 的长为 $\dfrac{a\sin\theta}{\sin\beta \cdot \sqrt{1+\sin^2\theta}}$.

有时，题目中并无角的概念，但在证题时，角却起着重要作用.

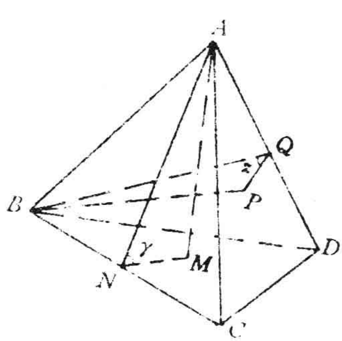


图 16.1-5

**例 4** 求证：4 个侧面面积相等的四面体为等腰四面体（3 双对棱相等的四面体）.

**证** 如图 16.1-5，设四面体 $ABCD$ 中，

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BCD}.$$

又设二面角 $A\text{-}BC\text{-}D$、$A\text{-}DC\text{-}B$、$A\text{-}BD\text{-}C$ 的平面角分别为 $\gamma$、$\alpha$、$\beta$. 于是有 $S_{\triangle ABC}\cos\gamma + S_{\triangle ACD}\cos\alpha$

$+S_{\triangle ABC}\cos\beta=S_{\triangle BCD}$，即

$$\cos\gamma+\cos\alpha+\cos\beta=1. \qquad ①$$

又设二面角 $C\text{-}AB\text{-}D$，$B\text{-}AC\text{-}D$，$C\text{-}AD\text{-}B$ 的平面角分别为 $x$，$y$，$z$，同理可得

$$\cos x+\cos y+\cos\gamma=1, \qquad ②$$

$$\cos\alpha+\cos y+\cos z=1, \qquad ③$$

$$\cos\beta+\cos x+\cos z=1. \qquad ④$$

由①，②，③，④式易得

$$\cos x=\cos\alpha,\ \cos y=\cos\beta,\ \cos z=\cos\gamma.$$

又注意到 $0<x,y,z,\alpha,\beta,\gamma<\pi$，所以

$$x=\alpha,\ y=\beta,\ z=\gamma.$$

作 $AM\perp$ 平面 $BCD$，$M$ 为垂足；$AN\perp BC$，$N$ 为垂足；$BP\perp$ 平面 $ACD$，$P$ 为垂足；$BQ\perp AD$，$Q$ 为垂足.

$$\because\ V_{A\text{-}BCD}=\frac{1}{3}AM\cdot S_{\triangle BCD}=\frac{1}{3}BP\cdot S_{\triangle ACD},$$

$\therefore AM=BP$，从而 $AN=BQ$. 又 $\frac{1}{2}AN\cdot BC=\frac{1}{2}BQ\cdot AD$，所以

$$BC=AD.$$

同理可证 $AB=CD$，$AC=BD$.

因此四面体 $ABCD$ 是等腰四面体.

### 2. 空间中的"距离"

立体几何中非常活跃的是异面直线间的距离. 求异面直线间的距离，是从作公垂线出发的.

**例 5** 如图 16.1-6 所示，已知正三棱柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 中，$AC=CC'=8$，$D$ 为 $AC$ 的中点. 求异面直线 $BD$ 与 $AC'$ 的距离.

**解** 在正三棱柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 中，

$$\left.\begin{array}{l}\text{侧面 } AA'C'C\perp\text{底面 } ABC,\\ D\text{ 是 } AC\text{ 中点}\Rightarrow BD\perp AC\end{array}\right\}\Rightarrow BD\perp\text{平面 } AA'C'C.$$

在平面 $AA'C'C$ 上，作 $DE\perp AC'$ 交 $AC'$ 于 $E$，则 $BD\perp DE$，于是

$DE$ 是 $BD$ 和 $AC'$ 的公垂线段，

$$
\begin{aligned}
DE &= AD \cdot \sin\angle CAC' \\
&= \frac{1}{2}AC \cdot \frac{CC'}{AC'} \\
&= \frac{1}{2}AC \cdot \frac{CC'}{\sqrt{AC^2+CC'^2}} \\
&= \frac{12}{5}.
\end{aligned}
$$

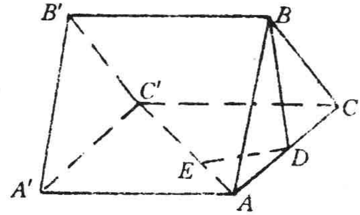


图 16.1-6

**例 6** 把一副三角板如图 16.1-7(1) 拼接后，再使三角板 $ABC$ 沿 $BC$ 折起，使两块三角板所在平面互相垂直. 若 $BC=6$，$AB=AC$，$\angle A=\angle BCD=90°$，$\angle D=60°$，求异面直线 $BC$ 和 $AD$ 的距离.

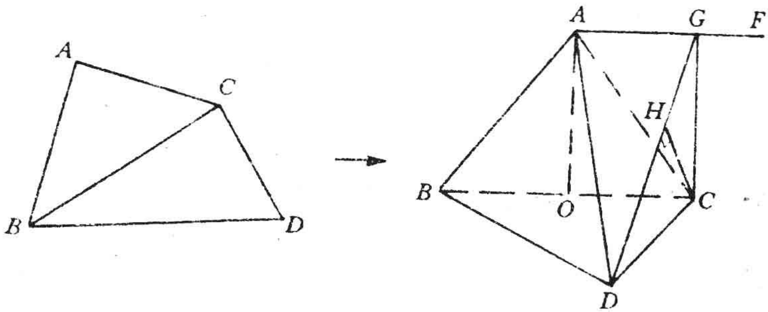


图 16.1-7

**解** 作 $AF /\!/ BC$，$DG \perp AF$ 交 $AF$ 于 $G$，连 $CG$.

因为平面 $ABC$ 垂直于平面 $BCD$，$DC \perp BC$，所以 $DC \perp$ 平面 $ABC$. 由三垂线定理的逆定理，$CG \perp AG$. 因此

$$AG \perp \text{平面 } DCG \Rightarrow \text{平面 } DCG \perp \text{平面 } AGD.$$

$\because AF /\!/ BC$，$\therefore BC /\!/$ 平面 $AGD$. 这样 $BC$ 与平面 $AGD$ 间的距离即为 $BC$，$AD$ 间的距离.

作 $CH \perp DG$ 交 $DG$ 于 $H$，由平面 $DCG \perp$ 平面 $AGD$，可知

$$CH \perp \text{平面 } AGD \Rightarrow CH \text{ 为 } BC, AD \text{ 间的距离}.$$

易得 $CH=\dfrac{CD \cdot CG}{DG}=\dfrac{CD \cdot CG}{\sqrt{CD^2+CG^2}}=\dfrac{6}{7}\sqrt{7}$.

上述两例，介绍了两种重要的方法：(1) 设法作出两异面直线的公垂线；(2) 转化为直线和与它平行的平面间的距离.

**例 7** 已知，三棱锥 $S\text{-}ABC$，底面是边长为 $4\sqrt{2}$ 的正三角形，棱 $SC$ 的长为 2，且垂直于底面，$E$，$D$ 分别为 $BC$，$AB$ 的中点. 求：$CD$ 与 $SE$ 间的距离.

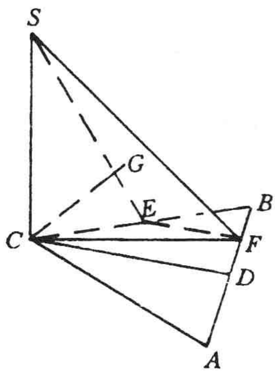

图 16.1-8

**解法 1** 由于 $CD$ 和 $SE$ 是两条异面直线，它们的公垂线与这两条直线交在哪里不很明显，为此需要把问题转化为能否找一个过 $SE$ 且平行于 $CD$ 的平面. 如图 16.1-8，$E$ 是 $BC$ 的中点，在 $BD$ 上找中点 $F$，连接 $EF$，$EF$ 是中位线，有 $EF\parallel CD$，故 $CD\parallel$ 平面 $SEF$，则 $CD$ 到平面 $SEF$ 的距离即为两异面直线间的距离，而线面之间的距离又可转化为线上一点 $C$ 到平面 $SEF$ 的距离.

设 $CG$ 是平面 $SEF$ 的垂线，$G$ 是垂足，则整个问题转化为求 $CG$ 的长. 连接 $CF$，利用四面体 $S\text{-}CFE$ 与 $C\text{-}EFS$ 的体积相同，可以求出 $CG$.

已知 $BC=4\sqrt{2}$，$D$，$E$，$F$ 分别是 $AB$，$BC$，$BD$ 的中点，可得 $CD=2\sqrt{6}$，$EF=\sqrt{6}$，$DF=\sqrt{2}$. 又 $SC=2$，故

$$
\begin{aligned}
V_{S\text{-}CFE}&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}EF\cdot DF\right)\cdot SC=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}\right)\cdot 2\\
&=\frac{2\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}
$$

另一方面，$V_{C\text{-}EFS}=\frac{1}{3}S_{\triangle EFS}\cdot CG$. 记

$$a=SE=\sqrt{4+8}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{6},$$

$$b=SF=\sqrt{4+26}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{15},$$

$$c=EF=\sqrt{6}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}.$$

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{15}+\sqrt{3}).$$

由海伦公式求$\triangle EFS$的面积：

$$S_{\triangle EFS}{}^2=p(p-a)(p-b)(p-c)=9.$$

所以$S_{\triangle EFS}=3, V_{C\text{-}EFS}=\frac{1}{3}\times 3\cdot CG=CG.$

$$\because\ V_{C\text{-}EFS}=V_{S\text{-}CFE},\ \therefore\ CG=\frac{2}{3}\sqrt{3},$$

即$CD$与$SE$的距离为$\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

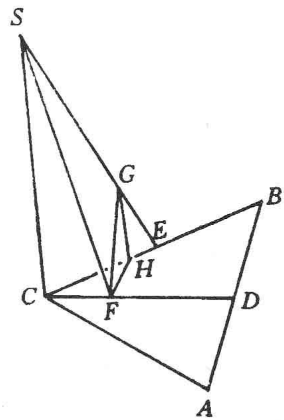

图 16.1-9

**解法 2** 设$SE$与$CD$的公垂线段为$FG$(如图16.1-9). 过$G$作$GH\perp CB$, $H$为垂足，则$GH /\!/ SC$，连接$FH$. $\because SC\perp$平面$ABC$,

$$\left.\begin{array}{l}\therefore GH\perp \text{平面} ABC,\\ \text{又} HF\subset \text{平面} ABC\end{array}\right\}\Rightarrow GH\perp FH.$$

于是$\triangle GFH$是直角三角形.

连接$SF$, $\triangle SFG$也是直角三角形. 已知$\angle BCD=30°$，设$FH=x$，则$CH=2x$.

$$\text{因}\frac{GH}{SC}=\frac{HE}{CE},\text{故} GH=\frac{2(2\sqrt{2}-2x)}{2\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}x,$$

$$\begin{aligned}FG^2&=FH^2+GH^2=x^2+(2-\sqrt{2}x)^2\\&=3x^2-4\sqrt{2}x+4.\end{aligned} \qquad ①$$

又$SF^2=SC^2+CF^2=4+(\sqrt{3}x)^2=3x^2+4$,

$$SE=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{12},\ \frac{SG}{CH}=\frac{SE}{CE},$$

故$SG=2x\cdot\frac{\sqrt{12}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{6}x$,

$$FG^2=SF^2-SG^2=3x^2+4-6x^2=4-3x^2. \qquad ②$$

由①、②得$3x^2-4\sqrt{2}x+4=4-3x^2$. 解得

$$x=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

代入 $FG^2=4-3x^2$，可得 $FG=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

这是一种代数解法，实际上如果注意到异面直线间的距离是某种最短距离，我们还可以采用函数求极值的方法.

**例 8** 已知 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$E$、$F$ 分别是 $AB$、$AD$ 的中点，$GC$ 垂直于 $ABCD$ 所在的平面，且 $GC=2$. 求点 $B$ 到平面 $EFG$ 的距离.

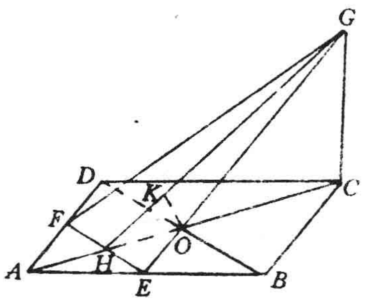

图 16.1-10

**解** 如图 16.1-10，连接 $EG$、$FG$、$EF$、$BD$、$AC$；$EF$、$BD$ 分别交 $AC$ 于 $H$、$O$. 因为 $ABCD$ 是正方形，$E$、$F$ 分别为 $AB$ 和 $AD$ 的中点，故 $EF\,/\!/\,BD$，$H$ 为 $AO$ 的中点. $BD$ 不在平面 $EFG$ 上，否则，平面 $EFG$ 和平面 $ABCD$ 重合，从而点 $G$ 在平面 $ABCD$ 上，与题设矛盾.

由直线与平面平行的判定定理，知 $BD\,/\!/$ 平面 $EFG$，所以 $BD$ 和平面 $EFG$ 的距离就是点 $B$ 到平面 $EFG$ 的距离.

$\because$ $BD\perp AC$， $\therefore$ $EF\perp HC$.

$\because$ $GC\perp$ 平面 $ABCD$， $\therefore$ $EF\perp GC$.

$\because$ $EF\perp$ 平面 $HCG$ $\therefore$ 平面 $EFG\perp$ 平面 $HCG$.

$HG$ 为这两垂直平面的交线.

作 $OK\perp HG$，交 $HG$ 于 $K$，由两平面垂直的性质定理知 $OK\perp$ 平面 $EFG$. 所以线段 $OK$ 的长就是点 $B$ 到平面 $EFG$ 的距离.

$\because$ 正方形 $ABCD$ 边长为 4，$GC=2$，

$\therefore$ $AC=4\sqrt{2}$，$HO=\sqrt{2}$，$HC=3\sqrt{2}$.

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle HCG$ 中，$HG=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22}$.

由于 Rt$\triangle HKO$ 和 Rt$\triangle HCG$ 有一锐角是公共的，故$\triangle HKO \backsim \triangle HCG$. $\therefore OK=\dfrac{HO\cdot GC}{HG}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot 2}{\sqrt{22}}=\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$，即点 $B$ 到平面 $EFG$ 的距离为$\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

## 习题 16.1

1. 选择题

（1）给出长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，下列 12 条直线：$AB'$，$BA'$，$CD'$，$DC'$，$AD'$、$DA'$，$BC'$，$CB'$，$AC$，$BD$，$A'C'$，$B'D'$中，有多少对异面直线？(　　)

(A) 30 对　　(B) 60 对　　(C) 24 对　　(D) 48 对

（2）已知 3 个平面 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$，每两个平面之间的夹角都是 $\theta$，且 $\alpha\cap\beta=a$，$\beta\cap\gamma=b$，$\gamma\cap\alpha=c$. 若有命题甲：$\theta>\frac{\pi}{3}$；命题乙：$a$，$b$，$c$ 相交于一点，则(　　).

(A) 甲是乙的充分条件但不必要　(B) 甲是乙的必要条件但不充分

(C) 甲是乙的充分必要条件　　(D) (A)，(B)，(C)都不对

（3）在图 16.1-11 所示的长方体中，$\angle DHG=45°$，$\angle FHB=60°$，则$\angle BHD$ 的余弦为(　　).

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

(C) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

(E) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

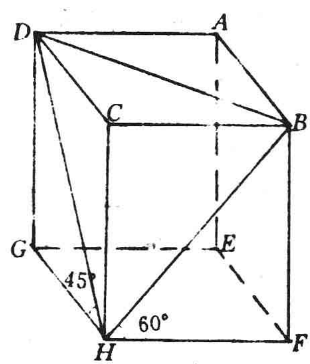

图 16.1-11

2. 已知两异面直线 $a$，$b$ 所成的角为 $\theta$，它们的公垂线 $A'A$ 的长度为 $d$. 在直线 $a$，$b$ 上分别取点 $E$，$F$，设 $A'E=m$，$AF=n$. 求 $EF$ 的长($A'$ 在直线 $a$ 上，$A$ 在直线 $b$ 上).

3. 长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中 $AB_1$ 与 $A_1D$ 所成的角为 $\alpha$，$AC$ 与 $BC_1$ 所成的角为 $\beta$，$A_1C_1$ 与 $CD_1$ 所成的角为 $\gamma$. 求证：$\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

4. 已知边长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，$AC_1$ 是对角线，$M$，$N$ 分别是 $BB_1$，$B_1C_1$ 的中点，求 $DP$ 与 $AC_1$ 的距离.

5. 已知四面体 $S\text{-}ABC$ 中，

$$\angle ASB=\frac{\pi}{2},\angle ASC=\alpha\ (0<\alpha<\frac{\pi}{2}),\angle BSC=\beta\ (0<\beta<\frac{\pi}{2}),$$

以 $SC$ 为棱的二面角的平面角为 $\theta$. 求证：$\theta=\pi-\arccos(\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta)$.

6. 在棱长都相等的四面体 $A\text{-}BCD$ 中，$E,F$ 分别为棱 $AD$、$BC$ 的中点，连接 $AF$、$CE$.

(1) 求异面直线 $AF$、$CE$ 所成角的大小.

(2) 求 $CE$ 与底面 $BCD$ 所成角的大小.

7. 正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的底面边长等于 $a$，正四面体 $MNPQ$ 顶点 $M$、$N$ 在直线 $C_1B$ 上，顶点 $P$、$Q$ 在直线 $A_1C$ 上. 求三棱柱的高和四面体对棱间的距离.

8. 长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的对角线与 3 条和它不相交的棱之间的距离分别为 $2\sqrt{5}$，$\frac{30}{\sqrt{13}}$，$\frac{15}{\sqrt{10}}$. 求此长方体的体积.

## § 16.2 截面、射影、折叠与展开

本节讨论立体几何中的几个典型问题.

### 1. 截面

截面问题包括作图和计算两个方面. 处理截面问题一般分为 3 个步骤：定位、定形、定量.

**例 1** 在单位正方体 $A\text{-}C_1$ 中，$M$、$N$、$P$ 分别是棱 $B_1C_1$、$C_1D_1$、$D_1D$ 的中点. 求过 $M$、$N$、$P$ 三点的平面与正方体相截所得截面的面积.

**解** 第一步：定位. 如图 16.2-1，截面 $MNP$ 与上底面交于 $MN$，则 $MN$ // 下底面. 截面与右侧面 $CD_1$ 交于 $NP$，因为 $NP$ 不平行于下底面，所以 $NP$ 与下底面有一个交点，在右侧面 $CD_1$ 上延长 $NP$ 交 $CD$ 的延长线于 $F$，则 $F$ 就是 $NP$ 与下底面的交点，也是截面与下底面的一个公共点. 于是下底面与截面交于过 $F$ 的直线，且与 $MN$ 平行. ∵ $MN$ // $B_1D_1$ // $BD$，所以过 $F$ 作 $FG$ // $DB$，交