

高等学校試用教科書



結 构 力 学

JIEGOU LIXUE

中 册

湖南大学数学力学系工程力学教研組編

人 民 教 育 出 版 社

高等學校試用教科書



結 构 力 学

JIEGOU LIXUE

中 册

湖南大学数学力学系工程力学教研组編

人 民 教 育 出 版 社

本书是湖南大学工程力学教研组编写的，曾于1958、1959年分上、中、下三册先后出版。1961年4月間，經湖南大学、南京工学院、清华大学、唐山铁道学院、同济大学、天津大学、华东水利学院等校有关教师略加增、删、修改后再版。

此次再版，将原版下册弹性及塑性理論部分的内容划出，并重新划分为上、中、下三册。上册讲述靜定结构的内力分析和变位計算；中册包括超靜定结构的两类基本分析方法——力法和变位法；下册包括刚架分析的其他方法，极限荷載的計算，结构弹性稳定的計算和结构动力学基础。在超靜定结构的内力分析部分，本书着重介紹力法和变位法两类基本方法，并介紹了刚架的近似計算法，弯矩分配法和一些其他計算法；另外，对超靜定桁架和桁梁混合结构的近似計算也作了一些介紹。

本书可作高等工业学校土建、水利类专业“结构力学”課程的試用教科书，也可供有关工程技术人员参考。

本书原版系由湖南大学原结构力学教研组教师周澤西、俞集容、楊蕪康和原在湖南大学工作现为长沙铁道学院教师李廉鋳、张圻宇集体討論分工执笔并交互修改而成。

结 构 力 学

中 册

湖南大学数学力学系工程力学教研组編

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

京 华 印 书 局 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一書号 15010·795 开本 850×1168 $1/32$ 印張 8 $1/16$

字数 192,000 印数 20,001—22,500 定价(7) ¥0.95

1959年8月第1版 1961年6月(修訂本)第2版 1961年10月北京第5次印刷

中册目录

第十章 超靜定結構的一般概念	259
§ 10-1. 概述	259
§ 10-2. 超靜定次數的決定	260
§ 10-3. 超靜定結構的特性	266
§ 10-4. 超靜定結構的計算方法	268
第十一章 力法原理	269
§ 11-1. 力法的典型方程式	269
§ 11-2. 溫度變化對超靜定結構的影響	275
§ 11-3. 支座位移對超靜定結構的影響	277
§ 11-4. 力法計算的校核	280
第十二章 用力法計算複雜剛架的簡化方法	287
§ 12-1. 概述	287
§ 12-2. 基本結構的合理選擇	289
§ 12-3. 剛臂的引用	293
§ 12-4. 彈性中心法	295
§ 12-5. 未知力分組	300
§ 12-6. 複雜剛架的分析實例	307
第十三章 連續梁的計算	317
§ 13-1. 連續梁的概念	317
§ 13-2. 荷載作用下連續梁的計算, 三彎矩方程式	318
§ 13-3. 連續梁在支座位移下的三彎矩方程式	328
§ 13-4. 連續梁在溫度變化下的三彎矩方程式	329
§ 13-5. 彎矩定點法	329
§ 13-6. 連續梁影響綫的繪制	336
§ 13-7. 用機動法作連續梁影響綫的概念	346
§ 13-8. 最大、最小彎矩圖(彎矩範圍圖, 包絡圖)	349
第十四章 超靜定拱的計算	355
§ 14-1. 概述	355
§ 14-2. 超靜定拱的軸綫選擇	357
§ 14-3. 無鉸拱截面的變化規律	358
§ 14-4. 對稱無鉸拱的基本結構	360
§ 14-5. 無鉸拱在恒載作用下的計算	331

§ 14-6. 无铰拱的影响綫	374
§ 14-7. 温度改变和混凝土收縮时无铰拱的計算	386
§ 14-8. 支座位移影响下的計算	388
§ 14-9. 拋物綫无铰拱的解析法	390
§ 14-10. 双铰拱的計算	394
第十五章 超靜定桁架和桁梁混合結構	398
§ 15-1. 概述	398
§ 15-2. 超靜定桁架的計算法則	399
§ 15-3. 超靜定桁架在靜荷載作用下的計算实例	403
§ 15-4. 超靜定桁架的影响綫	409
§ 15-5. 多重腹杆桁架的近似計算	415
§ 15-6. 桁梁混合結構	420
第十六章 变位法	424
§ 16-1. 单跨超靜定梁的角变位移方程式	424
§ 16-2. 变位法的基本未知数	433
§ 16-3. 变位法的基本內容	436
§ 16-4. 用变位法計算有斜柱的簡單剛架	446
§ 16-5. 变截面剛架計算的概念	449
§ 16-6. 具有 $EJ = \infty$ 的橫梁的剛架計算	456
§ 16-7. 温度影响的計算	460
§ 16-8. 对称性的利用	463
§ 16-9. 弯矩分配的概念	467
§ 16-10. 二次力矩分配法—变位法的簡化	471
§ 16-11. 以旋轉力矩为未知数的变位法典型方程式	476
§ 16-12. 变矩分配法	479
§ 16-13. 有綫变位的剛架的計算	482
§ 16-14. 联合法	495
§ 16-15. 混合法	497
§ 16-16. 用变位法計算剛架的影响綫	501
§ 16-17. 計算剛接金屬桁架的概念	510

第十章 超靜定結構的一般概念

§ 10-1. 概述

在任意的荷載作用下，不是所有的內力和反力均可由靜力平衡方程式求出的結構，称为超靜定結構。在計算这种結構的时候，还必须考虑变形条件。

如曾經指出过的：超靜定結構在几何构造上的特征是具有贅余的联系。对于一个結構，在保證它的几何不变性的前提下，可以同时去掉的联系的最大数量，称为它的贅余联系的数量。例如圖 10-1 的梁，在不破坏梁的几何不变性的情况下，最多可以同时去掉两根鏈杆，所以这梁的贅余联系数量为 2。对于圖 10-2 的桁架，最多可以同时去掉四根鏈杆，而不致破坏它的几何不变性，所以这桁架的贅余联系数量为 4。

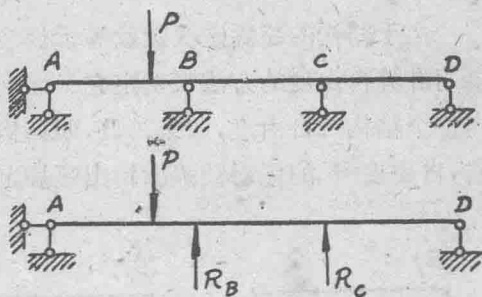


圖 10-1.

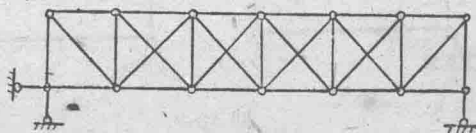


圖 10-2.

如果一个結構有 n 个贅余联系，那末在去掉这 n 个贅余联系之后，我們將得到一个靜定結構。假若我們能設法根据变形条件

求出贅余联系上的力,并用它們来代替贅余联系的作用,則此后的計算显然与靜定結構的計算将不再有任何区别。象圖 10-1 中的梁,如果我們能将 B 、 C 两支座鏈杆的反力 R_B 、 R_C 求出,并用它們代替 B 、 C 两支座的作用,則全梁的内力分布情况均可由靜力平衡方程式确定了。所以贅余联系的存在是結構具有超靜定性的必要的和充分的特征。

由于每一个贅余联系都对应着一个贅余力,放在具有 n 个贅余联系的結構上面就有 n 个贅余力存在,因而这贅余联系的数量也就反映了結構的超靜定次数。

§ 10-2. 超靜定次数的决定

由于結構的超靜定次数就等于贅余联系的数量,因此我們可以用計算自由度的方法来确定它。运用公式 $W = 3\mathcal{A} - 2\mathcal{M} - C_0$ 算出整个結構的自由度,如果为負,則結構具有贅余联系而为超靜定的,自由度 W 的絕對数值即指出超靜定的次数。

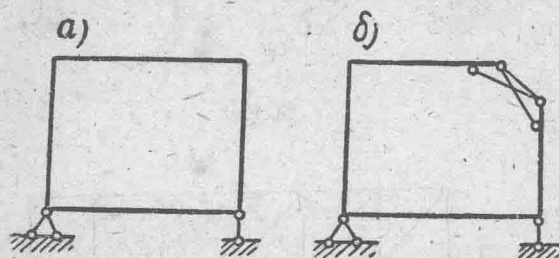


圖 10-3.

应该注意,只有当 $\mathcal{A}$ 个剛片中沒有一个剛片本身具有贅余联系的情况下,按上述公式計算超靜定次数才是正确的。例如圖 10-3, a 所示的閉

合剛架,如果直接按公式計算将有:

$$\mathcal{A} = 1, \mathcal{M} = 0, C_0 = 3,$$

所以 $W = 3 \times 1 - 3 = 0$ 。

显然这是不对的,因为这个剛架的内力單由靜力平衡条件决不可

能知道,故肯定不是靜定的。那末,計算結果不正確,原因在那兒呢?這就在於這個剛片本身具有贅餘聯系。如果將其某一剛接處看作是由三根鏈杆聯結起來的,象圖 10-3,6 所示那樣,這就幾何構造來說,顯然與前者並無區別。在計算自由度的時候,將這三根鏈杆計入剛片數 $\mathcal{A}$ 中,這樣每一個剛片本身就不再具有贅餘聯系。這時將有:

$$\mathcal{A} = 1 + 3 = 4,$$

$$\mathcal{M} = 6, C_0 = 3.$$

所以

$$W = 3 \times 4 - 2 \times 6 - 3 = -3.$$

由此可知:任何具有封閉外形的框格的超靜定次數不是等於零而是等於三。

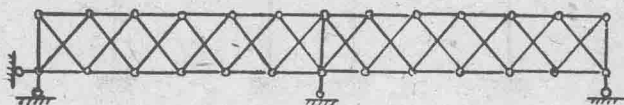


圖 10-4.

對於鉸接鏈杆結構——桁架,如第二章中所述及的一樣,運用公式 $W = 2y - C - C_0$ 將較方便。如圖 10-4 所示桁架,

$$y = 26;$$

$$C = 51;$$

$$C_0 = 4;$$

所以

$$W = 2 \times 26 - 51 - 4 = -3.$$

故知該桁架的超靜定次數等於三。

上述用計算自由度的方法來確定超靜定次數並不是很方便。通常是採取直接去掉贅餘聯系,使結構變成靜定結構的方法來確定超靜定次數。

在結構上去掉贅餘聯系的方法,總不外乎由下列幾種基本方式所組成:

- 1) 去掉一根鏈杆, 相当于去掉一个联系(圖 10-5)。
- 2) 于剛接处作一切口, 相当于去掉三个联系(圖 10-6)。
- 3) 去掉一个單鉸, 相当于去掉两个联系(圖 10-7); 去掉一联结 n 杆的复鉸, 相当于去掉 $2(n-1)$ 个联系(圖 10-8)。

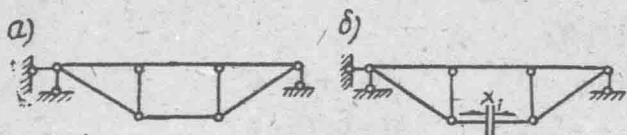


圖 10-5.

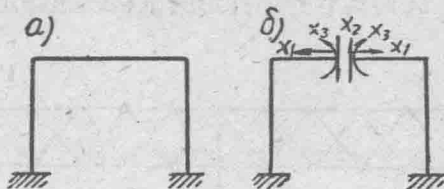


圖 10-6.

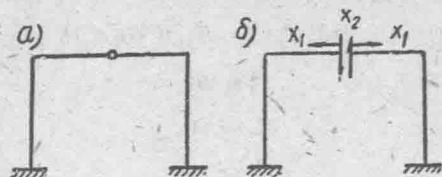


圖 10-7.

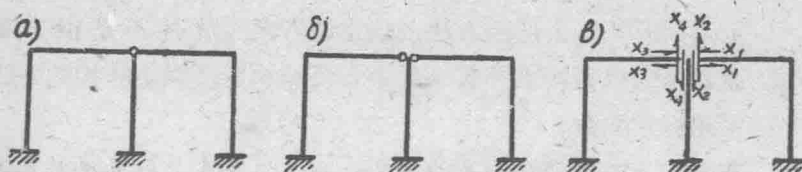


圖 10-8.

4) 改剛接為單鉸联接, 相當於去掉一個联系(圖 10-9); 改 n 杆相交的剛節點為鉸節點, 相當於去掉 $(n-1)$ 个联系(圖 10-10)。

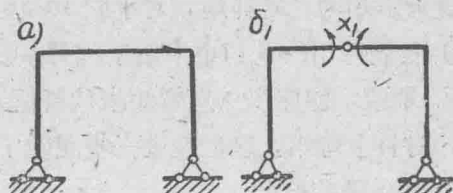


圖 10-9.

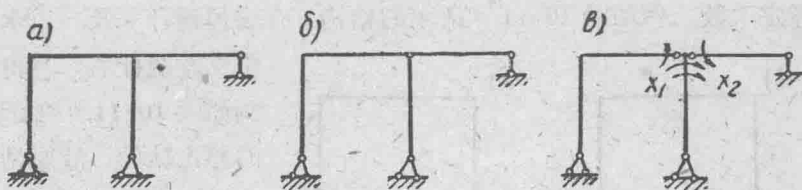


圖 10-10.

對於以上的說法, 根據計算自由度的理論, 我們當不難理解。

前面說過, 每一個贅余联系, 對應着一個贅余力, 這在簡單情形下是很容易看出的, 但是象圖 10-8 和圖 10-10 所示的情形, 這一关系初學者則往往不容易弄清楚。象圖 10-8 去掉復鉸的情形, 很容易導致這樣的想法: 在每一根杆件端頭去掉鉸的地方, 將應有兩個未知力代替其作用, 這樣 n 根杆件上將共有 $2n$ 个未知力存在。但必須指出: 在該鉸節點處具有兩個靜力平衡條件 $\sum X=0$ 和 $\sum Y=0$, 因此 $2n$ 个未知力當中實際就只有 $2n-2=2(n-1)$ 个獨立未知力。這就說明了該復鉸確與 $2(n-1)$ 个贅余联系相當, 這樣來理解這一問題是够清楚了。但如何恰當地加上贅余力, 對初學者仍然是一件較困難的事, 因此在這裡, 將再進一步加以闡明, 我們可首先以 $(n-1)$ 个單鉸來代替該復鉸(如圖 10-8, б 所示, 在節點左右兩邊各用一單鉸代替原來的復鉸), 然後再將這 $(n-1)$ 个

單鉸去掉，而以力代替其作用（圖 10-8, σ ）。由于每一个單鉸都对应于水平和豎直的两个贅余分力，这样将毫无困难地加上相对应的 $2(n-1)$ 个贅余未知力。同样地，对于圖 10-10 改为鉸接的情况（圖 10-10, δ ），我們可用 $(n-1)$ 个單鉸来代替該复鉸（圖 10-10, ϵ ），由于每改用一單鉸，即应以一对弯矩来代替原来的剛接作用，故总共有 $(n-1)$ 对贅余弯矩，这也就进一步說明了改用一复鉸确与去掉 $(n-1)$ 个贅余联系相当。

运用上述去掉联系的基本方式，我們可以确定任何結構的超靜定次数。例如圖 10-11, a 所示的結構，在去掉鏈杆 s 及一个水平

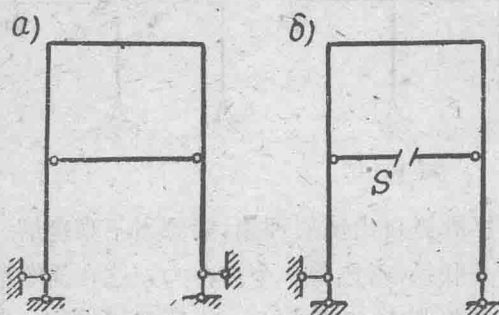


圖 10-11.

平支座鏈杆后，將得到如圖 10-11, b 所示的靜定結構，故原結構为一两次超靜定結構。應該注意：对于同一結構我們可用各种不同的方案去掉贅余联系。例如对于圖 10-12, a 所示結構，我

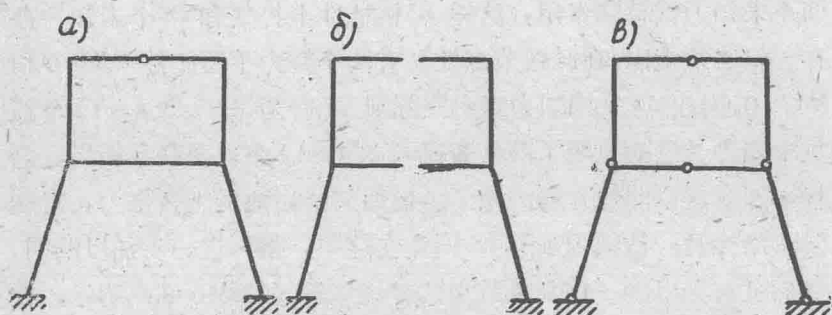


圖 10-12.

們可以去掉一單鉸及作一切口后得到如图 10-12, 6 所示的靜定結構。另外也可用加入五个單鉸的方法得到如图 10-12, 6 所示的靜定結構, 此外, 還可選擇多種不同的方案。

對於由超靜定結構去掉贅余联系后所獲得的靜定結構, 我們稱之為原有結構的基本結構。同一結構固然可用多種不同方案去掉贅余联系而得到不同型式的基本結構, 但是去掉联系也并非完全任意的。有些联系固然可以任意去掉, 但另外一些联系却絕對不能撤去, 否則便無法保證其幾何不變性。例如图 10-11, a 所示的結構, 其水平支座鏈杆可以任意去掉一個, 而兩豎直支座鏈杆却絕對不能去掉。我們稱前一種联系為條件需要的, 而后一種則為絕對需要的。

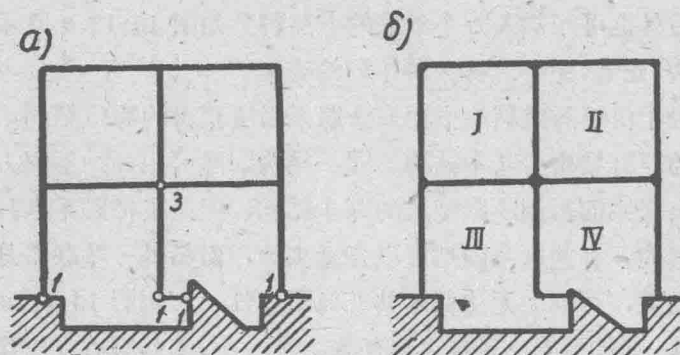
絕對需要的联系的靜力特征在於它的內力可以由靜力平衡條件求出。這是因為原結構在去掉該絕對需要的联系后, 就成為幾何瞬變的了。如以未知力代替此联系的作用, 根據可能位移原理, 不難成立平衡力系的可能功方程式來解算它。而條件需要的联系的內力則必需考慮變形條件方可求得。

對於具有較多的框格型式的結構, 我們還可利用封閉框格和單鉸復鉸的特性, 建立公式來計算超靜定次數。其法是先將結構上所有鉸接處暫時視作剛接的, 而數出結構上由此形成的封閉框格數 n , 如前所述, 每一封閉框格的超靜定次數等於三, 故整個結構的超靜定次數等於 $3n$, 然後再在本為鉸接的地方將剛接改回為鉸接, 並計算此時的單鉸數目 III (一復鉸須化為 $(n-1)$ 個單鉸), 由此可導出計算原有結構的超靜定次數 I 的公式如下:

$$I = 3n - III. \quad (10-1)$$

例如图 10-13, a 所示的結構, 我們先將各鉸接處改為剛接 (图 10-13, 6), 算得封閉框格數目 $n=4$, 然後再算出原結構的單鉸數目 $III=7$, 因此按照公式 10-1 求得的超靜定次數如下:

$$I = 3 \times 4 - 7 = 5.$$



羅馬數字表示封閉框格的號次，阿拉伯數字表示單鉸數目
圖 10-13.

§ 10-3. 超靜定結構的特性

超靜定結構具有下面幾個重要的特性：

1) 在外在因素的作用下，單就滿足平衡條件而言，超靜定結構可以具有無限多的解答。因為如果我們將贅餘聯系去掉使結構變成靜定的基本結構，並將贅餘力 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 當作外力作用上去，它們和已知的荷載一起組成基本結構的全部荷載。顯然不論力 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是怎樣的數值，均可保證平衡，而有相應的解答。由此可見滿足平衡條件的解答確有無限多個；單從平衡條件來確定超靜定結構的內力和反力是不可能的。

2) 在滿足平衡條件之外，若再加上變形條件，則超靜定結構的解答仍然是唯一的。這也就是說超靜定結構的內力和反力必須考慮變形才能求出，故與結構的材料性質及幾何尺寸有關。

3) 在超靜定結構中，溫度變化、支座位移、製造誤差等均將引起內力。這是因為由於這些因素所引起的結構的變形，在其發生過程中將遭到阻礙，因而相應地產生了內力。

如圖 10-14, a, b 所示結構，梁 0-3 上溫度發生變化，因而產生

變形。但在前者靜定結構中，其變形能自由發展，故不產生內力；而在後者超靜定結構中，由於杆 4-5 的存在，使變形的發展受到了一定的阻礙，因此也就引起了內力。

對於支座位移的情形，亦完全一樣。如圖 10-15, a, b 所示的梁，由於 B 支座位移引起了結構形狀的改變。但前者 B 支座位移是自由的，顯然 A-C 和 C-D 梁內不產生內力；而後者 B 支座的位移受到了 A-D 梁的牽制，故 A-D 梁內被引起內力。

4) 超靜定結構在贅余聯系被破壞以後，仍能維持幾何不變性；

而靜定結構若任一聯系被破壞，則立即喪失其幾何不變性。這一區別對於這兩類結構賦有重要的實際意義，導使我們不同地處理兩類結構中個別杆件允不允許承受過度應力的問題，以及不同地估計整個結構的安全係數。從軍事防禦觀點來說，超靜定結構一般比靜定結構有更大的防禦能力。

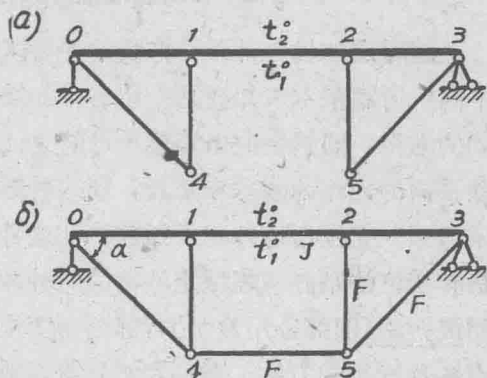


圖 10-14.

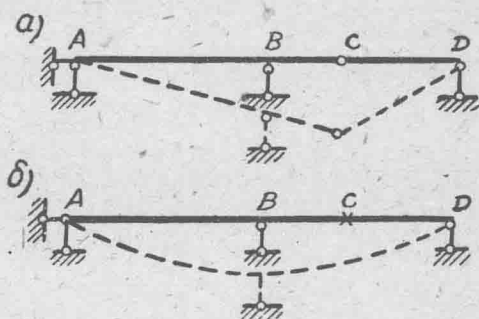


圖 10-15.

§ 10-4. 超靜定結構的計算方法

超靜定結構各種計算方法的主要區別在於基本未知數的選擇不同。所謂基本未知數是指所有未知數中的那一部分，即通過它們的求得，則其餘的未知數均可隨之而解出。假若我們採取贅餘聯系內的力作為基本未知數，則這種計算方法稱為力法；假若是採取某些變位作為基本未知數，則這種計算方法稱為變位法。力法和變位法是計算超靜定結構的兩種最基本的方法。此外還有所謂混合法，即部分用贅餘力，部分用變位作為基本未知數。當然還有各種變相的方法。今後我們只着重地研究最基本、最主要的計算方法，也適當地介紹某些其他的計算方法。

第十一章 力法原理

§ 11-1. 力法的典型方程式

前面曾經指出过：超靜定結構的內力和反力單憑靜力平衡條件是不可能求得的，還必須考慮結構的變形條件才能解決，而且結構的超靜定次數就等於贅餘聯系的數目。如果我們將所有的贅餘聯系去掉，而代以相應的贅餘力，並設法找出它們的數值，則剩下的問題就完全可用靜力平衡條件來解決。這種採用贅餘聯系上的力作為基本未知數的計算方法就稱為力法。

為了闡明這一方法的基本精神，讓我們用圖 11-1, a 所示的三次超靜定剛架作為研究的例子。先將固定支座 A 去掉，得到基本結構如圖 11-

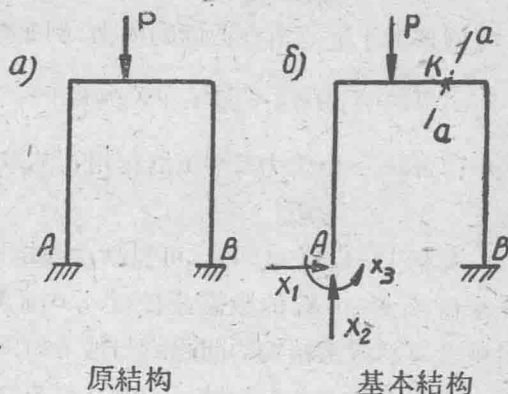


圖 11-1.

1, b 所示，並用贅餘力 X_1, X_2, X_3 來代替被去掉的聯系的作用。顯然此基本結構在荷載 P 及贅餘力 X_1, X_2, X_3 共同作用之下所產生的內力及變位，將與原來超靜定結構中所有的完全相同。

茲以結構上 k 點沿 $a-a$ 方向上的變位為例，顯然將有：

$$\Delta_k = \Delta_{k1} + \Delta_{k2} + \Delta_{k3} + \Delta_{kp}.$$

式中： Δ_k ——原結構上 k 點沿 $a-a$ 方向所產生的變位。

Δ_{ki} ——由于力 X_i 使基本結構上 K 点沿 $a-a$ 方向所产生的变位 ($i=1, 2, 3, \dots$)。

Δ_{kp} ——由于荷載使基本結構上 K 点沿 $a-a$ 方向所产生的变位。

倘若該結構具有 n 个贅余未知力的話，則有

$$\Delta_k = \Delta_{k1} + \Delta_{k2} + \Delta_{k3} + \dots + \Delta_{kn} + \Delta_{kp}.$$

此式并可写成：

$$\Delta_k = X_1\delta_{k1} + X_2\delta_{k2} + X_3\delta_{k3} + \dots + X_n\delta_{kn} + \Delta_{kp}. \quad 11-1$$

式中： δ_{ki} ——由于力 $X_i=1$ 使基本結構上 K 点沿 $a-a$ 方向所产生的变位。

同理对于 k 点所在截面的內力，例如弯矩 M_k 将有：

$$M_k = X_1\bar{M}_{k1} + X_2\bar{M}_{k2} + X_3\bar{M}_{k3} + \dots + X_n\bar{M}_{kn} + M_{kp}, \quad 11-2$$

式中： $\bar{M}_{ki}$ ——由于力 $X_i=1$ 的作用，基本結構 K 截面上所产生的弯矩。

观察 11-1, 11-2 两式，可見欲求該結構上的变位和內力，只須先求得 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的数值，因为 $\delta_{ki}, \Delta_{kp}, \bar{M}_{ki}, M_{kp}$ 是可知的，因此目前計算超靜定結構的問題就归結为如何寻求此 n 个贅余力的数值。而要找此 n 个未知数值，就必须成立 n 个方程式。根据第十章所指出：超靜定結構的內力和反力必須考虑变形条件才能求出，故不难知道：若从原結構上找得 n 个已知的变形条件，列出 n 个变形方程式来，即可求得此 n 个贅余力的数值。

在圖 11-1 中所示的三次超靜定剛架，支座 A 处原是固定的，这就是說，在那些去掉联系而用贅余未知力代替的地方，其变位是已經知道的。在目前情況下，就是 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 均等于零。故根据式 11-1 我們将有