工程数学

第二版

○主编　侯风波

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

工 程 数 学

Gongcheng Shuxue

第二版

主　编　侯风波
副主编　蔡谋全　蔡建功
编　者　毛羽强　唐世星　赵红然

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容摘要

本书是在侯风波教授主编的普通高等教育“十五”国家级规划教材《工程数学》的基础上，结合高等职业院校培养应用型人才的需要，在充分研究当前我国高职高专大众化发展趋势下的教育现状，认真总结、分析、吸收全国高职高专院校工科类各专业工程数学教学改革经验的基础上编写的。其内容包括行列式与矩阵、线性方程组、概率论、数理统计、复变函数、拉普拉斯变换及傅里叶变换、线性规划、用Mathematica做工程数学共8章。本书特别注重培养学生用数学概念、数学思想、数学方法消化吸收工程概念、工程原理的能力，把实际问题转化为数学模型的能力，利用计算机求解数学模型的能力。

本书可作为高职高专工科类各专业工程数学课程的教材，也可作为高职院校学生数学建模知识的补充教材，还可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/侯风波主编. —2版. —北京:高等教育出版社,2013.1

ISBN 978-7-04-035539-0

Ⅰ.①工… Ⅱ.①侯… Ⅲ.①工程数学-高等学校-教材 Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第308172号

策划编辑 崔梅萍　责任编辑 崔梅萍　封面设计 张雨微　版式设计 童 丹
插图绘制 黄建英　责任校对 刘 莉　责任印制 赵义民

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	北京鑫海金澳胶印有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　本	850mm×1168mm 1/16		
印　张	17.5	版　次	2004年7月第1版
字　数	330千字		2013年1月第2版
购书热线	010-58581118	印　次	2013年1月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	31.00元(含光盘)

物 料 号 35539-00

第二版前言

本书是在侯风波教授主编的普通高等教育“十五”国家级规划教材《工程数学》的基础上，结合高职院校培养应用型人才的需要，在认真总结、分析、吸收全国高职高专院校工科类各专业工程数学教学改革经验的基础上编写的。

《工程数学》（第一版）的出版已经8年。在这8年中有许多高职高专院校使用此书作为工程数学课程教材或者是数学建模课程教材。期间，有许多教师希望结合当前高职高专院校生源变化以及人才培养目标的优化尽快对本教材进行修订完善，并对本教材的进一步完善提出了许多有益的建议，在此，一并表示深深的感谢！

本书的内容包括行列式与矩阵、线性方程组、概率论、数理统计、复变函数、拉普拉斯变换和傅里叶变换、线性规划、用 Mathematica 做工程数学共8章。

本书特别注重培养学生用数学概念、数学思想、数学方法消化吸收工程概念、工程原理的能力；把实际问题转化为数学模型的能力；利用计算机求解数学模型的能力；结合具体教学内容培养学生的思维能力。

如果数学课程学时较少，建议以选修课的方式使用本书作为数学建模课程补充教材。

本书修订过程中，在保持《工程数学》（第一版）深受大家欢迎且有较强适应性的内容相对稳定的前提下，主要做了如下工作：

1. 删掉了一些难度较大的知识点及其对应的例题、习题；
2. 增补了傅里叶变换及线性规划两部分内容；
3. 增补了一些与知识点对应的易于理解的例题；
4. 书后增补了习题答案；
5. 书后附上了《工程数学教学系统》（光盘），提供了本书的电子教案及全部习题详细解答。

本书框架结构设计及统稿由承德石油高等专科学校侯风波教授完成，参加本书编写的还有蔡谋全（承德石油高等专科学校）、蔡建功（河北石油职业技术学院）、毛羽强（承德石油高等专科学校）、唐世星（承德石油高等专科学校）、赵红然（河北石油职业技术学院）。

在本书出版过程中，得到了高等教育出版社崔梅萍和王玲玲两位编辑的大力支持与帮助，在此表示真挚的感谢！

编者

2012年冬

第一版前言

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，是教育部新世纪高职高专教育高等数学课程内容、体系改革与建设项目研究成果，是在充分研究当前我国高职高专大众化发展趋势下的教育现状，认真总结、分析、吸收全国高职高专院校工科类专业工程数学教学改革经验的基础上编写的。根据高职高专教育人才培养目标和教育部新修订的《高职高专教育高等数学教学基本要求》优选教学内容。内容包括行列式与矩阵、线性方程组、概率论、数理统计、复变函数、积分变换、用 Mathematica 做工程数学，共七章。本书特别注重培养学生用数学概念、思想、方法消化吸收工程概念、工程原理的能力；把实际问题转化为数学模型的能力；利用计算机求解数学模型的能力。

本书以满足高职高专院校工科类专业工程数学教学需要为目标；在教学水平、科学水平、思想水平上符合人才培养目标及本课程教学基本要求；取材合适、深度适宜、分量恰当；符合认知规律，富有启发性，便于学习，有利于激发学生学习兴趣及各种能力的培养。本书还有如下特色：

1. 在本书第七章介绍了用 Mathematica 做工程数学，有利于培养学生用计算机及相应数学软件包求解数学模型的能力；

2. 在保证数学概念准确的前提下，尽量借助于几何直观，力求使抽象的数学概念形象化，便于读者理解；

3. 注重数学概念与实际问题的联系，特别是与工程问题的联系，例题丰富，便于学习；

4. 结合具体内容进行数学建模训练，注重双向“翻译”能力的培养；

5. 理论推导或证明以解释清楚有关结论为度，不追求理论上的系统性；

6. 行列式采用归纳定义法，避开了逆序数定义法，适合高职高专学生学习的特点；

7. 对矩阵乘法，先引入行向量左乘列向量，再介绍两个矩阵的乘法，便于学生接受；

8. 概率论与数理统计以应用为主线，概率内容取舍以能满足统计需要为度；

9. 课程的每一主题都尽量从几何、数值、代数三方面加以体现。

10. 通过访问本书主编所负责的网络课程（http://hve.hep.com.cn）可获得本书习题的全部答案及学法教法建议。

工程数学是高职高专学校工科类专业必修的一门重要的基础课程。它对培养、提高学生的思维素质、创新能力、科学精神、治学态度以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。

致教师：

工程数学中每一个重要概念都有其实际背景。从实际问题出发引出概念可激发学生的求知欲，提高教学效果。教师的教学活动表面上以完成教学基本要求（或教学大纲）中所规定的知识点的教学为目标，实质上，结合人才培养目标去思考、确定课程的知识、能力、素质的具体培养目标才更有现实意义。高职高专教育以培养应用型人才为教育目标。那么，作为支持高职高专教育应用型人才培养目标的重要课程——工程数学课程应该具体培养学生哪些方面的能力？学数学是为了用数学。这是人人都接受的观点。那么，用到哪儿？怎么用？却仁者见仁，智者见智。而诸如工程数学要为学习后继课服务，要为培养

学生的思维能力服务，要为获得新知识服务，要为处理实际工程中的相关问题服务等均在一定程度上引起了共识。但是，在一定程度上也存在着争议。通过多年的教学研究与实践，我们认识到：高职高专院校工科类专业的数学教育必须培养学生如下四方面的能力：一是用数学思想、概念、方法消化吸收工程概念和工程原理的能力；二是把实际问题转化为数学模型的能力；三是求解数学模型的能力；四是进行创造性思维的能力。培养用数学思想、概念、方法消化吸收工程概念和工程原理的能力，必须重视数学概念的教学；培养学生把实际问题转化为数学模型的能力，必须重视数学建模训练；培养学生求解数学模型的能力，必须结合数学软件包进行数学教学。另外，数学是最好的思维体操，作为数学教师应有意识地去结合教学内容培养学生的逻辑思维、类比思维、发散思维及联想思维等各种思维能力，帮助他们欣赏数学美。进而培养学生的创新能力。这些都是我们在教学中努力尝试的。在本书的编写过程中，也试着将这些观点与有关内容适度结合，但做得还远远不够。愿我们在今后的教学实践中共勉。

致学生：

为什么要学习工程数学？工程数学是学习后继课程的基础，是打开科学大门的钥匙，是高科技的核心。数学是主要研究现实世界中数量关系与空间形式的科学。现实世界中，凡是涉及量的大小，量的变化，量与量之间的关系，都要用到数学。客观世界中一切实在的物体都有形。因此，宇宙之大，粒子之微，光速之快……无处不用数学。要想实在地学到并掌握专业知识，必须掌握数学。

在学习工程数学过程中，必须特别注意如下 4 方面的问题：(1) 要认真听课。同一个问题听老师讲懂要比自己看明白容易得多。(2) 要善于记笔记。俗话说，好记性不如烂笔头。(3) 要认真规范地做作业。这样不但有助于对所学知识的复习巩固，而且还有助于培养训练严谨认真的工作作风。(4) 要善于用数学软件包 Mathematica 在计算机上求解数学模型，以训练用数学解决实际问题的能力。

本书可作为高职高专工科类各专业工程数学课程的教材，也可作为工程技术人员的工程数学知识更新教材。

本教材的基本教学时数不少于 50 学时，适用于二年制高职高专院校使用；标有 * 号的内容需要另行安排 30 学时，适用于三年制高职高专院校使用。

参加本书编写的有侯风波(承德石油高等专科学校)、张学奇(承德石油高等专科学校)、相秀芬(承德石油高等专科学校)、孟庆才(河北工程技术高等专科学校)、杨建法(石家庄铁路职业技术学院)、刘清贵(石家庄职业技术学院)、吴素敏(石家庄职业技术学院)、王建军(上海应用技术学院)、高小明(番禺职业技术学院)、范书香(北京联合大学)、毛羽强(承德石油高等专科学校)。全书框架结构、统稿、定稿由侯风波承担。

教育部新世纪高职高专教育高等数学课程内容、体系改革与建设项目组(宣立新、任开隆、陈洪、朱卓宇、王建军)认真审阅了本书的全部原稿，提出了许多有价值的意见。在此，编者对上述专家的辛勤劳动表示衷心的感谢。

由于水平所限，时间也比较仓促，本书难免有不足之处，敬请读者斧正。

编　者

2003 年 12 月 30 日

目　　录

第一章

行列式与矩阵

行列式与矩阵均是线性代数中的重要概念，在许多领域都有重要的应用．本章将分别介绍行列式与矩阵的概念、性质及其相关的运算．

第一节　行列式的定义

在初等代数中，为便于求解二元线性方程组，引进了二阶行列式，为了研究一般的 n 元线性方程组，需要把二阶行列式加以推广．本章我们先复习二阶行列式，然后给出 n 阶行列式的概念、基本性质及其应用，并介绍常用的几种计算 n 阶行列式的方法，最后介绍用行列式解线性方程组的一种重要方法——克拉默法则．

一、二元一次方程组与二阶行列式

引例 1　二阶行列式与二元一次方程组．

在求解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

时，曾将 x_1 和 x_2 的 4 个系数组成的算式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 简记成 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.1.2}$$

算式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式，其中的数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为该行列式的元素，每个横排称为行列式的行，每个竖排称为行列式的列．此时，a_{ij} 的第一个下标 i 表示它位于第 i 行，第 2 个下标 j 表示它位于第 j 列，即 a_{ij} 是位于行列式第 i 行与第 j 列相交处的一个元素．通常又称(1.1.2)式等号右边的式子 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 为二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的展开式．

若分别记

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.1.3}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}, \tag{1.1.4}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}, \tag{1.1.5}$$

则当 $\Delta\neq0$ 时，对于二元一次方程组(1.1.1)，容易验证它的解为

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.6}$$

称 Δ 为二元一次方程组(1.1.1)的系数行列式. 行列式 Δ_1 是将系数行列式 Δ 中的第一列(第一未知元的系数列)换成了常数列，称其为二元一次方程组(1.1.1)的第一未知元行列式. 行列式 Δ_2 是将系数行列式 Δ 中的第二列(第二未知元的系数列)换成了常数列，称其为二元一次方程组(1.1.1)的第二未知元行列式.

例 1　计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix}7&3\\2&5\end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$.

解　(1) $\begin{vmatrix}7&3\\2&5\end{vmatrix}=7\times5-2\times3=35-6=29$;

(2) $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc.$

例 2　用行列式解方程组

$$\begin{cases}4x_1+6x_2=7,\\2x_1+8x_2=5.\end{cases}$$

解　方程组 $\begin{cases}4x_1+6x_2=7,\\2x_1+8x_2=5\end{cases}$ 的系数行列式、第一未知元行列式、第二未知元行列式分别为：

$$\Delta=\begin{vmatrix}4&6\\2&8\end{vmatrix}=4\times8-2\times6=32-12=20,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}7&6\\5&8\end{vmatrix}=7\times8-5\times6=56-30=26,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}4&7\\2&5\end{vmatrix}=4\times5-2\times7=20-14=6,$$

所以，

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{26}{20}=1.3,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{6}{20}=0.3.$$

二、n 阶行列式的定义

上面我们定义了二阶行列式,下面用递推法来定义 n 阶行列式.

定义 1　将 n^2 个数排列成 n 行 n 列(横的称行,竖的称列),并在左、右两边各加一竖线的算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称其为 n 阶行列式,一般记为 D_n. 该算式的计算规则如下:

(1) 当 $n=2$ 时,

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21};$$

(2) 当 $n>2$ 时,

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j},$$

其中数 a_{ij}称为第 i 行第 j 列的元素,$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素 a_{ij}的代数余子式,称 M_{ij}为 a_{ij}的余子式. M_{ij}为从 n 阶行列式 D_n 中去掉元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列后剩下的元素构成的 $n-1$ 阶行列式,即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 3　在三阶行列式

$$D_3=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 11 \\ -6 & 8 & 10 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

中,求元素 a_{12}的余子式 M_{12}和代数余子式 A_{12}.

解　元素 a_{12}的余子式 M_{12}是从 D_3中划去第 1 行和第 2 列的元素后剩下的元素构成的二阶行列式

$$M_{12}=\begin{vmatrix} -6 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix},$$

元素 a_{12} 的代数余子式是在余子式 M_{12} 前再乘上一个符号因子 $(-1)^{1+2}$,则

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} -6 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}.$$

由定义 1 可以看出，一个 n 阶行列式代表一个数值，这个数值等于该行列式中第 1 行所有元素与其对应的代数余子式积的和. 常将按该定义计算行列式简称为 n 阶行列式按第 1 行展开.

例 4　计算三阶行列式

$$D_3=\begin{vmatrix}-2 & -4 & 6\\ 3 & 6 & 5\\ 1 & 4 & -1\end{vmatrix}.$$

解　将 3 阶行列式 D_3 按第 1 行展开，有

$$\begin{aligned}D_3&=(-2)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6 & 5\\ 4 & -1\end{vmatrix}+(-4)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\\ &\quad 6\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 6\\ 1 & 4\end{vmatrix}\\ &=(-2)(-6-20)+4(-3-5)+6(12-6)\\ &=52-32+36\\ &=56.\end{aligned}$$

例 5　计算四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 15 & 1 & 0 & 2\\ 5 & 5 & 7 & 0\\ 6 & 4 & -2 & -1\end{vmatrix}.$$

解　由定义

$$\begin{aligned}D_4&=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & 7 & 0\\ 4 & -2 & -1\end{vmatrix}\\ &=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7 & 0\\ -2 & -1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}5 & 7\\ 4 & -2\end{vmatrix}\\ &=-7+2(-10-28)=-83.\end{aligned}$$

由例 5 的计算过程可知：第 1 行的零元素越多，在计算行列式时，按第 1 行展开计算就越简便.

思考题 1.1

1. 从行列式左上角到右下角的对角线称为该行列式的**主对角线**. 只在主对角线上有非零元素的行列式称为对角行列式. 试问：n 阶对角行列式的值与其对角线上的元素之积有何关系？

2. 只在主对角线和主对角线以上（下）有非零元素的行列式称为上（下）三角形行列式，试问：上（下）三角形行列式的值与其主对角线上的元素之积有何关系？

3. 指出下列行列式的名称（对角行列式，上三角形行列式，下三角形行列式），并计算其值.

(1) $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix}1&0&0&0\\4&2&0&0\\2&3&3&0\\1&2&2&4\end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&2&2&3\\0&0&3&2\\0&0&0&4\end{vmatrix}$.

习作题 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&1\\3&0&1\end{vmatrix}$.

2. 写出下面行列式中元素 a_{32} 的余子式及代数余子式：

$$\begin{vmatrix}3&5&-12&6\\10&0&-5&5\\9&18&15&-1\\1&8&0&20\end{vmatrix}.$$

3. 写出下面行列式中元素 a_{13} 的余子式及代数余子式：

$$\begin{vmatrix}a&b&-c&4\\b&-a&3&6\\c&5&-b&a\\b&0&24&b\end{vmatrix}.$$

4. 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&-1\\-7&5&2&0\\0&2&1&-1\end{vmatrix}.$$

第二节　行列式的性质与计算

从行列式的定义出发直接计算行列式是比较麻烦的，为了简化 n 阶行列式的计算，下面我们将进一步讨论 n 阶行列式的一些基本性质.

在讨论行列式的性质之前，我们先给出一个行列式的转置行列式的定义.

定义 1　将行列式 D 的行、列互换后，得到新的行列式 D^{T}，D^{T} 称为 D 的转置行列式. 即，如果

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

则

$$D^{T}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

一、行列式的性质

性质 1　行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{T}$.

对于二阶行列式可由定义直接验证:

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D_2^{T}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=D_2.$$

对于 n 阶行列式可用数学归纳法予以证明,此处从略.

这个性质说明:在行列式中行与列的地位是对称的. 这就是说,凡是对行列式的行成立的性质对列也成立.

例 1　对三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 20 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix},$$

验算行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

解

$$\begin{aligned} D&=3\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}-20\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}-5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &=-36-240+15=-261, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{T}&=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 20 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & 4 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 20 & 1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 20 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} \\ &=-36-85-140=-261. \end{aligned}$$

这就说明了本题中的行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

性质 2　互换行列式的任意两行(列),行列式仅改变符号.

如对二阶行列式,有

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}=a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}=-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

这就是说,二阶行列式互换两列后,其值仅改变一个符号.

对于 n 阶行列式,可用数学归纳法证明,此处从略.

例 2　设

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix},\quad \bar{D}=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

观察 D 和 $\overline{D}$ 的区别与联系,并计算它们的值.

解 行列式 D 的第 1 行与第 3 行互换后,得到行列式 $\overline{D}$. 由性质 2 得

$$\overline{D}=-D.$$

由于

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}0&5&1\\3&4&2\\-2&3&1\end{vmatrix}=5(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&2\\-2&1\end{vmatrix}+1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&4\\-2&3\end{vmatrix}\\&=-5\times7+1\times17\\&=-18,\end{aligned}$$

所以,$\overline{D}=-D=18$.

例 3 计算

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&2&3\end{vmatrix}.$$

解 注意到 D 中第 1 行和第 3 行是相同的,因此将这相同的两行互换,其结果仍是 D,而由性质 2 知交换两行的结果为 $-D$,因此 $D=-D$,即 $2D=0$,得 $D=0$.

推论 如果行列式有两行(列)的对应元素相同,则这个行列式等于零.

性质 3 n 阶行列式等于任意一行(列)所有元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

(1) n 阶行列式等于任意一行(第 i 行)所有元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\qquad(i=1,2,\cdots,n).$$

(2) n 阶行列式等于任意一列(第 j 列)所有元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\qquad(j=1,2,\cdots,n).$$

性质 3 指出:可按行列式的任一行(列)展开计算行列式的值,且计算结果唯一. 因此,在计算行列式的值时,应选择 0 最多的那一行(列)将行列式展开.

例 4 计算下列行列式

$$D=\begin{vmatrix}10&0&3&4\\1&0&1&0\\2&2&7&8\\3&0&1&0\end{vmatrix}.$$

解 注意到第 2 列有 3 个零元素,可利用性质 3 按第 2 列展开:

$$D=2\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}10&3&4\\1&1&0\\3&1&0\end{vmatrix}\quad（对该行列式再按第 3 列展开）$$

$$=-2\cdot4\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}=-2\cdot4\cdot(1-3)=16.$$

从而看到,行列式不仅可以按第 1 行展开,也可以按任一行(列)展开,行列式的某一行(列)的零元素越多,按该行(列)来展开,行列式的计算就越简单,并且得到的结果都是相等的.

性质 4　n 阶行列式中任意一行(列)的元素与另一行(列)的相应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即当 $i\neq k$ 时,有

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0.$$

证　在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

中将第 i 行的元素替换成第 k 行的元素,得到另一个行列式

$$D_0=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

我们注意到:D_0的第 i 行的代数余子式与 D 的第 i 行的代数余子式是完全一样的. 设 D 的第 i 行上的元素 $a_{ij}(j=1,\cdots,n)$ 的代数余子式为 $A_{ij}(j=1,\cdots,n)$,所以,D_0的第 i 行上的元素 $a_{kj}(j=1,\cdots,n)$ 的代数余子式亦为 $A_{ij}(j=1,\cdots,n)$. 将 D_0按第 i 行展开,得

$$D_0=a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}.$$

因为 D_0中有两行元素相同,所以 $D_0=0$,因此

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0\quad(i\neq k).$$

由性质 3 和性质 4,我们得到如下结论:

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases}D_n, & k=i,\\0, & k\neq i;\end{cases}\qquad(1.2.1)$$

$$a_{1s}A_{1j}+a_{2s}A_{2j}+\cdots+a_{ns}A_{nj}=\begin{cases}D_n, & s=j,\\0, & s\neq j.\end{cases}\qquad(1.2.2)$$