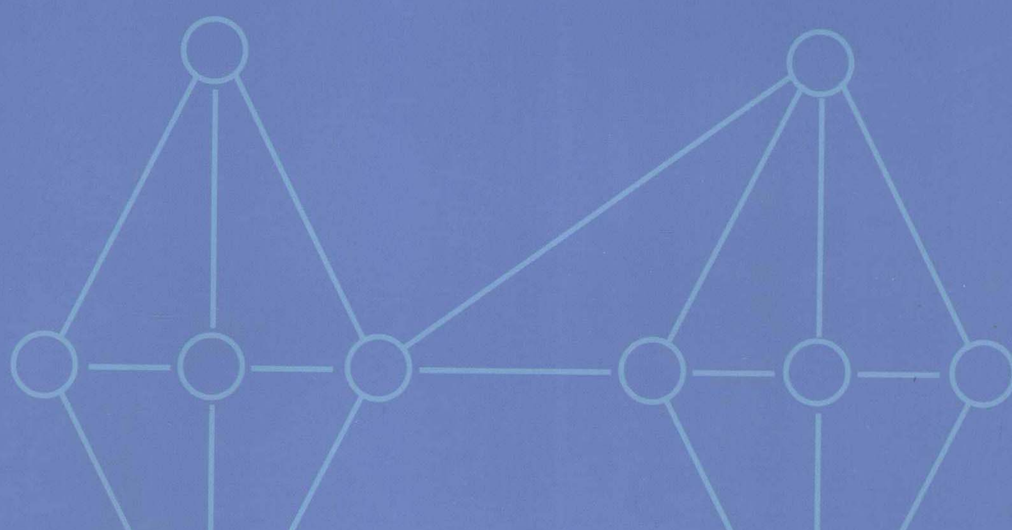
“十二五”规划大学教材

LISANSHUXUE

离散数学

黄立明◎主编



东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

O158
0188

离 散 数 学

黄立明　主编

东北师范大学出版社
长　春

图书在版编目（CIP）数据

离散数学 / 黄立明主编. —长春：东北师范大学出版社，2011.12

ISBN 978-7-5602-7752-3

Ⅰ.①离… Ⅱ.①黄… Ⅲ.①离散数学 Ⅳ.①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 281539 号

□责任编辑：王春彦　□封面设计：魔弹文化

□责任校对：汲　明　□责任印制：张允豪

东北师范大学出版社出版发行

长春净月经济开发区金宝街 118 号（邮政编码：130117）

电话：010－82920765

传真：010－82920765

网址：http：//www.nenup.com

电子函件：sdcbs@mail.jl.cn

北京魔弹文化制版

北京市彩虹印刷有限责任公司印装

2011 年 12 月第 1 版　2011 年 12 月第 1 次印刷

幅面尺寸：185 mm×260 mm　印张：14　字数：358 千字

定价：29.90 元

前言

离散数学是随着计算机科学技术发展和应用的日趋广泛而建立起来的一个数学分支，它为计算机科学和计算机工程应用提供了有力的理论工具。同时，它也是培养学生缜密的逻辑思维、抽象思维和创新能力的核心课程之一。然而，目前已有的《离散数学》教材存在以下问题：

1. 内容重复。函数、集合论在高中数学、高等数学中已讲，组合数学、形式语言、最优化会有专门的课程讲。

2. 内容太全。有些教材过于关注内容的全面性，而没有考虑到不同层次学生的实际情况，从而导致在64个课时内不能讲完所有内容。

3. 语言过于精干。离散数学中很多东西不直观，不好理解，写得过于精干，省略内容较多，学生根本没法自学。

作者黄立明为力求完美而编写本书，主要有如下特点：

1. 便于老师组织教学，便于学生自学。用耳熟能详的平实语言，采用其他课程、平常生活中能感受到的例子，承上启下，前后呼应（如图论中的图与关系图、传递闭包与图的连通性等），沿袭初中、高中的思维习惯，每章前面都有历史简介，让学生可以感受到知识的魅力。

2. 全书风格统一，行文流畅，一气呵成。认真规划章节知识点，力争

讲透每个知识点，循循善诱，引人入胜。

3. 内容实用，取舍恰当。遵循教指委与实施方案的内容，根据学生特点、64课时的要求，对内容进行恰当取舍，将原来学过、将来会讲、根本用不上的内容剔除。

4. 习题设计少而精。主要作用是巩固课堂所学，为后续章节做好准备。

编　者

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目 录 CONTENTE

第一章 命题逻辑

本章概述

一切科学，不论是社会科学还是自然科学，都离不开推理. 正确的推理形式应当从正确的前提出发，得出正确的结论. 因此，要保证推出的结论正确，除了推理过程正确之外，还需要推理的前提正确. 形式逻辑基本上采用自然语言研究推理. 自然语言是丰富而生动的，但具有二义性，即一个词可以表达多种不同的意义，这为精确研究推理形式造成了困难. 为了精确地表达思想，数理逻辑使用了特制的表意符号. 因此，数理逻辑又被称为符号逻辑. 数理逻辑是用数学方法研究推理形式的科学.

在后面的讨论中，需要用到集合和函数的概念. 把一些事物汇集到一起组成一个整体就成为一个集合，而这些事物就是这个集合的元素. 例如，所有的中国人，平面上所有的点，全体偶数就分别构成了不同的集合. 将 a 是集合 S 的元素记为 $a\in S$，将 a 不是集合 S 的元素记为 $a\notin S$. 不包含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$. 不是空集的集合称为非空集. 用 $\{a_1,\cdots,a_n\}$ 表示由元素 $a_1,\cdots,a_n$ 组成的集合. 如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 为 B 的子集，记为 $A\subseteq B$. 如果集合 A 和 B 包含相同的元素，则称 A 和 B 相等，记为 $A=B$. 且包含有穷个元素的集合称为有穷集，否则称为无穷集. 由集合 A 和 B 的全体公共元素组成的集合称为 A 和 B 的交，记为 $A\cap B$. 把集合 A 和 B 的元素合在一起构成的集合称为 A 和 B 的并，记为 $A\cup B$. 从集合 A 中去掉集合 B 中元素构成的集合称为 A 和 B 的差，记为 $A-B$. 由集合 A 中元素构成的长度为 n 的序列的全体组成的集合记为 A^n.

重点与难点

1. 命题和联结词
2. 公式和真值赋值
3. 等值演算
4. 对偶定理
5. 联结词的完全集
6. 范式和逻辑推论

§1.1 命题和联结词

命题是推理的基本要素．自然语言将命题表达为具有确定真假意义的陈述句．若该语句意义为真，就称其为真命题．若该语句意义为假，就称其为假命题．用0表示假命题，用1表示真命题，并称$\{0,1\}$为真值集合，称假命题的真值为0，真命题的真值为1.

考察下列语句：

(1)雪是白的.

(2)2是奇数.

(3)$x+y>5$.

(4)你是谁?

(5)我正在说谎.

(6)北京是中华人民共和国的首都.

(7)21世纪有人住在月球上.

语句(1)、(2)、(6)、(7)是命题，其中(1)、(6)是真命题，(2)是假命题，(7)的真假还不知道，但其具有唯一的真假值却是可以肯定的．语句(3)虽然是陈述句，但其真假意义不确定．若$x=y=3$，它为真；若$x=y=2$，它为假．所以，(3)不是命题．语句(4)是疑问句，不是命题．语句(5)虽然是陈述句，但它的意义自相矛盾，称为说谎者悖论，故不是命题.

由简单陈述句表述的命题称为简单命题．命题逻辑不再进一步分析简单命题的内部结构．在自然语言中，用连接词可以将若干个简单句组合成复合句．例如，用连接词“并且”将简单句“北京在广州的南面．”和“北京航空航天大学在北京．”组合成复合句“北京在广州的南面，并且北京航空航天大学在北京．”这个复合句表述了一个假命题，因为北京不在广州的南面．复合句表述的命题称为复合命题，组成这个复合句的简单句表述的命题称为它的支命题．可以看出，复合命题的真值由其支命题的真值和连接词的意义共同决定．若每个支命题的真值已确定，则连接词就为复合命题指定了唯一的真值．因此，可将连接词的意义看做真值函数.

【定义 1.1.1】

0和1称为0元真值函数．设$n\geqslant1$，称$\{0,1\}^n$到$\{0,1\}$的函数为n元真值函数．真值函数也称为联结词.

用小写英文字母p,q,r,s,t等表示命题变元，即在集合$\{0,1\}$中取值的变元．将真值函数F在其自变量所有可能取值下得到的值列成的表称为F的真值表．例如，一元真值

函数共有 4 个，它们的真值表如表 1.1 所示.

表 1.1　一元联结词的真值表

p	$F_1(p)$	$F_2(p)$	$F_3(p)$	$F_4(p)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

【定义 1.1.2】

上表中的联结词 F_3，称为否定，记为$\neg$.

把$\neg p$ 称为 p 的否定．$\neg$相当于汉语中的“不”．例如，用 p 表示“今天天气好”，则“今天天气不好”可表示为$\neg p$. 有时也用$\sim$表示否定联结词.

【定义 1.1.3】

二元联结词$\wedge$(合取)，$\vee$(析取)，$\oplus$(异或)，$\rightarrow$(蕴涵)，$\leftrightarrow$(等价)的真值表如表 1.2 所示.

表 1.2　常用二元联结词的真值表

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\oplus q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

$p\wedge q$ 称为 p 和 q 的合取．$\wedge$相当于汉语中的“并且”．由真值表可以看出，$p\wedge q=1$ 当且仅当 $p=q=1$. 有时也用 & 表示合取联结词.

$p\vee q$ 称为 p 和 q 的析取．$\vee$相当于汉语中的“或”．由真值表可以看出，$p\vee q=0$ 当且仅当 $p=q=0$.

$p\oplus q$ 称为 p 和 q 的异或．$\oplus$也相当于汉语中的“或”．由真值表可以看出，$P\oplus q=1$ 当且仅当 $p\neq q$.

$p\rightarrow q$ 称为 p 蕴涵 q，其中 p 称为 $p\rightarrow q$ 的前件，q 称为 $p\rightarrow q$ 的后件．由真值表可以看出，$p\rightarrow q=0$ 当且仅当 $p=1$ 且 $q=0$. 有时也用$\supset$表示蕴涵联结词.

$\rightarrow$类似于汉语中的“如果……，则……”，但是并不完全相同．在日常语言中，只有命题 p 和 q 存在某种意义上的联系时，“如果 p，则 q.”才能成为复合命题．例如，“如果太阳从西边出来，则雪是黑的．”是一句毫无意义的话．若用 p 表示命题“太阳从西边出来．”，q 表示命题“雪是黑的．”，则 $p\rightarrow q$ 表示一个真命题，因为 p 是假命题．在数理逻辑中，只要 p 和 q 是命题，不管它们是否有任何意义上的联系，$p\rightarrow q$ 总是表示一个命题.

在$\rightarrow$的真值表中规定，只要 p 为假，不管 q 的真假如何，$p\rightarrow q$ 总为真．这也与日常语言中“如果……，则……”的含义不同．若用 p 表示“我今天死．”，用 q 表示“我长生不老．”，

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

则 $p\rightarrow q$ 表示一个真命题，因为事实上我今天没有死．在日常语言中，“如果我今天死，则我长生不老．”显然是一个假命题．事实上，日常语言中的“如果……，则……”不是一个真值函数．复合命题“如果 q，则 q.”的真值不仅与 p 和 q 的真值有关，还与 p 和 q 的具体含义有关．为了与日常语言中的“蕴涵”相区别，有时把→所表示的蕴涵称为实质蕴涵．本书只讨论实质蕴涵，将“如果……，则……”理解为实质蕴涵.

$p\leftrightarrow q$ 称为 p 等价于 q. ↔相当于汉语中的“当且仅当”. 由真值表可以看出，$F\leftrightarrow q=1$ 当且仅当 $p=q$. 有时也用≡表示等价联结词.

¬，∧，∨，⊕，→，↔是 6 个最常用的联结词．用字母 p,q,r,s,t 等表示简单命题，复合命题就可以用简单命题和联结词表示出来，这个过程叫做命题符号化.

【例 1.1.1】

将下列命题符号化：

(1)李明是计算机系的学生，他住在 312 室或 313 室.

(2)如果我下班早且不累，就去商店看看.

(3)燕子飞回来是春天来了的必要条件.

(4)如果明天下雨，就不开运动会而照常上课.

【解】 (1)首先用字母表示简单命题.

p:李明是计算机系的学生.

q:李明住在 312 室.

r:李明住在 313 室.

该复合命题可表示为 $P\wedge q\oplus r)$，因为李明不会既住在 312 室，又住在 313 室，所以这里不用∨，而用⊕.

(2)首先用字母表示简单命题.

p:我下班早.

q:我累.

r:我去商店看看.

该复合命题可表示为$(p\wedge(\neg q))\rightarrow r$.

(3)首先用字母表示简单命题.

p:燕子飞回来了.

q:春天来了.

该复合命题可表示为 $q\rightarrow p$.

(4)首先用字母表示简单命题.

p:明天下雨.

q:明天开运动会.

r:明天照常上课.

该复合命题可表示为 $p \to ((\neg g) \wedge r)$.

§1.2 公式和真值赋值

在中学数学中,我们早已熟悉了公式的概念．例如,$(x+\sin y)\times 2$ 就是一个公式,其中 2 是实数,x 和 y 是自实数集取值的变元,sin 是一元实函数,$+$和$\times$是二元实函数．只要给 x 和 y 赋予确定的实数值,该公式就有唯一确定的值．例如,令 $x=1$ 和 $y=0$,该公式的值为 2. 因此,实际上可将该公式看做一个二元实函数．在我们还没有学到对数函数时,并不认为 $\ln x$ 是一个公式．因此,一个符号串是不是公式,还与所考虑的函数集合有关.

在这里将要定义的公式与中学数学的公式十分类似．公式中的变元是实变元,它取实数为值;命题逻辑中的变元是命题变元,它取真值为值．公式中的常元是实数,命题逻辑中的常元是 0 和 1. 公式中的函数是实函数,命题逻辑中的函数是真值函数.

用加或不加下标的小写英文字母 p,q,r,s,t 等表示命题变元,命题变元也称为命题符号,有无穷多个.

【定义 1.2.1】

命题变元称为原子公式.

可以用归纳法定义公式集合．归纳法是计算机科学中常用的方法．例如,某个程序设计语言的语句集可以定义如下:

$$C::=x=e \mid \{C_1;C_2\} \mid \text{if } b \text{ then } C_1 \text{ else } C_2 \mid \text{while } b \text{ do } C$$

其中 C,C_1,C_2 表示语句,x 表示变元,e 表示表达式,b 表示布尔表达式．用汉语可将上述定义表述如下:

(1)赋值语句是语句.

(2)如果 C_1 和 C_1,是语句,则$\{C_1;C_2\}$是语句.

(3)如果 b 是布尔表达式,C_1 和 C_2 是语句,则 if b then C_1 else C_2 是语句.

(4)如果 b 是布尔表达式,C 是语句．则 while b do C 是语句.

(5)每个语句都可通过有限次使用上述规则而得到.

在上述定义中,(1)是归纳定义的基础,直接规定赋值语句是语句,这是最简单的语句．(2)、(3)、(4)是归纳步,由比较简单的语句得出比较复杂的语句．(5)是极小化,规定语句集是满足上述四个条件的最小集合,即不能有限次使用前面四条规则得到的都不是语句．每个集合的归纳定义的极小化步都是一样的,因此,本书后面内容都省略这一步不写.

下面用归纳法定义公式集合.

【定义 1.2.2】

设 S 是联结词的集合．由 S 生成的公式定义如下：

(1)原子公式是由 S 生成的公式

(2)若 c 是 S 中的 0 元联结词,则 c 是由 S 生成的公式.

(3)若 $n\geqslant 1$,F 是 S 中的 n 元联结词,$A_1,\cdots,A_n$ 是由 S 生成的公式,则 $FA_1\cdots A_n$ 是由 S 生成的公式.

例如,p,$\neg\neg q$,$\neg r$ 都是由$\{\neg\}$生成的公式．对于二元联结词可以采用前缀记法,即把联结词写在运算对象的前面．如 $\vee pq$. 采用前缀记法不需要用括号也不会引起歧义．但是,人们习惯采用中缀记法,即把联结词写在运算对象的中间．采用中缀记法需要引进括号,否则有时会引起歧义,如 $p\vee q\wedge r$ 既可理解为$(p\vee q)\wedge r$,也可理解为 $p\vee(q\wedge r)$.为了使读者阅读方便起见,本书也采用中缀记法,把$(p\vee q)$看做 $\vee pq$ 的另一种表示．因此,$(p\vee q)$,$(p\wedge q)$,$\neg(P\vee 0)$都是由$\{0,\neg,\vee,\wedge\}$生成的公式.

如果不需要特别指出联结词集合 S,就将由 S 生成的公式简称为公式,由于对二元联结词采用中缀记法,为了避免歧义而引进了括号,但公式中的括号太多会使人眼花缭乱,如在公式 $((((((p\wedge q)\vee r)\vee q)\rightarrow q)\oplus q)\leftrightarrow r)$中就有六对括号．为了减少括号．又不引起歧义,引进以下省略括号的约定：

(1)公式最外层的括号可省略.

(2)规定联结词的优先级从高到低的排列顺序为：$\neg,\wedge,\vee,\oplus,\rightarrow,\leftrightarrow$. 若无括号,优先级高的联结词先运算.

(3)若同一个联结词连续多次出现且无括号,则按从左至右的顺序运算.

例如,按约定(1),公式$((((((p\wedge q)\vee r)\vee q)\rightarrow p)\oplus q\leftrightarrow r)$可去掉最外层括号简写为$(((((p\wedge q)\vee r)\vee q)\rightarrow p)\oplus q\leftrightarrow r$;按约定(2),$\vee$ 的优先级比$\rightarrow$高,$\oplus$的优先级比$\leftrightarrow$高,$\wedge$ 的优先级比 $\vee$ 高,该公式可再简写为$((p\wedge q\vee r)\vee q\rightarrow p)\oplus q\leftrightarrow r$;再按约定 (3),可进一步简化为$(p\wedge q\vee r\vee q\rightarrow p)\oplus q\leftrightarrow r$.

【定义 1.2.3】

从全体命题变元组成的集合到集合$\{0,1\}$的函数称为真值赋值．设 v 是真值赋值,用 p^v 表示 v 赋给命题变元 p 的真值．由 S 生成的公式 A 在真值赋值 v 下的真值 $v(A)$定义如下：

(1)若 A 是命题变元 p,则 $v(A)=p^v$.

(2)若 A 是 S 中的 0 元联结词 c,则 $v(A)=c$.

(3)若 A 是 $FA_1\cdots A_n$,其中 $n\geqslant 1$,F 是 n 元联结词,则 $v(A)=F(v(A_1),\cdots,v(A_n))$.

【定理 1.2.1】

设 A 是公式,v_1 和 v_2 是真值赋值,对于 A 中出现的每个命题变元 p,$p^{v_1}=p^{v_2}$,贝 v_1

$(A)=v_2(A)$.

【证明】 对 A 的长度进行归纳.

若 A 的长度是 1,则 A 是命题变元或 0 元联结词.

(1)若 A 是命题变元 p,则 $v_1(A)=p^{v_1}=p^{v_2}=v_2(A)$.

(2)若且是 0 元联结词 c,则 $v_1(A)=c=v_2(A)$.

设 A 的长度 m 大于 1,对于每个长度小于 m 的由 S 生成的公式 B,$v_1(B)=v_2(B)$.

(3)若 A 是 $FA_1\cdots A_n$,其中 $n\geqslant 1$,F 是 n 元联结词,则 $A_1,\cdots,A_n$ 的长度都小于 m,由归纳假设知道

$$v_1(A_i)=v_2(A_i)\qquad i=1,\cdots,n$$

因此

$$\begin{aligned}v_1(A)&=F(v_1(A_1),\cdots,v_1(A_n))=F(v_2(A_1),\cdots v_2(A_n))\\&=v_2(A)\end{aligned}$$

证毕.

若公式 A 中出现的命题变元为 $p_1,\cdots,p_n$,v 是真值赋值,则 $v(A)$只与 $p_1^v,\cdots,p_n^v$ 有关,而与 v 对其他命题变元的赋值无关. 因此,在计算 $v(A)$时,只需指定 $p_1^v,\cdots,p_n^v$. 用 $(p_1/a_1,\cdots,p_n/a_n)$表示满足 $p_1^v=a_1,\cdots,p_n^v=a_n$ 的任何一个真值赋值 v.

【例 1.2.1】

设公式 A 为 $p\vee 0\rightarrow q\wedge 1$,真值赋值 $v=(P/1,q/0)$,则 $v(A)=1\vee 0\rightarrow 0\wedge 1=0$.

【定义 1.2.4】

设 A 是公式.

(1)如果真值赋值 v 使得 $v(A)=1$,则称 v 满足 A.

(2)如果每个真值赋值都满足 A,则称 A 为永真式,也称为重言式.

(3)如果每个真值赋值都不满足 A,则称 A 为永假式,也称为矛盾式、不可满足式.

(4)如果至少有一个真值赋值满足 A,则称 A 为可满足式.

显然,永真式都是可满足式. 公式 A 是可满足式当且仅当 A 不是永假式. 公式 A 是永真式当且仅当 $\neg A$ 是永假式. 公式且是永假式当且仅当司且是永真式.

如果对公式中出现的每个命题变元都指定了确定的真值,则该公式的真值也就唯一确定了. 因此,可将公式看做真值函数,可以列出公式的真值表. 若公式的真值表的最后一列均为 1,则该公式为永真式. 若公式的真值表的最后一列均为 0,则该公式为永假式. 若公式的真值表的最后一列不全为 0,则该公式为可满足式.

设公式 A 中出现 n 个命题变元,因为每个命题变元可取两个不同的值,所以 n 个命题变元的取值有 2^n 种,因此 A 的真值表有 2^n 行.

【例 1.2.2】

用真值表(表 1.3)判断 $\neg(p\wedge q)\leftrightarrow\neg p\vee\neg q$ 是否为永真式.

表 1.3　$\neg(p\wedge q)\leftrightarrow p\vee\neg q$ 的真值表

p	q	$p\wedge q$	$\neg(p\wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\vee\neg q$	$\neg(p\wedge q)\leftrightarrow\neg p\vee\neg q$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1

因为真值表最后一列均为 1,所以 $\neg(p\wedge q)\leftrightarrow\neg p\vee\neg q$ 是永真式.

设 W 是一个集合,$S\subseteq W$,P 是以 W 中元素为输入量的程序,并且 P 满足以下条件:如果以 S 中元素为输入量,则 P 运行终止并输出"是";如果以不在 S 中的元素为输入量,则 P 运行也终止并输出"否". 称 P 解 S 的判定问题 . 如果有一个程序解 S 的判定问题,就称 S 的判定问题是可解的.

显然,列真值表是可以用计算机实现的 . 因此,若取 W 为所有公式的集合,S 为所有永真式(永假式、可满足式)的集合,可以得出,S 的判定问题是可解的,即命题逻辑是可判定的.

【定义 1.2.5】

用公式 $B_1,\cdots,B_n$ 分别替换公式 A 中的不同命题变元 $p_1,\cdots,p_n$ 所得到的公式记为 $A^{p_1,\cdots,p_n}_{B_1,\cdots,B_n}$,称之为 A 的替换实例.

例如,$(P\wedge\neg p\rightarrow q)^{p,q}_{r\rightarrow p,r}=(r\rightarrow p)\wedge\neg(r\rightarrow p)\rightarrow r$,因此,$(r\rightarrow p)\wedge\neg(r\rightarrow p)\rightarrow r$ 是 $p\wedge\neg p\rightarrow q$ 的一个替换实例.

【定理 1.2.2】

设 $p_1,\cdots,p_n$ 是不同命题变元,$A,B_1,\cdots,B_n$ 是公式,则对于每个真值赋值 v,

$$v(A^{p_1,\cdots,p_n}_{B_1,\cdots,B_n})=v[p_1/v(B_1),\cdots,p_n/v(B_n)](A)$$

其中真值赋值 $v'=v[p_1/v(B_1),\cdots,P_n/v(B_n)]$定义如下:

$$p^{v'}=\begin{cases}v(B_1), & \text{若 } p \text{ 是 } p_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ v(B_n), & \text{若 } p \text{ 是 } p_n\\ p^{v}, & \text{否则}\end{cases}$$

【证明】 对 A 进行归纳.

(1)若 A 是 p_i,其中 $1\leqslant i\leqslant n$,则 $A^{p_1,\cdots,p_n}_{B_1,\cdots,B_n}$ 是 B_i,$v(A^{p_1,\cdots,p_n}_{B_1,\cdots,B_n})=v(B_i)=v'(A)$.

(2)若 A 是除 $p_1,\cdots,p_n$ 之外的命题变元 p,则 $A^{p_1,\cdots,p_n}_{B_1,\cdots,B_n}$ 仍是 p,$v(A^{p_1,\cdots,p_n}_{B_1,\cdots,B_n})=v(p)=v'(A)$.

(3)若 A 是 0 元联结词 c,则 $A^{p_1,\cdots,p_n}_{B_1,\cdots,B_n}$ 仍是 c,$v(A^{p_1,\cdots,p_n}_{B_1,\cdots,B_n})=c=v'(A)$.

(4)若 A 是 $FA_1,\cdots A_m$,其中 F 是 m 元联结词,则 $A^{p_1,\cdots,p_n}_{B_1,\cdots,B_n}$ 是 $F(A_1)^{p_1,\cdots,p_n}_{B_1,\cdots,B_n}\cdots$

$(A_m)_{B_1,\cdots,B_n}^{p_1,\cdots,p_n}$，$v(A_{B_1,\cdots,B_n}^{p_1,\cdots,p_n})=F(v((A_1)_{B_1,\cdots,B_n}^{p_1,\cdots,p_n}),\cdots,v((A_m)_{B_1,\cdots,B_n}^{p_1,\cdots,p_n}))=F(v'(A_1),\cdots,v'(A_m))=v'(A)$.

证毕.

【定理 1.2.3】

设 A 是公式.

(1)若 A 是永真式,则 A 的每个替换实例都是永真式.

(2)若 A 是永假式,则 A 的每个替换实例都是永假式.

【证明】

(1)任取永真式 A 的替换实例 $A_{B_1,\cdots,B_n}^{p_1,\cdots,p_n}$,对于每个真值赋值 v,

$$v(A_{B_1,\cdots,B_n}^{p_1,\cdots,p_n}) = v[p_1/v(B_1),\cdots,p_n/v(B_n)](A) = 1$$

所以 $A_{B_1,\cdots,B_n}^{p_1,\cdots,p_n}$ 是永真式.

(2)可同样证明.

证毕.

§1.3 等值演算

【定义 1.3.1】

设 A,B 是公式、如果对于每个真值赋值 v,$v(A)=v(B)$,则称 A 和 B 等值,也称 A 与 B 逻辑等价,记为 $A\Leftrightarrow B$.

显然,$A\Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A\leftrightarrow B$ 是永真式. 两个公式是否等值可以用真值表判断.

【例 1.3.1】

证明 $p\to(q\to r)\Leftrightarrow p\wedge q\to r$.,

【证明】 $p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)$ 等值式模式(3)

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee r$ 结合律

$\Leftrightarrow\neg(p\vee q)\vee r$ 德·摩根律

$\Leftrightarrow p\wedge q\to r$ 等值式模式(3)

证毕.

【例 1.3.2】

判断 $\neg(p\vee q)$ 和 $\neg p\wedge\neg q$ 是否等值,其真值表见表 1.4.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com